VERIFICA NUMERICA DELLA SECONDA LEGGE DI KEPLERO

Per verificare la seconda legge di Keplero mi avvalgo del pianeta Mercurio, la cui orbita è un'**ellisse** con una eccentricità notevole, che la rende la più eccentrica tra i pianeti del nostro sistema solare.

((**OSSERVAZIONE**. I dati inerenti l'orbita sono espressi in notazione scientifica (o notazione esponenziale) del tipo

$$a \cdot 10^b$$

in cui:

- a è il **coefficiente** (o mantissa) ed è un numero reale con la condizione $1 \le |a| < 10$;
- 10^b **potenza di base 10**, dove 10 è la base della potenza e b è l'esponente.

PREMESSA. Nello svolgimento del problema, per facilitare la costruzione di grafici sul piano cartesiano, tutti i **coefficienti** saranno troncati alla seconda cifra decimale ed ommessa la **potenza di base 10**))

Le distanze di Mercurio dal Sole al:

- **Perielio** (**distanza minima**): $4.60 \cdot 10^7\,Km$
- **Afelio (distanza massima):** $6.98 \cdot 10^7\,Km$

I semiassi che definiscono le dimensioni dell'ellisse orbitale sono:

- **semiasse maggiore :** $a = 5.79 \cdot 10^7\,Km$
- **semiasse minore:** $b = 5.66 \cdot 10^7\,Km$

L'eccentricità ***e*** dell'orbita di Mercurio è di circa **0.2056**. Questo valore, il più alto tra i pianeti maggiori, spiega la grande differenza tra la distanza al perielio e all'afelio.

La distanza del centro dell'ellisse da ciascun fuoco è data da $c = a \cdot e = 1.19 \cdot 10^7\,Km$. Il Sole si trova in uno dei due fuochi dell'ellisse; scelgo per il Sole ***S*** quello a sinistra, ovvero quello con ascissa negativa, per cui le coordinate sono (in virtù della precedente **premessa**) (– 1.19; 0).

Sapendo che:

(1) **dieci giorni terrestri** dopo il suo passaggio all'afelio, la distanza di Mercurio dal Sole è $6.91 \cdot 10^7\,Km$,

(2) **dieci giorni terrestri** dopo il suo passaggio al perielio, la distanza di Mercurio dal Sole è $4.75 \cdot 10^7\,Km$,

risolvere il seguente

PROBLEMA.

Verificare che le aree spazzate dal raggio vettore Sole-Mercurio nei due intervalli di tempo (1) e (2) sono uguali.

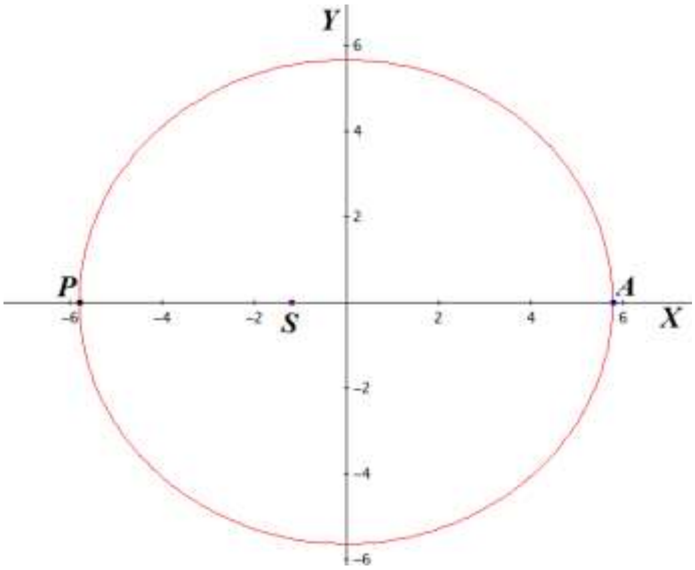
SOLUZIONE.

Lavoro in geometria analitica, e con la premessa fatta sui dati, si ha:

$a = 5.79$; $b = 5.66$; $c = 1.19$; $A\,(5.79, 0)$; $P(-5.79, 0)$.

Scrivo l'equazione dell'orbita ellittica:

$$\frac{X^2}{5.79^2}+\frac{Y^2}{5.66^2}=1 \qquad (1)$$



Scrivo l'equazione della circonferenza avente centro il fuoco S e raggio 6.91

$$(X-(-1.19))^2+(Y-0)^2=6.91^2 \qquad \text{ovvero}$$

$$(X+1.19)^2+Y^2=6.91^2. \qquad (2)$$

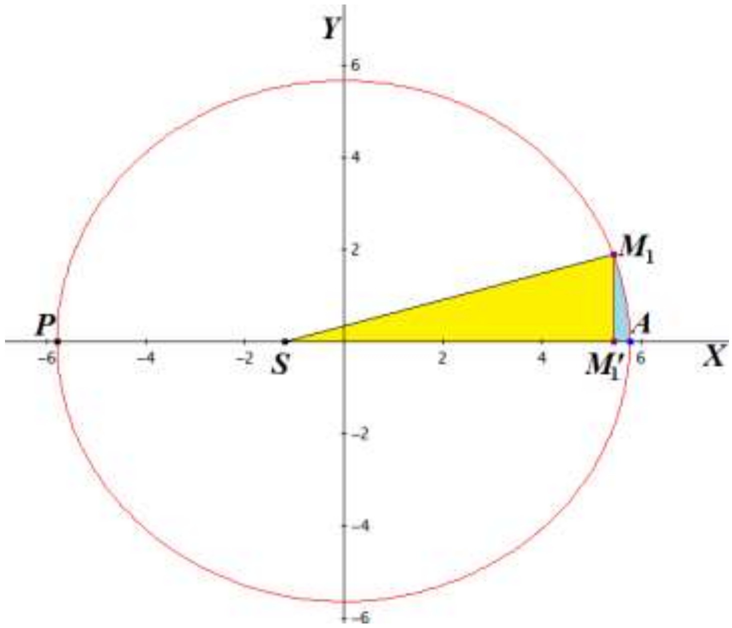
Così posso determinare le coordinate della posizione di Mercurio 10 giorni dopo essere stato all'afelio, mettendo a sistema la (1) con la (2) usando il connettivo $\wedge$ al posto della tradizionale parentesi graffa

$$\frac{X^2}{5.79^2}+\frac{Y^2}{5.66^2}=1 \quad \wedge \quad (X+1.19)^2+Y^2=6.91^2$$

le cui soluzioni sono:

$$X = 5.45 \wedge (Y = -1.90 \vee Y = +1.90)$$

come detto, il connettivo $\wedge$ vuol dire “e” ed il connettivo $\vee$ vuol dire “o”; pertanto si ottengono i due punti (5.45; –1.90) o (5.45; 1.90); nel nostro caso il punto di intersezione che ci interessa è il secondo, indicato con M_1, indicando con M'_1 la sua proiezione sull’asse delle ascisse.



Allora considero il triangolo $SM_1^{'}M_1$ in cui è: $S(-1.19;0)$, $M_1(5.45;1.90)$, $M_1^{'}(5.45;0)$ e ne determino l’area (cateto per cateto diviso 2):

$$\frac{(5.45-(-1.19))\cdot 1.90}{2} = \frac{6.64\cdot 1.90}{2} \approx 6.30\,.$$

Ora risolvo la (1) rispetto alla variabile Y:

$$Y = -\frac{283\cdot\sqrt{335241-10000X^2}}{28950} \qquad \vee \qquad Y = \frac{283\cdot\sqrt{335241-10000X^2}}{28950}\,;$$

determino l’area del semi segmento ellittico $M_1^{'}AM_1$, integrando la seconda delle precedenti funzioni, tra i limiti 5.45 e 5.79:

$$\int_{5.45}^{5.79} \frac{283\cdot\sqrt{335241-10000\cdot X^2}}{28950} \approx 0.43$$

Pertanto, l’area approssimata spazzata dal raggio vettore in questi 10 giorni terrestri è:

6.30 + 0.43 = **6.73**. **(*)**

►Operiamo allo stesso modo per quanto riguarda l’area spazzata, in 10 giorni terrestri, a partire dal perielio.

Scrivo l’equazione della circonferenza avente centro il fuoco S e raggio 4.75

$$(X-(-1.19))^2+(Y-0)^2=4.75^2$$

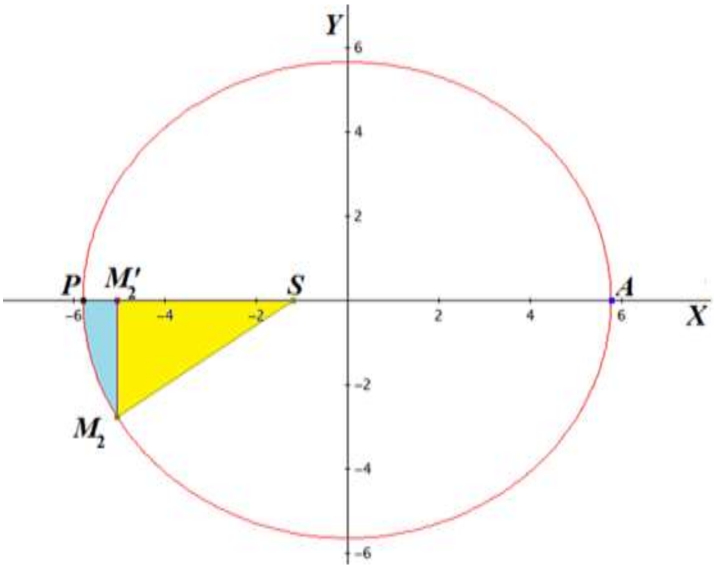
$$(X+1.19)^2+Y^2=4.75^2 \qquad (3)$$

Così posso determinare le coordinate della posizione di Mercurio 10 giorni dopo essere stato al perielio, mettendo a sistema la (1) con la (3) usando ancora il connettivo $\wedge$ al posto della tradizionale parentesi graffa

$$\frac{X^2}{5.79^2}+\frac{Y^2}{5.66^2}=1 \quad \wedge \quad (X+1.19)^2+Y^2=4.75^2$$

$$X=-5.05 \wedge (Y=-2.76 \vee Y=+2.76),$$

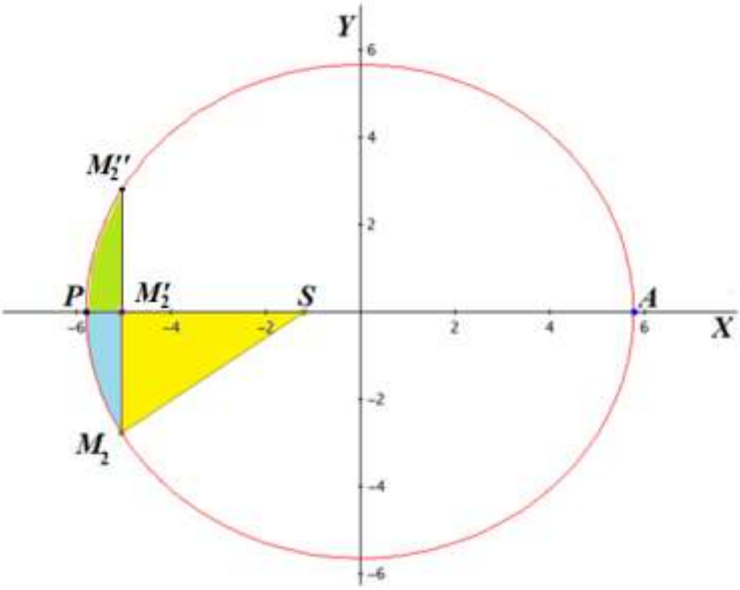
il punto di intersezione è $M_2(-5.05;-2.76)$ e la sua proiezione sull'asse delle ascisse è $M_2^{'}(-5.05;0)$



Allora determino l'area il triangolo $SM_2^{'}M_2$ (anche qui, cateto per cateto diviso 2):

$$\frac{(-1.19-(-5.05))\cdot(0-(-2.76))}{2}=\frac{3.86\cdot 2.76}{2}\approx 5.33\,.$$

Calcolo l'area del semi segmento ellittico, considerando quello, di colore verde, che è nel 4° quadrante, simmetrico di quello che in figura è di colore azzurro:



$$\int_{-5.45}^{5.05} \frac{283 \cdot \sqrt{335241 - 10000 \cdot X^2}}{28950} \approx 1.38\,;$$

la somma delle due aree è:

$$5.33 + 1.38 = \mathbf{6.71} \qquad \textbf{(**)}$$

I valori delle aree (*) e (**) possono considerarsi concordi in virtù delle approssimazioni fatte, pertanto si è verificata numericamente la seconda legge di Keplero.