

## PI GRECO: IL RE DEI NUMERI IRRAZIONALI IN SCENA!

### Perché è il “Re”?

- **Geometria:** è il fulcro di tutte le formule relative a cerchi, sfere, cilindri e altre forme curve.
- **Trigonometria:** fondamentale nelle funzioni seno e coseno, essenziali per descrivere onde, oscillazioni e fenomeni periodici.
- **Fisica:** compare in numerose leggi fisiche, dall'ottica alla meccanica quantistica.
- **Statistica:** appare nella distribuzione normale (la "curva a campana"), un concetto chiave in statistica.
- ...

La definizione di  $\pi$  come rapporto tra la lunghezza della circonferenza  $C$  e il suo diametro  $d$

$$\pi = \frac{C}{d}$$

è il risultato di un lungo percorso storico e di osservazioni matematiche che risalgono a migliaia di anni or sono.

- Già in civiltà antiche come quelle babilonesi ed egizie (intorno al 2000 a.C.), si era notato che, indipendentemente dalle dimensioni di un cerchio, il rapporto tra la sua circonferenza e il suo diametro era sempre un valore costante. I Babilonesi usarono approssimazioni come  $\frac{25}{8} = 3.125$ , mentre gli Egizi, come riportato nel Papiro di Rhind, arrivarono a circa 3.16. Anche nell'Antico Testamento si trovano accenni a questo rapporto, implicando il valore di 3. Queste erano osservazioni empiriche, basate su misurazioni pratiche.
- **Archimede di Siracusa** (III secolo a.C.) fu il primo a dare una dimostrazione utilizzando un metodo geometrico detto “*metodo di esaustione*” per calcolare un'approssimazione più precisa di  $\pi$ . Tale metodo si basa sull'idea di “stringere” il cerchio tra poligoni regolari, **inscritti** e **circoscritti**; cominciava da un esagono disegnandone uno inscritto e uno circoscritto alla circonferenza; calcolava il perimetro di entrambi i poligoni; il passaggio chiave del metodo di Archimede consisteva nel **raddoppiare ripetutamente il numero dei lati** dei poligoni: 12, 24, ... lati. Man mano che il numero dei lati dei poligoni aumenta, la loro forma si avvicina sempre di più a quella del cerchio, così che i perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti si avvicinano sempre di più alla lunghezza della circonferenza del cerchio, i primi per difetto e i secondi per eccesso. Poiché il rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro è  $\pi$ , Archimede poteva dedurre che il valore di  $\pi$  dovesse trovarsi tra il rapporto del perimetro del poligono inscritto con il diametro e il rapporto del perimetro del poligono circoscritto con il diametro. Attraverso calcoli geometrici complessi (non avendo a disposizione la trigonometria moderna o la notazione decimale), Archimede, utilizzando poligoni di **96 lati** ha trovato che  $\pi$  è compreso, con notazione decimale attuale, tra 3.1408 e 3.1429, un'approssimazione incredibilmente accurata per l'epoca.

**NOTA.** Il simbolo “ $\pi$ ” fu introdotto per la prima volta dal matematico gallese William Jones nel 1706 e reso popolare da Leonhard Euler nel 1748. La scelta di “ $\pi$ ” deriva dalla prima lettera della parola greca “perimetros” (περίμετρος), che significa “misura attorno” o “circonferenza”.

Da **Archimede** in poi, il numero  $\pi$  ha continuato a stimolare la curiosità e la ricerca di matematici e non solo.

**§1.** Esploriamo insieme alcuni dei modi più efficaci per presentare questa **affascinante costante universale**.

**(I) Formula di Leibniz**, nota anche come **serie di Gregory-Leibniz**.

Questa formula fu scoperta per la prima volta da **Madhava di Sangamagrama** nel XIV secolo, in India. Successivamente, nel XVII secolo, fu riscoperta indipendentemente da **James Gregory** e **Gottfried Wilhelm Leibniz**.

$$\pi = 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1};$$

vediamone la convergenza:

$$\pi \cong 4 \cdot \sum_{n=0}^{20} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} = 3.189184782$$

$$\pi \cong 4 \cdot \sum_{n=0}^{100} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} = 3.151493401$$

$$\pi \cong 4 \cdot \sum_{n=0}^{1000} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} = 3.142591654$$

$$\pi \cong 4 \cdot \sum_{n=0}^{10000} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} = 3.141692643$$

$$\pi \cong 4 \cdot \sum_{n=0}^{100000} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} = 3.141602653$$

$$\pi \cong 4 \cdot \sum_{n=0}^{1000000} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} = 3.141593653$$

**(II) Formula di matematico ignoto**

$$\pi \cong 3 + \frac{\sqrt{2}}{10}$$

che, pur non essendo una formula standard o riconosciuta universalmente per il calcolo di  $\pi$ , coincide col valore di  $\pi$  fino alla terza cifra decimale:  $\pi \cong 3.141421356$ .

**(III) Algoritmo di Gauss-Legendre o algoritmo di Brent-Salamin.**

**OSSERVAZIONE.** Questo algoritmo non è attribuibile a una singola persona come “inventore” in senso stretto, poiché si basa su principi matematici sviluppati nel tempo. Tuttavia, Richard Brent e Eugene Salamin hanno sviluppato in modo indipendente, nel 1975/76, questo algoritmo efficiente che utilizza la *media aritmetico-geometrica* per calcolare  $\pi$  con alta precisione e rapida convergenza.

Il calcolo del valore di  $\pi$ , approssimato a meno di  $\frac{1}{10^n}$ , ha il seguente procedimento:

si costruisce una successione numerica che abbia primo termine 0, secondo termine  $\frac{1}{2}$ , e nella quale i termini successivi sono ottenuti, alternativamente, calcolando la media aritmetica e la media geometrica dei due immediatamente precedenti. Si procede fino a che due termini consecutivi della successione hanno le prime  $n + 1$  cifre decimali uguali; il valore di  $\pi$  è uguale al reciproco del numero formato con le cifre uguali degli ultimi due numeri della successione. Tale algoritmo converge abbastanza velocemente tanto da potere determinare un valore esatto di  $\pi$ , spingendo la successione a 60 termini, fino alla quattordicesima cifra decimale.

È un algoritmo notevole per la sua **convergenza quadratica**, il che significa che, ad ogni iterazione, il numero di cifre decimali corrette di  $\pi$  raddoppia approssimativamente, rendendolo molto efficiente per calcolare  $\pi$  con alta precisione.

**(IV) Srinivasa Iyengar Ramanujan** (1887-1920), matematico indiano, bambino prodigio e autodidatta; il suo lavoro primario è dedicato alla teoria analitica dei numeri, tanto che è noto soprattutto per molte formule di sommatorie che concorrono a determinare certe costanti, come per esempio  $\pi$ .

**Ed ecco la serie di Ramanujan.**

È una serie che converge molto rapidamente al reciproco di  $\pi$ .

Essa definita come segue:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4 \cdot n)! \cdot (1103 + 26390n)}{(n!)^4 \cdot 396^{4n}}$$

La dimostrazione è piuttosto complessa e coinvolge l'uso delle funzioni ellittiche e delle funzioni gamma.

Ha indubbiamente un privilegio: converge molto rapidamente, pertanto si può ottenere un'approssimazione molto accurata di  $\frac{1}{\pi}$  utilizzando solo pochi termini della serie.

Mediante un software di matematica, confrontiamo i risultati del reciproco della serie, rispettivamente composta dai primi 5 termini e dai primi 9 termini, con il valore di  $\pi$  troncato all'ottantesima cifra decimale:

$$\frac{1}{9801} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot (4 \cdot n)! \cdot (1103 + 26390 \cdot n)}{n! \cdot 396^{4 \cdot n}} = 3.14159265358979323846264338327950288419766381813303062397616559099855310550750910$$

$$\frac{1}{9801} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8 \cdot (4 \cdot n)! \cdot (1103 + 26390 \cdot n)}{n! \cdot 396^{4 \cdot n}} = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781641071948509$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899$$

- nel primo caso il valore ottenuto dalla serie combacia fino alla trentanovesima cifra decimale di  $\pi$ ,
- nel secondo caso combacia fino alla settantesima cifra decimale.

La serie di Ramanujan è significativa per diversi motivi; elenchiamo i principali:

- è una delle serie convergenti più rapide conosciute,
- ha una connessione profonda con la teoria dei numeri e la geometria,
- è stata utilizzata per calcolare un numero record di cifre decimali di  $\pi$ .

## ((V)) FORMULA DI WALLIS

**Wallis John** (1616-1703), matematico, grammatico ed ecclesiastico. La più nota delle sue opere di genere matematico è “Arithmetica infinitorum”, dove si trovano originali metodi per misurare aree.

In essa si trova la regola di integrazione di  $x^n$ , ovvero  $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ .

Osservò anche che il quinto postulato di Euclide equivale all’affermazione che per ogni figura piana ne esiste una simile.

Nel 1655 scoprì una delle più originali e sorprendenti formule che producono  $\frac{\pi}{2}$  come un prodotto infinito; la forma compatta di questo prodotto infinito è:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot n^2}{4 \cdot n^2 - 1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot n}{2 \cdot n - 1} \cdot \frac{2 \cdot n}{2 \cdot n + 1}, \quad (*)$$

che sviluppato diventa:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \dots$$

Mediante un software matematico costruisco la seguente matrice

$n$	$\frac{4 \cdot n^2}{4 \cdot n^2 - 1}$	$\frac{2 \cdot n}{2 \cdot n - 1}$	$\frac{2 \cdot n}{2 \cdot n + 1}$
1	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{16}{15}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{5}$
3	$\frac{36}{35}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{7}$
4	$\frac{64}{63}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{9}$
5	$\frac{100}{99}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{11}$
6	$\frac{144}{143}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{12}{13}$
7	$\frac{196}{195}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{14}{15}$
8	$\frac{256}{255}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{16}{17}$
9	$\frac{324}{323}$	$\frac{18}{17}$	$\frac{18}{19}$
10	$\frac{400}{399}$	$\frac{20}{19}$	$\frac{20}{21}$
11	$\frac{484}{483}$	$\frac{22}{21}$	$\frac{22}{23}$
12	$\frac{576}{575}$	$\frac{24}{23}$	$\frac{24}{25}$

dalla quale si evince come Wallis abbia sviluppato il prodotto infinito che, all'aumentare del numero dei fattori converge a  $\frac{\pi}{2}$ : Wallis ha moltiplicato le coppie di fattori che compaiono nelle due ultime colonne della matrice.

Calcoliamo ora il prodotto, per esempio, dei primi cinque fattori della seconda colonna: otteniamo il seguente valore approssimato di  $\frac{\pi}{2}$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdot \frac{100}{99} = \frac{65536}{43659} = 1.501087977$$

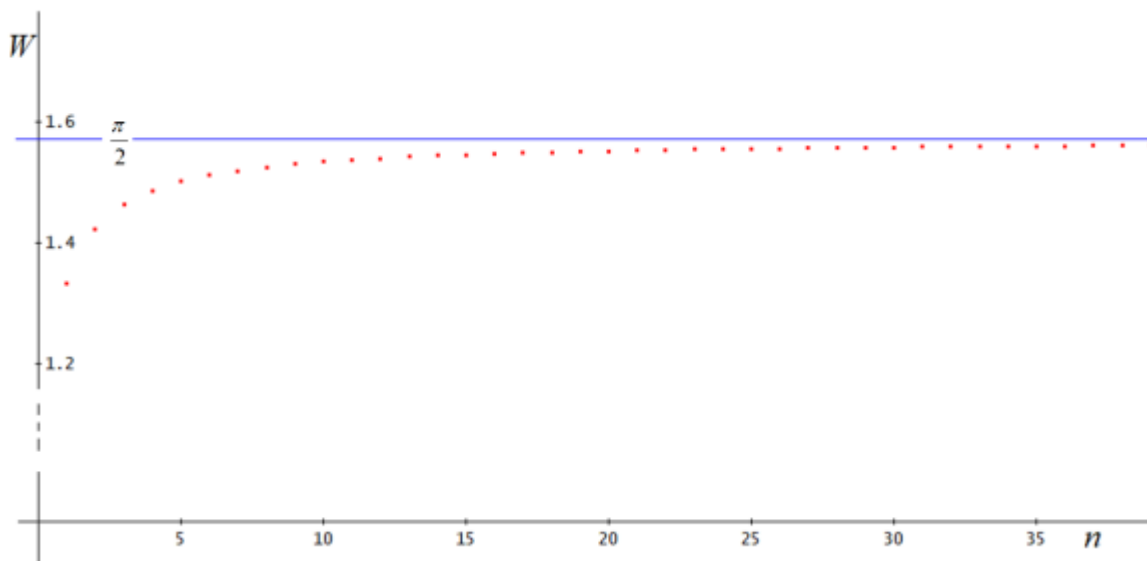
moltiplichiamolo per 2 e otterremo un valore approssimato di  $\pi$ :

$$2 \cdot 1.501087977 = 3.002175954$$

Mediante il programma

$$\text{VECTOR} \left( n, \prod_{n=1}^n \frac{4 \cdot n^2}{4 \cdot n^2 - 1}, n, 1, 39 \right)$$

in esecuzione (che non riportiamo) otteniamo le coordinate di 39 punti che riportiamo sul seguente piano cartesiano



dal quale si può osservare la convergenza della serie verso il numero  $\frac{\pi}{2}$ .

### OSSERVAZIONE.

La dimostrazione della formula di Wallis è piuttosto complessa e coinvolge concetti di analisi matematica avanzata, comunque ecco un'idea generale del processo:

1. iniziò studiando gli integrali della forma  $\int \sin^n x \cdot dx$ , dove  $n$  è un intero non negativo;
2. trovò una relazione di ricorrenza tra questi integrali, che gli permise di esprimerli in termini di integrali con valori di  $n$  più piccoli;
3. utilizzando questa relazione di ricorrenza e prendendo il limite per  $n$  tendente all'infinito, riuscì a ottenere l'espressione per  $\frac{\pi}{2}$ .

Ed ecco alcune originalità di questa formula:

- esprime  $\frac{\pi}{2}$  come un prodotto infinito di frazioni, metodo inconsueto su altri procedimenti per rappresentare  $\pi$ ;
- la sua derivazione dagli integrali rivela una connessione profonda tra  $\pi$  e il calcolo integrale;
- nonostante la sua complessità concettuale, questa formula ha una forma relativamente semplice e elegante;
- stabilisce un collegamento tra  $\pi$  e i numeri interi, dimostrando ancora una volta la grande interconnessione della matematica.

L'unico handicap: nonostante la sua eleganza questa formula converge lentamente, pertanto occorrono molti termini per ottenere un'approssimazione sempre più prossima a  $\frac{\pi}{2}$  e quindi non è uno dei metodi più efficienti.

**((VI)) Formula di Gregory-Leibniz che è un caso speciale di una serie di Taylor per la funzione “seno inverso”.**

Innanzitutto, riconosciamo che  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ , infatti è  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

quindi è:

$$\pi = 4 \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Ora, consideriamo l'espansione in serie di Taylor della funzione  $\arcsin x$ :

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots,$$

serie che converge per  $|x| \leq 1$ .

Sostituiamo  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7}{7} + \dots$$

Dopo aver calcolato le potenze di  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  e aver semplificato le frazioni e dopo qualche passaggio algebrico, si ottiene:

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

da cui

$$\pi = 4 \cdot \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \right)$$

che scriviamo sinteticamente

$$\pi = 4 \cdot \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1}$$

**Mediante un software, otteniamo:**

k	$\frac{1}{2 \cdot k - 1} \cdot (-1)^{k+1}$	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \cdot k - 1} \cdot (-1)^{k+1}$	$4 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \cdot k - 1} \cdot (-1)^{k+1}$
2	$-\frac{1}{3}$	0.6666666666	2.666666666
3	$\frac{1}{5}$	0.8666666666	3.466666666
4	$-\frac{1}{7}$	0.7238095238	2.895238095
5	$\frac{1}{9}$	0.8349206349	3.339682539
6	$-\frac{1}{11}$	0.744011544	2.976046176
7	$\frac{1}{13}$	0.8209346209	3.283738483
8	$-\frac{1}{15}$	0.7542679542	3.017071817
9	$\frac{1}{17}$	0.8130914836	3.252365934
10	$-\frac{1}{19}$	0.7604599047	3.041839618
11	$\frac{1}{21}$	0.8080789523	3.232315809

VERIFICA sull'ultimo elemento dalla quarta colonna:

$$4 \cdot \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \right) = 4 \cdot \frac{11757173}{14549535} = 4 \cdot 0.8080789523 = 3.232315809$$

## §2. SVELARE $\pi$ : UN VIAGGIO TRA LE ESPRESSIONI MATEMATICHE.

### (I) UN RAPPORTO CHE PRODUCE $\pi$ .

$$\pi = \frac{\ln(-1)}{\sqrt{-1}}. \quad (*)$$

### DIMOSTRAZIONE

L'equazione di Eulero è una delle più importanti in matematica, e mette in relazione le funzioni goniometriche con la funzione esponenziale complessa:

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x \quad (1)$$

dove:

- $e$  è la base del logaritmo naturale,
- $i$  è l'unità immaginaria ( $i^2 = -1$ ),
- $x$  è un numero reale.

Se sostituiamo  $x$  con  $\pi$  nella (1) otteniamo:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \cdot \sin \pi$$

ovvero

$$e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0 \Rightarrow e^{i\pi} = -1. \quad (2)$$

Applichiamo il logaritmo naturale ad ambo i membri dell'equazione (2):

$$\ln(e^{i\pi}) = \ln(-1)$$

e, per una nota proprietà dei logaritmi, è:

$$i \cdot \pi \cdot \ln e = \ln(-1),$$

da cui

$$i \cdot \pi = \ln(-1). \quad (3)$$

Sostituendo al numeratore del secondo membro della (\*) il primo membro della (3) e ricordando che è  $\sqrt{-1} = i$ , è:

$$\pi = \frac{i \cdot \pi}{i}$$

che è l'identità che volevamo dimostrare:  $\pi = \pi$ .

■ Con un computer, implemento l'espressione

$$\frac{\text{LN}(-1)}{(-1)^{1/2}}$$

In esecuzione, cliccando:

- il tasto "=", risulta:

$$\pi$$

- il tasto "≈", per default risulta:

$$3.141592653$$

- la specifica "approssima alla ventesima cifra", risulta

$$3.1415926535897932384$$

## ((II)) UN ALTRO RAPPORTO

$$\pi = \frac{2 \cdot \ln i}{i}.$$

### DIMOSTRAZIONE

Il numero complesso

$$i = 0 + 1 \cdot i \quad (*)$$

ha:

- modulo:  $r = 1$  ;
- anomalia:  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ .

Passiamo, nella (\*), ai logaritmi neperiani:

$$\ln i = \ln 1 + \frac{\pi}{2} \cdot i \Rightarrow \ln i = 0 + \frac{\pi}{2} \cdot i \Rightarrow \ln i = \frac{\pi}{2} \cdot i$$

divido per  $i$  e moltiplico per 2 ambo i membri:

$$2 \cdot \frac{\ln i}{i} = 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cdot i}{i} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot i}{2} \cdot \frac{1}{i} = \pi.$$

**ED ECCO UN ALTRO MODO PER VERIFICARE LE DUE PRECEDENTI ESPRESSIONI CHE PRODUCONO  $\pi$ , OVVERO UGUAGLIANDOLE.**

$$2 \cdot \frac{\ln i}{i} = \frac{\ln(-1)}{\sqrt{-1}}.$$

**Primo membro dell'equazione  $2 \cdot \frac{\ln i}{i}$ :**

Il logaritmo naturale di un numero complesso  $a + i \cdot b$  può essere espresso da:

$$\ln \rho + i \cdot \vartheta$$

nella quale  $\rho$  è il modulo del numero e  $\vartheta$  è il suo argomento.

Nel caso del numero complesso  $i$ , il modulo è 1 e l'argomento è  $\frac{\pi}{2}$ , pertanto

$$\ln i = \ln 1 + i \cdot \frac{\pi}{2} = i \cdot \frac{\pi}{2};$$

ed allora il primo membro diventa:

$$2 \cdot \frac{\ln i}{i} = 2 \cdot \frac{i \cdot \frac{\pi}{2}}{i} = \pi$$

**Secondo membro dell'equazione  $\frac{\ln(-1)}{\sqrt{-1}}$ :**

Il numero complesso  $-1$  ha modulo uguale a 1 e argomento uguale a  $\pi$ , pertanto:

$$\ln(-1) = \ln 1 + i \cdot \pi = i \cdot \pi$$

ed allora il secondo membro diventa:

$$\frac{\ln(-1)}{\sqrt{-1}} = \frac{i \cdot \pi}{i} = \pi$$

## CONCLUSIONE

Poiché entrambe le parti dell'equazione sono uguali a  $\pi$ , l'uguaglianza è dimostrata.

## §3. INTEGRALI CHE PRODUCONO $\pi$ .

$$(I) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

### DIMOSTRAZIONE

Pongo  $x = \sin \vartheta$  da cui è  $dx = \cos \vartheta \cdot d\vartheta$  e quindi i limiti di integrazione sono:

- per  $x = 0$ , allora è  $\sin \vartheta = 0$  e quindi  $\vartheta = 0$ ,
- per  $x = 1$ , allora è  $\sin \vartheta = 1$  e quindi  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ .

E l'integrale 1. diventa:

$$\int_0^1 \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta}} \cdot d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{\cos^2 \vartheta}} \cdot d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \vartheta}{|\cos \vartheta|} \cdot d\vartheta;$$

essendo  $\cos \vartheta$  positivo nell'intervallo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , posso scrivere:

$$\int_0^1 \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta} \cdot d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot d\vartheta = \vartheta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Rimane il dubbio per  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ , ma considerato che la funzione integranda è continua nell'intervallo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  posso estendere la continuità in  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  definendola come 1.

Oppure considerando il limite:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta} = \lim_{\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 = 1.$$

### ► Ora desidero operare più razionalmente

L'integrale  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  è un integrale improprio poiché la funzione integranda tende all'infinito quando  $x$  si avvicina a 1 da sinistra.

Pertanto, dobbiamo calcolare il limite dell'integrale quando il limite superiore di integrazione tende a 1.

L'integrale indefinito è:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

e l'integrale definito è

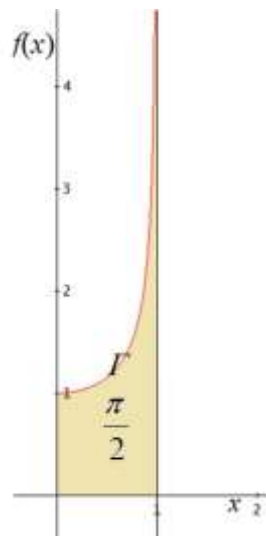
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) \Big|_0^1$$

Calcolo il limite quando il limite superiore di integrazione tende a 1:

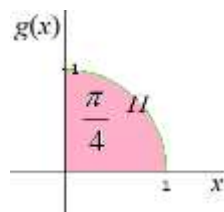
$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \arcsin x \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow 1^-} (\arcsin t - \arcsin 0) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \arcsin t - 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2};$$

**Spiegazione aggiuntiva.**

Questo integrale rappresenta l'area compresa tra la curva  $\Gamma$ , grafico della funzione  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  e l'asse delle ascisse nell'intervallo  $[0; x \rightarrow 1^-[$



Inoltre l'area sotto la curva della funzione  $\Gamma$  nell'intervallo  $[0; x \rightarrow 1^-[$ , è collegata alla geometria del cerchio unitario; infatti la funzione  $g$ , reciproca della  $f$ , nell'intervallo  $[0; 1]$ , è l'arco  $II$  di circonferenza, appartenente al primo quadrante, avente raggio unitario; tale arco sottende sull'asse delle ascisse l'area pari a  $\frac{\pi}{4}$ .



**(II)**  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

**DIMOSTRAZIONE**

La funzione integranda è la derivata della funzione  $\arctan(x)$ , pertanto è:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + c$$

Applichiamo i limiti di integrazione 0 e 1 alla funzione arcotangente:

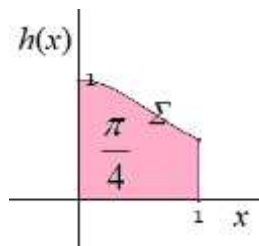
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0)$$

- $\arctan(1)$  è l'angolo la cui tangente è 1. Questo angolo è  $\frac{\pi}{4}$ .
- $\arctan(0)$  è l'angolo la cui tangente è 0. Questo angolo è 0.

Sostituiamo i valori dell'arcotangente nell'espressione  $\arctan(1) - \arctan(0)$ :

$$\arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Questo integrale rappresenta l'area compresa tra la curva  $\Sigma$ , grafico della funzione  $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$  e l'asse delle ascisse nell'intervallo  $[0; 1]$ :



area che coincide con quella determinata dall'arco  $P$ , nello stesso intervallo.

$$\text{(III)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx = \sqrt{\pi}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

La funzione integranda  $f(x) = e^{-x^2}$  è una funzione pari, infatti è:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$

e quindi possiamo scrivere

$$2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx = \sqrt{\pi},$$

pertanto dobbiamo dimostrare:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Quadrriamo l'integrale a primo membro di questa ultima identità.

$$\left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot dx \right)^2 \quad (*)$$

che possiamo scrivere

$$\left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot dx \right) \cdot \left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot dx \right),$$

e, per potere combinare i due integrali usiamo due variabili  $x$  e  $y$ :

$$\left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot dx \right) \cdot \left( \int_0^{\infty} e^{-y^2} \cdot dy \right),$$

tal da poterlo scrivere:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \cdot dy; \quad (**)$$

mediante le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \vartheta \\ y = \rho \cdot \sin \vartheta \end{cases}$$

otteniamo

- $x^2 + y^2 = \rho^2 \cdot (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = \rho^2$
- essendo il primo quadrante la regione di integrazione, è  
 $0 \leq \rho < \infty$  e  $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Così l'integrale (\*\*) si trasforma nella forma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \cdot d\rho \right) \cdot d\vartheta \quad ;$$

considero l'integrale interno

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho$$

in cui pongo  $v = \rho^2$ , da cui è

$$dv = 2 \cdot \rho \cdot d\rho \quad \Rightarrow \quad \rho \cdot d\rho = \frac{dv}{2},$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho &= \int_0^{\infty} e^{-v} \cdot \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-v} \cdot dv = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( -e^{-v} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot (0 - (-1)) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

così l'integrale esterno diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot d\vartheta = \frac{1}{2} \cdot \vartheta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4};$$

ma, questo è il quadrato (\*), pertanto, è:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

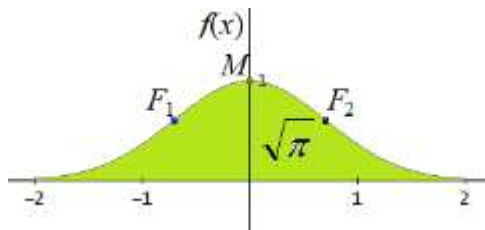
così, infine è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

La rappresentazione grafica risulta facile ... si determinano i limiti ed i punti caratteristici della curva:

- asintoto orizzontale di equazione  $y = 0$ ,
- massimo assoluto  $M(0;1)$ ,
- flessi  $F_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; e^{-\frac{1}{2}}\right)$ ,  $F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; e^{-\frac{1}{2}}\right)$

Ed ecco il grafico



$$\text{(IV)} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \cdot dt = \frac{\pi}{2}$$

**DIMOSTRAZIONE.**

Mi avvalgo della trasformata di Laplace.

La trasformata di Laplace di una funzione  $f$ , nella variabile  $t$ , è definita come:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt$$

che applichiamo alla funzione  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{\sin t}{t} \cdot dt \quad (1)$$

deriviamo la (1):

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{\sin t}{t} \cdot dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} \left( e^{-st} \cdot \frac{\sin t}{t} \right) \cdot dt = \int_0^{\infty} -t \cdot e^{-st} \cdot \frac{\sin t}{t} \cdot dt = \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \sin t \cdot dt = - \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \sin t \cdot dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Calcoliamo per parti l'integrale  $\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \sin t \cdot dt$ , ovvero con l'espressione  $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ , scegliendo:

$$u = \sin t \quad \Rightarrow \quad du = \cos t \cdot dt$$

$$dv = e^{-st} \cdot dt \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{e^{-st}}{s},$$

e otteniamo

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \sin t \cdot dt = \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \cdot \sin t \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \cos t \cdot dt ; \quad (3)$$

calcoliamo l'espressione in parentesi quadra nei due limiti:

- $-\frac{e^{-s \cdot 0}}{s} \cdot \sin 0 = 0$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{e^{-st}}{s} \cdot \sin t \right) = -\frac{e^{-s \cdot \infty}}{s} \cdot \sin \infty = 0$ , infatti per  $s > 0$ , è  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$

Allora prendiamo l'integrale

$$\frac{1}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \cos t \cdot dt$$

che calcoliamo ancora per parti, scegliendo:

$$u = \cos t \quad \Rightarrow \quad du = -\sin t \cdot dt$$

$$dv = e^{-s \cdot t} \cdot dt \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{e^{-s \cdot t}}{s}$$

e otteniamo

$$\frac{1}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \cos t \cdot dt = \frac{1}{s} \cdot \left( \left[ -\frac{e^{-s \cdot t}}{s} \cdot \cos t \right]_0^{\infty} - \frac{1}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \sin t \cdot dt \right)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \cos t \cdot dt = \left[ -\frac{e^{-s \cdot t}}{s} \cdot \cos t \right]_0^{\infty} - \frac{1}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \sin t \cdot dt$$

vediamo l'espressione in parentesi quadra nei due limiti:

- $-\frac{e^{-0}}{s} \cdot \cos 0 = -\frac{1}{s} \cdot 1 = -\frac{1}{s}$ ,
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{e^{-s \cdot t}}{s} \cdot \cos t \right) = 0$

quindi sostituiamo il risultato ottenuto nella (3)

$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \sin t \cdot dt = \frac{1}{s} \cdot \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \sin t \cdot dt \right);$$

$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \sin t \cdot dt = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \sin t \cdot dt$$

per comodità, pongo  $\int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \cos t \cdot dt = \mathfrak{I}$ ; allora, è:

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} \cdot \mathfrak{I} \quad \Rightarrow \quad s^2 \cdot \mathfrak{I} = 1 - \mathfrak{I} \quad \Rightarrow \quad (s^2 + 1) \cdot \mathfrak{I} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{I} = \frac{1}{s^2 + 1};$$

quindi, è:

$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \sin t \cdot dt = \frac{1}{s^2 + 1};$$

allora la (2) diventa:

$$F'(s) = -\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \sin t \cdot dt = -\frac{1}{s^2 + 1};$$

così posso integrare  $F'(s)$ :

$$F(s) = -\int \frac{1}{s^2 + 1} \cdot ds = -\arctan s + c \quad (4)$$

calcoliamo il limite di  $F(s)$  per  $s$  tendente ad infinito:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt = 0,$$

infatti l'esponenziale tende a 0 per  $s$  che tende ad infinito, pertanto la (4) diventa:

$$0 = -\frac{\pi}{2} + c$$

da cui

$$c = \frac{\pi}{2}.$$

In definitiva, è:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \cdot dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{e quindi} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \cdot dt = \pi.$$

► Interessiamoci della funzione  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ .

La funzione  $f$  è definita in tutto il campo dei reali ad esclusione dello zero; pertanto determiniamo il limite sinistro e destro per  $t$  tendente a 0:

- $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\cos t}{1} = 1,$
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos t}{1} = 1;$

ebbene, la funzione non esiste in  $t = 0$ , ma in 0 vi è un punto di discontinuità di terza specie e quindi eliminabile, così che la funzione può essere considerata continua in tutto  $R$ , se si crea la nuova funzione:

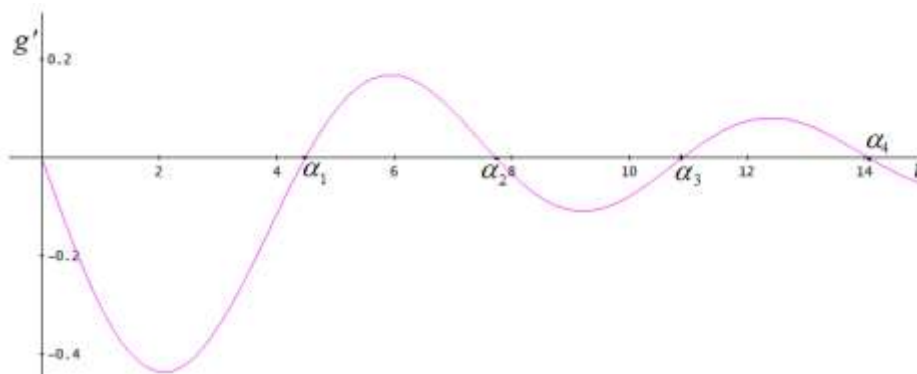
$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t = 0 \\ \frac{\sin t}{t} & \text{per } t \neq 0 \end{cases};$$

in sintesi, immaginiamo che il grafico di una funzione abbia un "buco" in un punto. Se le due parti del grafico si avvicinano allo stesso valore in quel punto, possiamo "riempire" quel buco assegnando quel valore alla funzione in quel punto.

Consideriamo la funzione  $g$  per  $t \geq 0$  e deriviamola:

$$\frac{d}{dt} \frac{\sin t}{t} = \frac{\cos t}{t} - \frac{\sin t}{t^2}$$

la cui rappresentazione sul piano cartesiano è:



dal quale si possono individuare, al di fuori di  $t = 0$ , opportuni intervalli di separazione degli zeri, per determinare con un metodo delle successive approssimazioni, le ascisse degli zeri di  $g'$ .

$$\frac{\cos t}{t} - \frac{\sin t}{t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \cos t - \sin t = 0$$

Utilizzo il metodo di bisezione nel software Derive6.1 costruendo due opportuni programmi:

- il primo, preso un intervallo di separazione dello zero scelto, determina il numero di passi da eseguire in funzione dell'errore massimo stabilito:

```

εBISEZIONI(a, b, ε) :=
  If a ≤ b
    ["con"; CEILING(LOG((b - a)/ε, 2)); "bisezioni"; "si ottiene la soluzione"; "con l'approssimazione
  desiderata"]
  
```

- il secondo consente di determinare il valore dello zero, con un errore minore di quello precedentemente stabilito:

```

BISEZIONE(f, t, a, b, n) :=
  If a ≤ b
    [["numero di dimezzamenti e valore medio di ciascuno di essi", ITERATES([ELEMENT(v, 1) + 1,
  ELEMENT(v, 2) + (b - a)·IF(LIM(f, t, ELEMENT(v, 2))·LIM(f, t, ELEMENT(v, 2) + (b - a)/2^(ELEMENT(v, 1) +
  1)) > 0, 1, 0, 0)/2^(ELEMENT(v, 1) + 1)], v, [0, a], n) + (b - a)·VECTOR([0, 1/2^i], i, n + 1), "errore
  ennesima bisezione ≤", VECTOR((b - a)/2^i, i, 0, n)]]'
  
```

Applichiamo i due programmi per determinare il valore approssimato di  $\alpha_1$ , scegliendo ad esempio l'intervallo [4;5]:

• `εBISEZIONI(4, 5, 0.01)`

che in esecuzione porge

```

con
7
bisezioni
si ottiene la soluzione
con l'approssimazione desiderata
    
```

• `BISEZIONE(x·COS(x) - SIN(x), x, 4, 5, 7)`

che in esecuzione porge

```

numero di dimezzamenti e valore medio di ciascuno di essi
[ 0  1  2  3  4  5  6  7 ]
[ 4.5 4.25 4.375 4.4375 4.46875 4.484375 4.4921875 4.49609375 ]
errore ennesima bisezione ≤
[1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125, 0.015625, 0.0078125]
    
```

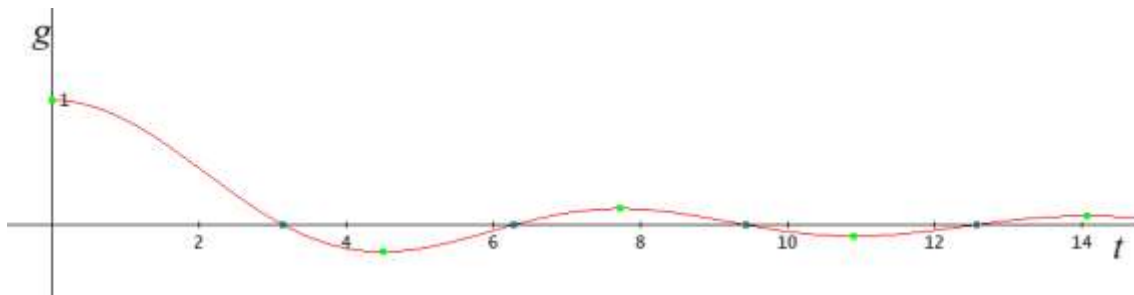
Lo zero approssimato è il numero nel riquadro di colore rosso, pertanto si ottengono, sostituendo questo valore nella funzione  $g$ , le coordinate approssimate dell'estremante di ascissa  $\alpha_1$ :

$$\frac{\sin 4.49609375}{4.49609375} \approx -0.2172328458$$

e l'estremante ricercato, che è un minimo relativo ha coordinate:

`[4.49609375, -0.2172328458]`

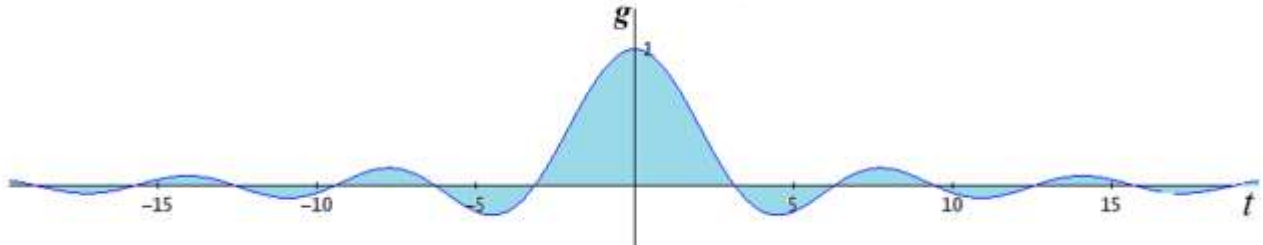
Il grafico è



nella cui finestra abbiamo rappresentato le intersezioni della curva con l'asse delle ordinate ed oltre al punto di massimo assoluto (0;1), gli estremanti riportate nella matrice

$$\begin{bmatrix} 4.49609375 & -0.2172328458 \\ 7.7265625 & 0.1283744432 \\ 10.8984375 & -0.09132372697 \\ 14.0703125 & 0.07091285812 \end{bmatrix}$$

Concludiamo riportando il grafico della funzione  $g(x) = \frac{\sin t}{t}$  nel suo intero dominio



L'area della somma delle infinite "lunole" risulta uguale a  $\pi$ .

#### §4. "PI GRECO" EMERGE DAL CAOS: APPROCCI PROBABILISTICI SORPRENDENTI

**(I)** Il problema **dell'ago di Buffon** è un famoso problema di probabilità formulato dal naturalista francese Georges-Louis Leclerc, Conte di Buffon, nel XVIII secolo. Il problema è il seguente:

*Immagina di avere un pavimento di legno con assi parallele, tutte della stessa larghezza. Se lasciamo cadere a caso un ago sul pavimento, qual è la probabilità che l'ago attraversi una delle linee tra le assi?*

La risposta a questa domanda è sorprendente: la probabilità dipende dal rapporto tra la lunghezza dell'ago e la larghezza delle assi, e coinvolge il numero  $\pi$ .

Se la lunghezza dell'ago è  $l$  e la distanza tra le linee è  $t$ , allora la probabilità  $P$  che l'ago intersechi una linea è data dalla relazione:

$$P = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot t}$$

Da questa relazione possiamo anche ricavare un metodo per approssimare il valore di  $\pi$ :

$$\pi = \frac{2 \cdot l}{P \cdot t} \quad (*)$$

#### ESEMPIO.

Immaginiamo di avere un pavimento con assi larghe 10 cm e un ago lungo 5 cm. Lanciamo l'ago a caso sul pavimento per 100 volte e osserviamo che l'ago attraversa una linea 32 volte.

- Lunghezza dell'ago:  $l = 5 \text{ cm}$
- Distanza tra le linee:  $t = 10 \text{ cm}$
- Numero di lanci:  $n = 100$
- Numero di intersezioni  $i = 32$

La probabilità sperimentale di intersezione è:

$$P = \frac{i}{n} = \frac{32}{100} = 0.32.$$

Utilizzando l'espressione per approssimare  $\pi$ , ovvero la (\*). otteniamo:

$$\pi = \frac{2 \cdot l}{P \cdot t} = \frac{2 \cdot 5}{0.32 \cdot 10} = \frac{10}{3.2} = 3.125$$

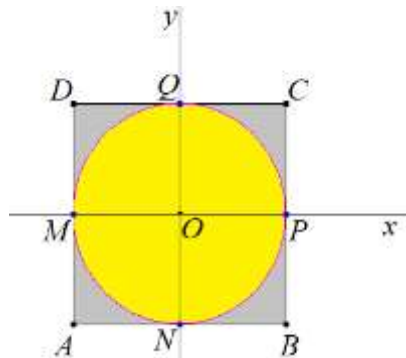
Questo è un valore numerico che approssima il valore di  $\pi$ . Più lanci eseguiamo, più precisa sarà l'approssimazione.

## **((II)) APPROSSIMAZIONE DI $\pi$ COL METODO “MONTE CARLO”.**

Questo metodo è basato sulla simulazione di un grande numero di eventi casuali, usando la frequenza di un certo risultato per stimare una probabilità che coinvolge  $\pi$ .

Ci serviamo del piano cartesiano sul quale rappresentiamo:

- il quadrato avente vertici  $A(-1;-1)$ ,  $B(1;-1)$ ,  $C(1;1)$ ,  $D(-1;1)$ ,
- il cerchio inscritto nel quadrato avente centro nell'origine degli assi cartesiani



Rileviamo:

- il lato del quadrato ha lunghezza di due unità lineari  $2u$  e quindi l'area del quadrato è  $4u^2$ ;
- l'area del cerchio inscritto, avente raggio  $1u$ , ha area  $\pi \cdot (1u)^2 = \pi u^2$ .

Ora simuliamo un ipotetico lancio di “*dardi puntiformi*” (punti casuali) all'interno del quadrato; ogni dardo lanciato colpisce, in modo casuale, una “posizione puntiforme”  $(x; y)$  all'interno del quadrato, ovvero nello spazio individuato da  $-1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1$ .

La domanda che ci poniamo è: quando il dardo colpisce un punto appartenente al cerchio? La risposta sta nell'equazione della circonferenza, perimetro del cerchio, che avendo centro nell'origine degli assi e raggio unitario, ha equazione  $x^2 + y^2 = 1$ , pertanto un dardo puntiforme cade in un punto  $(x; y)$  del cerchio quando si verifica  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Supposto di lanciare un numero grande di dardi, allora è:

$$\frac{\text{numero di dardi caduti dentro al cerchio}}{\text{numero totale di dardi lanciati}} \approx \frac{\text{area del cerchio}}{\text{area del quadrato}} \quad (1)$$

Sostituiamo nella (1) le espressioni delle aree e otteniamo

$$\frac{\text{numero di dardi caduti dentro al cerchio}}{\text{numero totale di dardi lanciati}} \approx \frac{\pi u^2}{4u^2} = \frac{\pi}{4};$$

quindi l'approssimazione di *pi greco* è:

$$\pi \approx 4 \cdot \frac{\text{numero di dardi caduti dentro al cerchio}}{\text{numero totale di dardi lanciati}}$$

Questo problema rientra perfettamente nel metodo Monte Carlo, essendo tale metodo una tecnica computazionale che si basa sulla generazione di numeri casuali per risolvere problemi che, in generale, sono difficili o impossibili da risolvere analiticamente.

In questo caso specifico, l'idea di "lanciare dardi puntiformi" in modo casuale all'interno del quadrato e contare quanti cadono nel cerchio è l'essenza del metodo Monte Carlo per stimare la probabilità. Se si eseguissero molti lanci di dardi (10'000;100'000;1'000'000;...) la proporzione di dardi che cadono nel cerchio rispetto al numero totale di dardi lanciati si avvicinerebbe al valore teorico di  $\frac{\pi}{4}$ , da cui stimare il valore di  $\pi$ .

### ESEMPIO.

Supponiamo che il lancio di "dardi puntiformi" (punti casuali) all'interno del quadrato sia stata pari a 10'000. Bisogna contare i successi, ovvero quanti dardi sono caduti nel cerchio  $x^2 + y^2 \leq 1$ ; per esempio:

- punto1: (-1;0)  $\Rightarrow (-1)^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1 \Rightarrow \text{punto1} \in \text{cerchio}$
- punto2: (0.4; -0.5)  $\Rightarrow 0.4^2 + (-0.5)^2 = 0.16 + 0.25 = 0.41 \Rightarrow \text{punto2} \in \text{cerchio}$
- punto3: (0.8; -0.9)  $\Rightarrow 0.8^2 + (-0.9)^2 = 0.64 + 0.81 = 1.45 \Rightarrow \text{punto3} \notin \text{cerchio}$
- ...

Dai conteggi eseguiti, supponiamo che i dardi caduti nel cerchio siano 7'837 ed allora è:

$$\pi \approx 4 \cdot \frac{\text{numero di dardi caduti dentro al cerchio}}{\text{numero totale di dardi lanciati}} = 4 \cdot \frac{7852}{10000} = 4 \cdot 0.7852 = 3.1408$$

valore che combacia con quello di  $\pi$  fino alla seconda cifra decimale.

Rileviamo che la stima è abbastanza vicina al valore reale; allora se avessimo lanciato ancora più dardi puntiformi (100'000;1'000'000;...) la stima sarebbe stata più precisa.

In definitiva questo esempio dimostra come il metodo "Monte Carlo" utilizzi la **casualità** per campionare un'area e, contando i successi (l'insieme dei punti all'interno della zona desiderata), giungere ad una buona stima della sua dimensione.

## OSSERVAZIONE.

Quando si lanciano casualmente dei dardi su un quadrato con un cerchio inscritto, e poi si ripete l'operazione, **il numero di dardi che cadono nel cerchio generalmente cambia.**

La ragione principale è la **casualità**. Ogni singolo lancio di un dardo è un **evento indipendente**. Anche se la probabilità teorica che un dardo cada nel cerchio è fissa (determinata dal rapporto tra l'area del cerchio e l'area del quadrato), il risultato effettivo di un numero finito di lanci che cadono sul cerchio può variare, infatti ogni volta che si ripete l'esperimento, si genera un nuovo set di eventi casuali; anche se le condizioni sono identiche, le posizioni esatte di ogni singolo dardo saranno diverse, portando a un numero leggermente diverso di dardi che cadono nel cerchio.

Ho ipotizzato di lanciare 10.000 dardi, che è un numero grande, ma non infinito. La **legge dei grandi numeri** ci dice che all'aumentare del numero di tentativi la frequenza relativa di un evento (in questo caso, un dardo che cade nel cerchio) si avvicinerà sempre di più alla sua probabilità teorica.

Nell' esempio, 7852 dardi su 10000 corrispondono a una frequenza di 0.7852, da cui risulta  $\pi \approx 4 \cdot 0.7852 = 3.1408$ . Sappiamo che il valore teorico di  $\pi$ , troncato alla quarta cifra decimale è 3.1415, pertanto il valore trovato coincide con quello di  $\pi$  sino alla seconda cifra decimale ... abbastanza vicino, ma piccole deviazioni sono previste a causa della natura casuale del processo.

## SULLE FUNZIONI ESPONENZIALI

La funzione

$$f(x) = e^{-a(x-b)^2} + c \quad (1)$$

nella quale  $a \in R^+ \wedge b \in R \wedge c \in R$ , ha per grafico una curva a forma di campana, ed in particolare:

- $a$  porge la più o meno dilatazione della campana,
- $b$  esprime la simmetria della curva rispetto alla retta di equazione  $x = b$ ,
- $c$  porge la traslazione in ordinata della curva al suo variare.

### DOMINIO E CODOMINIO DELLA $f$ .

- Il dominio è immediato; la funzione esiste per qualunque valore reale della variabile indipendente, perciò è  $(-\infty, +\infty)$ ,
- Il codominio non è molto immediato, ed ecco la strategia:  
essendo  $(x-b)^2 \geq 0 \wedge a \in R^+$ , risulta  $-a \cdot (x-b)^2 \leq 0$ .

Posto  $-a \cdot (x-b)^2 = v$ , risulta  $v \leq 0$ .

Considero ora la funzione esponenziale  $e^v$  che è sempre positiva, ovvero è:

$$e^v > 0$$

da cui:

$$\blacksquare \quad \text{se } |x-b| \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad v \rightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad e^v \rightarrow 0$$

$$\blacksquare \quad \text{se } v = 0 \quad \Rightarrow \quad e^v = e^0 = 1;$$

così è:

$$0 < e^{-a(x-b)^2} \leq 1 \quad (*)$$

addizioniamo  $c$  a tutti i termini della (\*)

$$0 + c < e^{-a(x-b)^2} + c \leq 1 + c$$

da cui

$$c < f(x) \leq 1 + c$$

che è il codominio cercato.

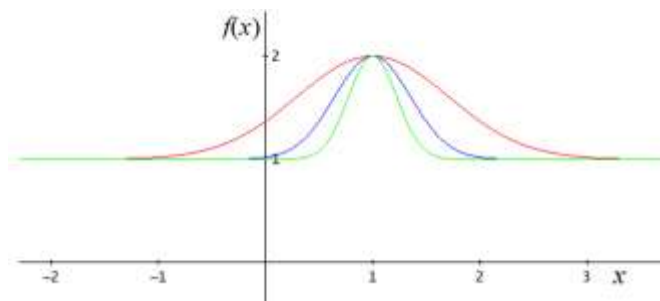
Passiamo ora all'ambiente grafico del piano cartesiano per visualizzare la curva, che è il **grafico dell'equazione (1)**. Per semplificare l'analisi, considereremo a rotazione un solo parametro variabile, impostando gli altri due a **unità** (per pura scelta).

► Caso del solo parametro  $a$  variabile:

$$f(x) = e^{-a(x-1)^2} + 1$$

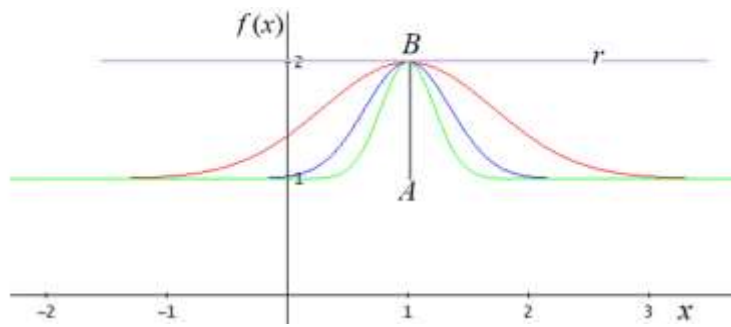
**ESEMPLI.**

- per  $a = 1$  l'equazione è  $f(x) = e^{-(x-1)^2} + 1$  e il grafico è la curva di colore rosso,
- per  $a = 4$  l'equazione è  $f(x) = e^{-4(x-1)^2} + 1$  e il grafico è la curva di colore blu,
- per  $a = 10$  l'equazione è  $f(x) = e^{-10(x-1)^2} + 1$  e il grafico è la curva di colore verde:



**OSSERVAZIONE.** La campana si stringe sempre più per  $a$  tendente ad infinito e si allarga sempre di più per  $a$  tendente a  $0^+$ ; in particolare:

- per  $a \rightarrow \infty$ , la curva degenera nel segmento (in virtù del codominio prima trovato) avente estremi  $A(1; 1)$  e  $B(1; 2)$ ;
- per  $a \rightarrow 0$ , la curva degenera nella retta  $r$  di equazione  $y = 2$ .



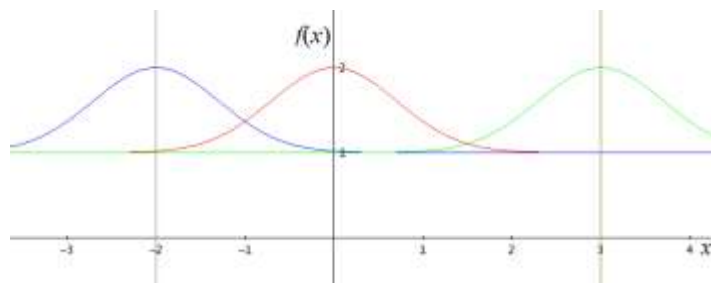
tutte queste curve sono simmetriche rispetto alla retta di equazione  $x = 1$ .

► Caso del solo parametro  $b$  variabile:

$$f(x) = e^{-1(x-b)^2} + 1$$

**ESEMPLI.**

- per  $b = 0$  l'equazione è  $f(x) = e^{-x^2} + 1$  e il grafico è la curva di colore rosso,
- per  $b = -2$  l'equazione è  $f(x) = e^{-(x+2)^2} + 1$  e il grafico è la curva di colore blu,
- per  $b = 3$  l'equazione è  $f(x) = e^{-(x-3)^2} + 1$  e il grafico è la curva di colore verde:



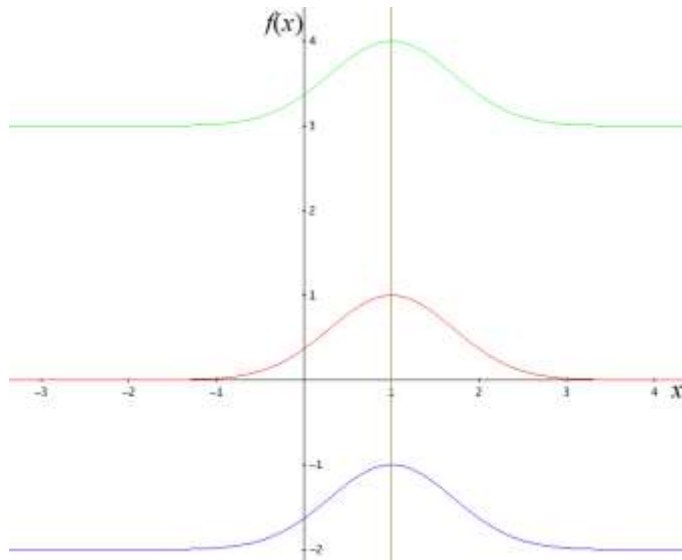
rispettivamente con gli assi di simmetria di equazione  $x = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 3$ .

► Caso del solo parametro  $c$  variabile:

$$f(x) = e^{-(x-1)^2} + c$$

**ESEMPLI.**

- per  $c = 0$  l'equazione è  $f(x) = e^{-(x-1)^2}$  e il grafico è la curva di colore rosso,
- per  $c = -2$  l'equazione è  $f(x) = e^{-(x-1)^2} - 2$  e il grafico è la curva di colore blu,
- per  $c = 3$  l'equazione è  $f(x) = e^{-(x-1)^2} + 3$  e il grafico è la curva di colore verde:



e, l'asse di simmetria per tutte le tre curve ha equazione  $x = 1$ .

**OSSERVAZIONE.** Cosa centrano le funzioni esponenziali con la costante  $\pi$ ?

Ebbene  $\pi$  gioca un ruolo cruciale in una specifica funzione esponenziale: la **funzione di densità di probabilità Gaussiana**. Questa funzione è fondamentale in statistica e teoria della probabilità, e descrive molti fenomeni naturali

La funzione di densità della distribuzione normale o di Gauss è:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} ;$$

essa dipende da 2 parametri:

- $\sigma$  che è la **deviazione standard**. È una misura della dispersione o della larghezza della distribuzione. Un valore di  $\sigma$  più grande indica che i dati sono più sparsi, mentre un valore più piccolo indica che i dati sono più concentrati attorno alla media;
- $\mu$  che è la **media** (o valore atteso). Rappresenta il centro della distribuzione, ovvero il valore attorno al quale i dati tendono a raggrupparsi. È anche il picco della curva a campana della distribuzione normale.

Nel caso in cui sia  $\sigma = 1$  e  $\mu = 0$ , si ha la distribuzione **normale standardizzata**, di uso frequente e la sua funzione di densità è:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} .$$

Le due precedenti funzioni soddisfano alle condizioni di funzione di densità, poiché entrambe positive per ogni valore della loro variabile indipendente ed inoltre, mediante il calcolo di integrazione, si verifica che **l'area totale sottesa dalla curva sull'intero asse x (da  $-\infty$  a  $+\infty$ ) è uguale a 1**: proprietà fondamentale di qualsiasi funzione di densità di probabilità, inclusa questa della distribuzione normale ... il che significa che la probabilità totale che una variabile casuale assuma un qualsiasi valore possibile è del 100%.

### Dimostrazione per la standardizzata.

Vogliamo dimostrare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} = 1 \quad (1)$$

portiamo fuori dal segno di integrazione la costante moltiplicativa:

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} = 1, \quad (2)$$

allora basterà dimostrare

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} = \sqrt{2 \cdot \pi} .$$

La strategia per la dimostrazione è quella di usare l'integrazione a due variabili e le coordinate polari.

Consideriamo pertanto

$$I^2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dy \right)$$

che trasformiamo in un integrale doppio:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot dx \cdot dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot dx \cdot dy .$$

Effettuiamo ora la conversione delle coordinate cartesiane  $(x, y)$  in polari  $(\rho, \vartheta)$ :

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \vartheta \\ y = \rho \cdot \sin \vartheta \end{cases}$$

da cui

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cdot (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = \rho^2$$

Nella conversione di un integrale da coordinate cartesiane a coordinate polari l'area infinitesimale  $dx \cdot dy$  si trasforma in  $r \cdot d\rho \cdot d\vartheta$ .

Infatti un rettangolo infinitesimale in coordinate cartesiane, avente lati  $dx$  e  $dy$ , ha area  $dA = dx \cdot dy$ .

In coordinate polari un'area infinitesimale  $dA$  è una porzione infinitesimale avente forma di settore circolare, delimitato da due raggi  $\rho$ ,  $\rho + d\rho$  e due angoli  $\vartheta$ ,  $\vartheta + d\vartheta$ . Approssimiamo questa forma a settore circolare con un rettangolo curvilineo avente:

- lunghezza del lato radiale uguale a  $d\rho$ ,
- lunghezza del lato circonferenziale uguale a  $\rho \cdot d\vartheta$ , ovviamente  $d\vartheta$  espresso in radianti.

Quindi l'area infinitesimale è il prodotto delle precedenti lunghezze  $dA = (d\rho) \cdot (\rho \cdot d\vartheta) = \rho \cdot d\rho \cdot d\vartheta$

Allora nell'integrale in coordinate polari gli estremi di integrazione sono:

- dominio di integrazione per  $\rho$ :  $0 \leq \rho < +\infty$ ,
- dominio di integrazione per  $\vartheta$ :  $0 \leq \vartheta \leq 2 \cdot \pi$ ;

per cui l'integrale si trasforma nella forma:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\vartheta$$

che preferiamo scrivere

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \cdot \rho \cdot d\rho \right) \cdot d\vartheta;$$

iniziamo a risolvere l'integrale in parentesi utilizzando la variabile ausiliaria  $v = \frac{\rho^2}{2}$  da cui

$$dv = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \rho \cdot d\rho = \rho \cdot d\rho.$$

- per  $\rho = 0$   $\Rightarrow v = 0$ ,
- per  $\rho \rightarrow +\infty$   $\Rightarrow v \rightarrow +\infty$ .

Allora  $I^2$  diventa:

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \cdot \rho \cdot d\rho = \int_0^{+\infty} e^{-v} \cdot dv = \left[ -e^{-v} \right]_0^{+\infty} = -0 - (-e^0) = 0 - (-1) = 1;$$

ritorniamo sull'integrale doppio, sostituendovi il risultato prima ottenuto:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} (1) \cdot d\vartheta = \left[ \vartheta \right]_0^{2\pi} = 2 \cdot \pi - 0 = 2 \cdot \pi,$$

pertanto è:

$$I^2 = 2 \cdot \pi;$$

ricordando che  $I$  deve essere positivo perché integrale di una funzione positiva, estraiamo la radice quadrata ad ambo i membri ed otteniamo:

$$I = \sqrt{2 \cdot \pi}.$$

Il risultato ottenuto verifica la (2):

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi} = 1,$$

che conferma la (1).

Vediamo dove  $\pi$  si inserisce:

- il termine  $e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  è chiaramente una funzione esponenziale, dove  $e$  è il numero di Nepero (base del logaritmo naturale); questa parte determina la caratteristica forma a campana della curva;
- la costante  $\pi$  appare nella **costante di normalizzazione**  $\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}$ ; questa costante assicura che l'area totale sotto la curva di densità di probabilità sia uguale a 1, un requisito fondamentale per qualsiasi distribuzione di probabilità. Senza  $\pi$ , la funzione non rappresenterebbe una distribuzione di probabilità.

In sintesi,  $\pi$  non è solo una costante arbitraria qui, ma essenziale affinché la funzione Gaussiana si comporti correttamente come una distribuzione di probabilità, garantendo che tutte le probabilità diano per somma uno.

■ Ulteriori note su  $\mu$  e  $\sigma$ .

1.  $\mu$  è la **media** (o **valore atteso**) e rappresenta il **centro** della distribuzione, ovvero è il valore attorno al quale i dati tendono a raggrupparsi; il suo effetto sulla curva a campana è quello di spostarla orizzontalmente, mantenendone inalterata la sua forma, quanto stretta o larga che sia. Per il fatto che la curva risulta perfettamente simmetrica rispetto a  $\mu$ , questo valore coincide con **mediana** (valore che divide la distribuzione in due metà uguali) e con la **moda** (valore più frequente).
2.  $\sigma$  è lo **scarto quadratico medio** (o **deviazione standard**) e rappresenta la **dispersione** o la **variabilità** dei dati rispetto alla media: se  $\sigma$  è piccolo, i dati sono molto concentrati attorno alla media e la curva sarà **stretta** e **alta**; se  $\sigma$  è grande, i dati sono più dispersi e si allontanano maggiormente dalla media e la curva sarà **larga** e **schacciata**.

### OSSERVAZIONE.

La campana gaussiana ha due punti inflessionali simmetrici rispetto alla retta  $z = \mu$ , ovvero aventi ascissa rispettivamente  $\mu - \sigma$  e  $\mu + \sigma$ , pertanto  $\mu$  posiziona la campana e  $\sigma$  ne determina la forma, ovvero quanto è larga o stretta.

### ESEMPIO.

Da un'indagine statistica su 20.000 persone è emerso che l'altezza media è di 175 cm, con uno scarto quadratico medio di 10 cm, seguendo una distribuzione normale.

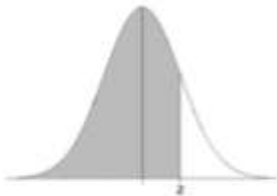
Determinare quante persone hanno altezza:

- compresa tra 160 cm e 185 cm,
- non meno di 200 cm,
- non più di 165 cm.

**SOLUZIONE.**

Premettiamo un estratto di Tavola di probabilità

**Tavola delle probabilità della curva normale standardizzata**



Probabilità cumulate per valori POSITIVI di z

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
...	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
...	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

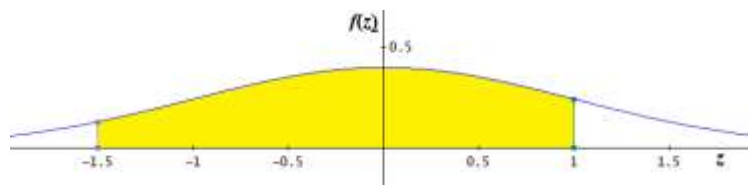
Determiniamo la variabile standardizzata:

$$Z = \frac{X - 175}{10},$$

- $x_1 = 160 \Rightarrow z_1 = \frac{160 - 175}{10} = -1,5; \quad x_2 = 185 \Rightarrow z_2 = \frac{185 - 175}{10} = 1;$

$$\begin{aligned} P(160 < x < 185) &= P(-1.5 < z < 1) = P(z < 1) - P(z < -1.5) = \\ &= P(z < 1) - (1 - P(z < -1.5)) = 0.8413 - (1 - 0.9332) = 0.7745; \end{aligned}$$

graficamente è:

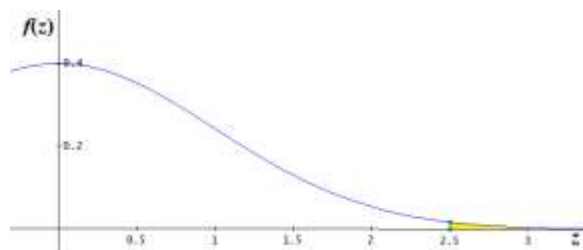


Pertanto la probabilità che, nell'indagine fatta, gli individui con altezza compresa tra 160 cm e 185 cm siano  $20\,000 \cdot 0.7745 = 15\,490$ .

●●  $x = 200 \Rightarrow z = \frac{200 - 175}{10} = 2.5;$

$$P(x \geq 200) = P(z \geq 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062;$$

graficamente è:

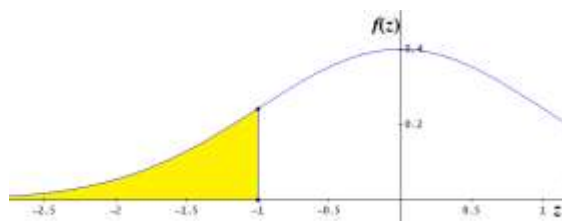


Pertanto la probabilità che, nell'indagine fatta, gli individui con altezza non inferiore a 200 cm siano  $20\,000 \cdot 0.0062 = 124$

●●●  $x = 165 \Rightarrow z = \frac{165 - 175}{10} = -1;$

$$P(x \leq 165) = P(z \leq -1) = 1 - P(z \geq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587^{(*)}$$

graficamente è:



Pertanto la probabilità che, nell'indagine fatta, gli individui con altezza non superiore a 165 cm siano  $20\,000 \cdot 0.1587 = 3\,174$

(\*) Per determinare il valore corrispondente ad un valore negativo nella tabella Z si utilizza la "simmetria" della curva normale; per esempio per determinare  $P(Z \leq -1)$ , si opera come segue:

$$P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1),$$

pertanto si cerca  $z=1.00$  nella tabella, che è 0.8413 e quindi è:  $P(Z \leq -1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$ .

**OSSERVAZIONE.**

Sebbene le **tavole per il calcolo delle probabilità con la distribuzione gaussiana** (le cosiddette “tavole Z” o “tavole della distribuzione normale standardizzata”) siano uno strumento classico, è importante sapere che oggi **molte alternative software e online offrono calcoli più rapidi e affidabili.**

I vantaggi delle alternative alle tavole sono, come minimo, la velocità, la precisione e la visualizzazione grafica.

Derive usa la funzione ERF (funzione errore) per integrare la funzione gaussiana perché l'integrale di  $e^{-x^2}$  non ha una soluzione esprimibile con funzioni elementari. ERF è una funzione speciale definita proprio per questo tipo di integrali, essenziale per calcolare le probabilità nella distribuzione normale standard.

Verifichiamo i risultati del precedente esempio.

$$\bullet \int_{-1.5}^1 \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-z^2/2} dz = \frac{\text{ERF}\left(\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4}\right) + \text{ERF}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = 0.7745375448$$

$$\bullet\bullet \int_{2.5}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-z^2/2} dz = \frac{1 - \text{ERF}\left(\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{4}\right)}{2} = 0.006209665322$$

$$\bullet\bullet\bullet \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-z^2/2} dz = \frac{1 - \text{ERF}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = 0.1586552539$$

**Pi greco, sei nato con l'universo stesso! La tua essenza è nella sfericità di ogni corpo celeste, rendendoti un numero che incanta e di un fascino senza tempo.**

