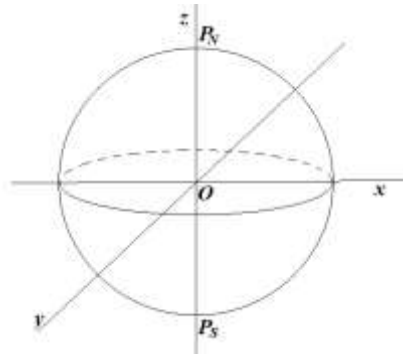


## I MERIDIANI SONO PERPENDICOLARI AI PARALLELI?

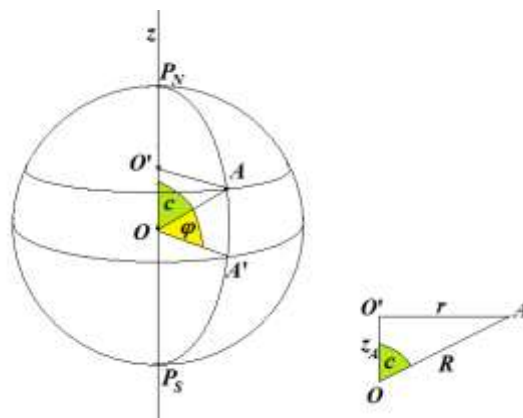
SI!

**I MERIDIANI E I PARALLELI SI INTERSECANO SEMPRE AD ANGOLO RETTO, FORMANDO UNA GRIGLIA ESSENZIALE PER LA LOCALIZZAZIONE SULLA TERRA.**

Immaginiamo una sfera che rappresenti la Terra, avente raggio  $R$  e riferita ad un sistema di assi cartesiani  $xyz$  con l'origine  $O$  coincidente col centro della Terra:



Soffermiamoci per ora sull'asse  $z$ , ovvero dell'asse che passa per il Polo Nord e il Polo Sud; abbiamo la seguente figura



in essa,  $A$  è un punto sulla superficie terrestre sul parallelo di latitudine  $\varphi$  e quindi di colatitudine  $c$ ;  $R$  il raggio della Terra e  $r$  quello del parallelo considerato. In riferimento al triangolo  $OAO'$ , retto in  $O'$ , abbiamo la coordinata  $z$  del punto  $A$ :  $z_A = R \cdot \cos c$ .

Pertanto

$$z = R \cdot \cos c \quad (1)$$

indica la coordinata  $z$  di un qualunque punto della superficie terrestre rispetto al piano equatoriale  $xy$ ; in particolare:

- \_ se  $c$  è piccolo (vicino allo zero, quindi vicino al Polo Nord),  $z$  sarà vicino a  $R$ ;
- \_ se  $c = 90^\circ$  (punto sull'equatore), è  $z = 0$ ;

– se  $c$  è vicino a  $180^\circ$  (vicino al Polo Sud),  $z$  sarà vicino a  $-R$ .

E, sempre dal triangolo rettangolo  $OAO'$ , ricaviamo la relazione tra il raggio  $r$  del parallelo col raggio  $R$  della Terra:

$$r = R \cdot \sin c$$

Ora, consideriamo la proiezione  $A'$  del punto  $A$  sul piano equatoriale. Abbiamo visto che la distanza di questa proiezione dall'origine  $O$  (centro dell'equatore) è  $R \cdot \sin c$ .

Per trovare le coordinate  $x$  e  $y$  di questa proiezione, dobbiamo usare l'angolo di longitudine  $\lambda$  ed allora ci serviamo del sistema di coordinate polari, ovvero  $x = \rho \cdot \cos \vartheta$  e  $y = \rho \cdot \sin \vartheta$  nelle quali è:

- $\rho$  è la distanza del punto dall'origine (*polo*),
- $\vartheta$  è l'angolo tra l'asse polare (solitamente il semiasse  $x$  positivo) e il segmento che congiunge l'origine al punto, misurato in senso antiorario.

Nel nostro caso si sostituisce  $\rho = r = R \cdot \sin c$  e  $\vartheta = \lambda$ , pertanto:

- la coordinata  $x$  è

$$x = R \cdot \sin c \cdot \cos \lambda,$$

- la coordinata  $y$  è

$$y = R \cdot \sin c \cdot \sin \lambda.$$

In definitiva, un punto  $A$  sulla Terra, avente colatitudine  $c$  e longitudine  $\lambda$ , in un sistema di coordinate cartesiane nello spazio  $xyz$  ha coordinate:

$$A(R \cdot \sin c \cdot \cos \lambda; R \cdot \sin c \cdot \sin \lambda; R \cdot \cos c).$$

Ora parametrizziamo la superficie terrestre mediante le coordinate sferiche  $(\lambda; c)$ , dove  $c = 90^\circ - \varphi$  algebricamente (\*); così la posizione di un punto sulla superficie sferica terrestre è data dal vettore

$$v(\lambda, c) = (R \cdot \sin c \cdot \cos \lambda; R \cdot \sin c \cdot \sin \lambda; R \cdot \cos c).$$

I meridiani ed i paralleli sono le curve coordinate, ed in particolare:

- un parallelo ha colatitudine  $c$  costante ed è attraversato da tutti i meridiani ciascuno dei quali è caratterizzato dalla propria longitudine  $\lambda$ , pertanto un meridiano  $m$  può essere parametrizzato come segue

$$m(\lambda) = v(\lambda, c_0) = (R \cdot \sin c_0 \cdot \cos \lambda; R \cdot \sin c_0 \cdot \sin \lambda; R \cdot \cos c_0) \quad (*)$$

dove  $c_0$  è la colatitudine di quel parallelo;

- un meridiano ha longitudine  $\lambda$  costante ed è attraversato da tutti i paralleli ciascuno dei quali è caratterizzato dalla propria colatitudine  $c$ , pertanto un meridiano  $p$  può essere parametrizzato come segue

$$p(c) = v(\lambda_0, c) = (R \cdot \sin c \cdot \cos \lambda_0; R \cdot \sin c \cdot \sin \lambda_0; R \cdot \cos c) \quad (**)$$

Al fine di provare l'ortogonalità di un parallelo con un meridiano ci serviamo dei vettori tangenti a queste due curve in un loro punto di intersezione:

- il vettore tangente al meridiano si ottiene derivando la (\*)

$$m'(\lambda) = \frac{\mathcal{G}_v}{\mathcal{G}_\lambda} = (-R \cdot \sin c_0 \cdot \sin \lambda; R \cdot \sin c_0 \cdot \cos \lambda; 0)$$

- il vettore tangente al parallelo si ottiene derivando la (\*\*)

$$p'(c) = \frac{\mathcal{G}_v}{\mathcal{G}_c} = (R \cdot \cos c \cdot \cos \lambda_0; R \cdot \cos c \cdot \sin \lambda_0; -R \cdot \sin c)$$

Vogliamo dimostrare che il parallelo è perpendicolare al meridiano nel loro punto di intersezione  $A$ , pertanto dobbiamo verificare che il prodotto scalare dei vettori  $m'(\lambda_0)$  e  $p'(c_0)$  è nullo:

$$\begin{aligned} m'(\lambda_0) \cdot p'(c_0) &= (-R \cdot \sin c_0 \cdot \sin \lambda_0) \cdot (R \cdot \cos c_0 \cdot \cos \lambda_0) + (R \cdot \sin c_0 \cdot \cos \lambda_0) \cdot (R \cdot \cos c_0 \cdot \sin \lambda_0) + 0 = \\ &= -R^2 \cdot \sin c_0 \cdot \sin \lambda_0 \cdot \cos c_0 \cdot \cos \lambda_0 + R^2 \cdot \sin c_0 \cdot \sin \lambda_0 \cdot \cos c_0 \cdot \cos \lambda_0 = 0; \end{aligned}$$

pertanto, essendo nullo il prodotto scalare dei vettori tangenti è nullo nel punto di intersezione  $A(\lambda_0; c_0)$ , il vettore tangente al meridiano nel punto  $A$  è perpendicolare al vettore tangente al parallelo nello stesso punto  $A$ .

Concludiamo che un generico meridiano risulta perpendicolare a qualunque parallelo.

**NOTA.** In navigazione un qualunque punto  $A$  sulla superficie terrestre si indica con la coppia di coordinate geografiche, scrivendo una coppia ordinata di numeri di cui il primo è la latitudine, indicata con la lettera  $\varphi$  e il secondo è la longitudine indicata con la lettera  $\lambda$ :

$$A(\varphi, \lambda).$$

### OSSERVAZIONE.

L'ordine con cui si esprimono le coordinate geografiche in navigazione potrebbe ricondursi al fatto che la misurazione della latitudine è stata possibile con buona precisione molto prima della longitudine. Infatti, già nell'antichità, gli osservatori potevano determinare la loro latitudine misurando l'angolo tra l'orizzonte e la Stella Polare nell'emisfero nord, o altre stelle di riferimento nell'emisfero sud. Questo rendeva la latitudine un riferimento fondamentale per la navigazione.

Mentre la longitudine presentava una sfida molto più complessa, infatti richiedeva la conoscenza precisa della differenza di tempo tra il meridiano di riferimento (oggi il meridiano di Greenwich) e il

meridiano in cui ci si trovava. Solo con l'avvento di cronometri marini affidabili nel XVIII secolo, si è potuta determinare la longitudine con accuratezza in mare.

Ma la realtà è un'altra:

l'ordine (*latitudine, longitudine*) è una convenzione stabilita a livello internazionale da organizzazioni come l'*Organizzazione Idrografica Internazionale (IHO)* e l'*International Organization for Standardization (ISO)*. Questa standardizzazione facilita la comunicazione e lo scambio di informazioni geografiche tra diverse nazioni, discipline e sistemi di navigazione.

Inoltre, questa scelta, potrebbe essere dipesa dal fatto che la latitudine porge una un'informazione più generale sulla "zona" climatica e geografica in cui ci si trova (zona tropicale, temperata, polare, ...) e la longitudine successivamente porge la posizione all'interno di quella "zona".

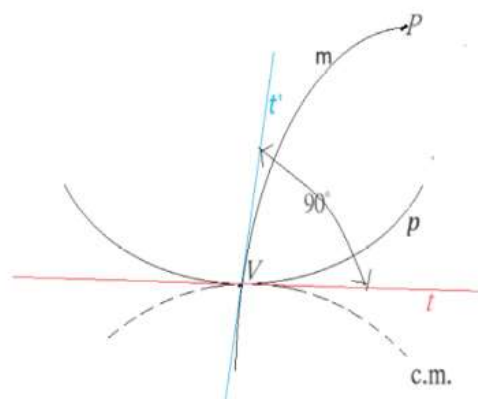
### **DIMOSTRAZIONE INTUITIVA PERPENDICOLARITÀ MERIDIANO-PARALLELO**

Ogni punto  $V$  della superficie sferica terrestre può essere considerato come vertice di un'ortodromia (arco di circolo massimo minore od uguale a  $180^\circ$ ) il cui piano è perpendicolare al piano del meridiano passante per  $V$ .

Il parallelo che passa per  $V$ , è ivi tangente al circolo massimo perché le due curve hanno la medesima retta tangente pertanto tale parallelo forma sempre angoli di  $90^\circ$  con il meridiano  $m$ ; infatti se due curve sono tangenti in un punto, in quel punto hanno la stessa retta tangente.

Il ragionamento è estensibile a tutti i paralleli e a tutti i meridiani.

La retta  $t$  tangente al circolo massimo c. m. e la retta  $t'$  tangente al meridiano  $m$ , passanti da  $V$  sono pertanto perpendicolari, ovvero formano tra loro quattro angoli retti.

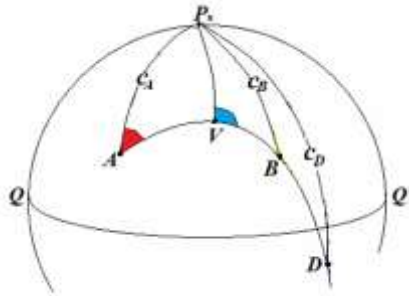


Del resto, in navigazione, le rotte Est ed Ovest, equivalenti rispettivamente alle rotte circolari  $90^\circ$  e  $270^\circ$ , stanno a significare che la nave naviga per parallelo e, se la latitudine è nulla, per equatore.

Desidero aggiungere, forse esagero, che l'angolo retto segnato in figura è l'angolo sferico formato da due archi di circolo massimo (per definizione di angolo sferico); si può dire che il meridiano cade perpendicolarmente sul parallelo  $p$  nel punto  $V$  proprio per il fatto che il c.m. ed il parallelo  $p$  hanno in quel punto la stessa retta tangente, anche se l'angolo fra il meridiano ed il parallelo non è un angolo sferico.

(\*) La definizione di colatitudine che riportano i libri di testo è: “la colatitudine è l’arco di meridiano compreso tra il punto di cui si vuole esprimere la posizione e il polo più prossimo”. Ma vi sono casi in cui questa definizione non è adattabile, per esempio in problemi di navigazione ortodromica, quando il punto di partenza e quello di arrivo sono in emisferi opposti.

In figura



- nel triangolo ortodromico  $AP_N B$  il punto di arrivo  $B$  è nello stesso emisfero del punto di partenza  $A$  e quindi la determinazione della colatitudine di  $B$  segue la precedente definizione  $c_B = 90^\circ - \varphi_B$ ;
- nel triangolo ortodromico  $AP_N D$  il punto di arrivo  $D$  è nell’emisfero opposto a quello del punto di partenza  $A$  e quindi la determinazione della colatitudine di  $D$  non segue la precedente definizione, ma è  $c_D = 90^\circ + \varphi_D$ .

Ed allora ecco perché la definizione abbisogna di una variazione che dipende dal nome del polo da cui si misura la colatitudine e nasce l’algebricità della formula:

$$c = 90^\circ - (\pm \varphi)$$

in cui si sceglie:

- il segno “+” se il polo di riferimento è omonimo alla latitudine di quel punto,
- il segno “-” se il polo di riferimento è eteronimo alla latitudine di quel punto.

**OSSERVAZIONE.** Questa seconda definizione giustifica la terza asserzione in fondo alla pagina 1.