**PROBLEMA (proposto dal mio collega Prof. Manlio Milazzo)**

Supposta paradossalmente la Terra perfettamente sferica e coperta solo da acqua, determinare la rotta lossodromica che dovrebbe seguire una nave che parte da $A(\varphi = 89°S; \lambda = 0°)$ per giungere in $B(\varphi = 89°N; \lambda = 0°)$ tagliando cinque volte il circolo meridiano *AB*, esclusi i punti di partenza *A* e di arrivo *B*. Inoltre determinare il cammino lossodromico.

**SOLUZIONE.**

I due punti si trovano sullo stesso meridiano, in particolare su quello di Greenwich. Se fosse stato chiesto il percorso più breve, la soluzione sarebbe stata immediata: la nave avrebbe percorso il meridiano di longitudine nulla, dal punto *A* al punto *B*, ovvero un arco ortodromico essendo il percorso un arco di circolo massimo minore di 180°, che in questo caso è anche un arco lossodromico con rotta costante *R* = 0°; ed il cammino sarebbe stato:

$$m = (\Delta\varphi)' = (2 \cdot 89 \cdot 60)' = 10^{\cdot}680' = 10^{\cdot}680 mg .$$

**Ora risolviamo il problema**

Come sappiamo la rotta vera lega la differenza di longitudine con la differenza di latitudine crescente

$$\Delta\lambda = \Delta\varphi_c \cdot \tan R_v ; \qquad (1)$$

ma, $\Delta\lambda$ è nullo e quindi l'equazione diventa:

$$\Delta\varphi_c \cdot \tan R_v = 0 .$$

Quest'ultima è soddisfatta solo per *Rv* = 0° (anche per *Rv* = 180°), ma la nave, durante la sua navigazione, deve tagliare cinque volte il meridiano *AB*, pertanto deve circumnavigare la Terra; poiché una rotta lossodromica incontra i meridiani con un angolo costante, un percorso che si avvicina ad un polo è un tratto di spirale logaritmica.

Una nave che deve percorrere una lossodromia compiendo *n* giri attorno all'asse terrestre, partendo da un punto *A* per raggiungere un punto *B*, ha una variazione di longitudine

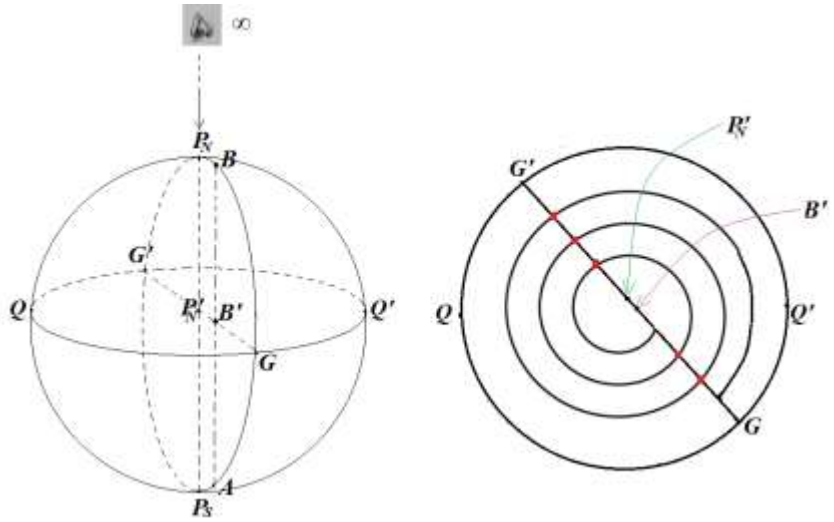
$$\Delta\lambda = n \cdot 360° . \qquad (2)$$

Nel problema la nave deve tagliare cinque volte il circolo meridiano *AB*, esclusi i punti di partenza *A* e di arrivo *B*. Dobbiamo allora determinare il valore di *n*; allo scopo, per facilitarne la ricerca, ci serviamo di una proiezione ortografica equatoriale.

Nella seguente figura sono riportate:

- una figura scenografica dove è riportata la Terra, il circolo meridiano di Greenwich $P_N G P_S G'$, l'equatore $QGQ'G'$, i punti *A* e *B* e le loro proiezioni $A' \equiv B'$ sull'equatore;
- una **proiezione ortografica equatoriale**; in queste proiezioni si considera il punto di vista a distanza infinita ($\infty$) e si effettua la proiezione sul piano equatoriale alla direzione del punto di vista (in figura rappresentato dall'occhio di un ipotetico osservatore posto all'infinito).

Nella seconda figura è disegnata una spirale, in senso antiorario, a partire dal raggio $(P_N^{'}G)$;




dalla figura si rileva che i giri completi per ottenere i 5 punti richiesti (in figura sono i punti di colore rosso) sono 3, per cui è $n$ =3 ed allora la variazione di longitudine, dalla (2), è:

$$\Delta\lambda = 3 \cdot 360° = 1{\cdot}080° .$$

**Calcolo delle rotte**.

L'equazione per il calcolo della rotta lossodromica è:

$$\tan R = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi_c} \qquad (3)$$

nella quale $\Delta\varphi_c$ è la differenza della latitudine crescente, e la latitudine crescente (espressa in primi d'arco) si determina con l'espressione

$$\varphi_c \approx 7915.57 \cdot \log \tan\left(45° + \frac{\varphi°}{2}\right) \qquad \textbf{(*)}$$

Siccome le due latitudini hanno nome opposto, la differenza di latitudine crescente è il doppio di quella di $A$:

$$\Delta\varphi_c \approx 2 \cdot 7915.57 \cdot \log \tan\left(45° + \frac{89°}{2}\right) \approx 32{\cdot}598.559' .$$

Dai risultati ottenuti di $\Delta\lambda$ e di $\Delta\varphi_c$, la (3) porge:

$$\tan r_v = \frac{(1080° \cdot 60)'}{32{\cdot}598.559'} = \frac{64{\cdot}800'}{32{\cdot}598.559'} \approx 1{,}987817929 .$$

da cui

$$r_v = 63°17'40''.$$

La curva lossodromica collega un punto avente latitudine Sud con un punto di latitudine Nord e quindi il primo nome della rotta quadrantale è Nord; la longitudine di partenza è 0°, come quella di arrivo, ma la nave fa 3 giri completi, con una variazione di longitudine pari a 1080°, quindi ci sono due possibilità per la direzione in longitudine: Est od Ovest;

pertanto le rotte possibili sono due:

- rotta "Nord-Est": $r_v = N63°17'40''E$
- rotta "Nord-Ovest: $r_v = N63°17'40''W$ ,

tra loro simmetriche sia rispetto sia al meridiano $\lambda$ = 0° che al meridiano $\lambda$ = 180°.

**Calcolo del cammino *m*.**

L'equazione per determinare il cammino lossodromico è:

$$m = \frac{(\Delta\varphi)'}{\cos r_v}, \qquad (4)$$

nella quale, è:

$$\Delta\varphi = 89° - (-89°) = 178° \quad \text{da cui} \quad (\Delta\varphi)' = (178° \cdot 60)' = 10^{\cdot}680'.$$

Allora, dalla (4), si ha:

$$m = \frac{10^{\cdot}680'}{\cos 63°17'40''} \approx 23^{\cdot}764.7'$$

Poiché un primo d'arco di meridiano corrisponde ad un miglio marino, il cammino *m* è:

$$m \approx 23^{\cdot}764.7mg.$$

►In un qualunque libro di testo, a riguardo della navigazione lossodromica viene riportata la dimostrazione per giungere l'equazione della determinazione della latitudine crescente:

$$\varphi_c = \int_0^{\varphi} \sec\varphi \cdot d\varphi.$$

**Da questa si arriva all'equazione (*) a pag.2; vediamo come.**

Cominciamo a cambiare la variabile di integrazione …

essendo:

- $\varphi = 90° - c$, che differenziata diventa $d\varphi = 0 - dc$, ovvero $d\varphi = dc$,

- $\sec\varphi = \sec(90° - c) = \dfrac{1}{\cos(90° - c)} = \dfrac{1}{\sin c}$:

l'integrale indefinito $\int \sec\varphi \cdot d\varphi$ diventa:

$$\int \sec\varphi \cdot d\varphi = -\int \frac{dc}{\sin c} = -\int \frac{dc}{2 \cdot \sin\frac{c}{2} \cdot \cos\frac{c}{2}} = -\int \frac{d\frac{c}{2}}{\sin\frac{c}{2} \cdot \cos\frac{c}{2}} =$$

divido numeratore e denominatore per $\cos^2\frac{c}{2}$

$$= \int \frac{\sec^2\frac{c}{2}}{\tan\frac{c}{2}} \cdot d\frac{c}{2};$$

rileviamo che la funzione integranda è la derivata di $\ln\left(\tan\frac{c}{2}\right)$, infatti ponendo

$$f\left(\frac{c}{2}\right) = \ln\left(\tan\frac{c}{2}\right),$$

la cui derivata è:

$$f'\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{1}{\tan\frac{c}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{c}{2}} = \frac{\sec^2\frac{c}{2}}{\tan\frac{c}{2}}.$$

Pertanto:

$$\int \sec\varphi \cdot d\varphi = -\ln\left(\tan\frac{c}{2}\right) + c = \ln\left(\tan\frac{c}{2}\right)^{-1} + c = \ln\left(\cot\frac{c}{2}\right) + c = \ln\left(\cot 45° - \frac{\varphi}{2}\right) + c =$$

$$= \ln\left(\tan\left[90° - \left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)\right]\right) + c = \ln\left(\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)\right) + c.$$

Nell'integrazione definita si elimina la costante additiva:

$$\varphi_c = \int_0^{\varphi} \sec\varphi \cdot d\varphi \quad = \ln\left(\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)\right);$$

e così, analogamente, è per la latitudine di arrivo $\varphi'_c$:

$$\varphi'_c = \int_0^{\varphi'} \sec\varphi \cdot d\varphi = \ln\left(\tan\left(45° + \frac{\varphi'}{2}\right)\right),$$

ove $\varphi_c$ e $\varphi'_c$ sono espresse in radianti.

Possiamo quindi scrivere:

$$\Delta\varphi_c = \varphi'_c - \varphi_c = \ln\left(\tan\left(45° + \frac{\varphi'}{2}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)\right).$$

**OSSERVAZIONE**.

È indubbiamente preferibile ottenere la latitudine crescente espressa in primi d'arco ed usare il logaritmo in base 10; pertanto basta ricordare che il valore di un angolo espresso in primi d'arco si ottiene dall'equivalente angolo espresso in radianti per $\frac{10800}{\pi} \approx 3437.7$ che proviene dalla proporzione

$$\pi_{rad.} : 10^{\cdot}800' = 1_{rad.} = \alpha'$$

da cui

$$\alpha' = \frac{10^{\cdot}800}{\pi}.$$

Inoltre il logaritmo neperiano (base *e*) è uguale al logaritmo decimale (base 10) moltiplicato per il modulo

$$\frac{1}{\log e} \approx 2.30258,$$

infatti, posto $\ln n = x$ e $\log n = y$, da esse è rispettivamente $e^x = n$ e $10^y = n$; calcolando di queste ultime i logaritmi in base 10, otteniamo:

$$\log e^x = \log 10^y \quad \Rightarrow \quad x \cdot \log e = y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y}{\log e},$$

da cui

$$\ln n = \log n \cdot \frac{1}{\log e}.$$

In conclusione l'espressione che porge la latitudine crescente in primi d'arco (considerata la Terra perfettamente sferica), è:

$$\varphi_c \approx 3^{\cdot}437.7 \cdot 2.30258 \cdot \ln\left(\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

e, troncato alla seconda cifra decimale, è:

$$\varphi_c \approx 7915.57 \cdot \ln\left(\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)\right),$$

che è proprio la **(*)**.