PROBLEMA

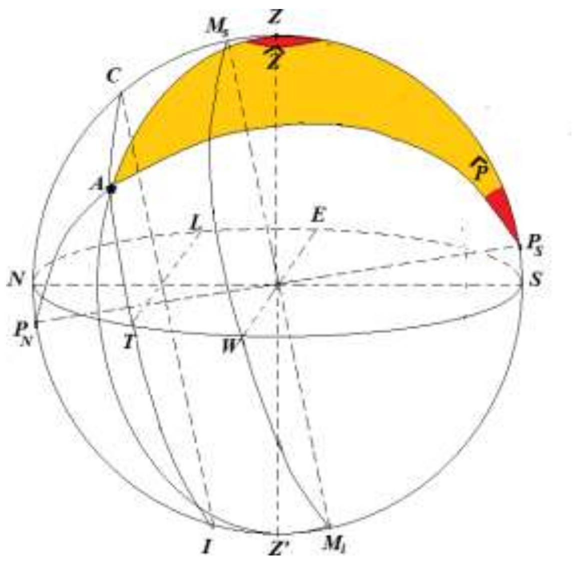
Sono noti:

$$\varphi_s = 4°27'\ S;$$
$$\delta = 38°44.8' N;$$
$$\hat{P}_W = 6°28.4'.$$

Determinare l'altezza stimata h_s e l'angolo azimutale $\hat{Z}$.

SOLUZIONE

La situazione astronomica è rappresentata nella seguente figura scenografica



nella quale:

- il triangolo astronomico istantaneo è colorato in giallo;
- gli elementi del triangolo sferico sono:
  - la distanza zenitale $z = arcoZA$
  - la distanza polare $p = arcoP_sA$
  - la colatitudine $c = arcoZP_s$
  - l'angolo al polo $\hat{P}$
  - l'angolo azimutale $\hat{Z}$
  - l'angolo paralatico $\hat{A}$, che non entra mai in gioco nei problemi nautici
- Z lo zenit dell'osservatore, ovvero il verso della sua verticale;
- P_s il polo elevato, omonimo alla latitudine dell'osservatore;
- $NESW$ l'orizzonte astronomico;
- M_sEM_iW l'equatore celeste;

- *EW* il diametro intersezione tra l'orizzonte astronomico e l'equatore celeste;
- *TL* la corda intersezione tra l'orizzonte astronomico ed il parallelo *LCTI* di declinazione (in cui *L* è il punto del sorgere dell'astro, *T* il punto del tramonto, *C* il punto di culminazione superiore, *I* il punto di culminazione inferiore)

Ora risolviamo il problema:

1. Mediante il teorema di Eulero (*) determino l'altezza stimata

$$\cos z = \cos c \cdot \cos p + \sin c \cdot \sin p \cdot \cos \hat{P} \qquad (1)$$

La (1) è proprio l'equazione di Eulero in trigonometria sferica; noi possiamo utilizzarla, più convenientemente, come segue:

$$\sin h = \cos c \cdot \cos p + \sin c \cdot \sin p \cdot \cos \hat{P}. \qquad (2)$$

OSSERVAZIONE. Il vantaggio dell'uso della (2) a fronte della (1) è nello sveltimento del calcolo dell'altezza, senza passare dalla corrispondente distanza zenitale. La (2) è giustificata dal fatto che la distanza zenitale (che compare nella (1)) non può essere maggiore di 90°, infatti, nell'uso della (1), se $\cos z$ risultasse negativo, vorrebbe significare che abbiamo commesso errori di calcolo o che l'astro sarebbe sotto all'orizzonte e quindi non avremmo potuto rilevarlo.

Mediante la calcolatrice

- con la (1) otteniamo *z* = 43°36'36.14''
- con la (2) otteniamo *h* = 46°23'23.86'' (approssimato, per i nostri calcoli a 46°23'.6)

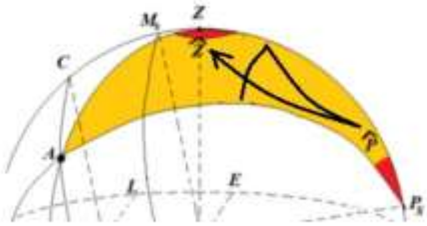
i due valori precedentemente scritti provengono dal valore 0.724051005 ottenuto, mediante la calcolatrice, del secondo membro sia della (1) che della (2), che sono tra loro uguali.

OSSERVAZIONE. Se effettuiamo manualmente la somma della distanza angolare con la corrispondente altezza, otteniamo (come di seguito emerge) gli "attesi" novanta gradi

43°36'36.14"+
46°23'23.86"=
____
89°59'60" =
89°60' =
90°

Ma, attenzione! Se si memorizzano in calcolatrice i valori calcolati di *z* ed *h*, non otteniamo i 90° attesi: come mai? E' una semplice questione di approssimazioni ... Ricordiamo che i valori naturali delle funzioni goniometriche sono numeri irrazionali ovvero numeri decimali infiniti non periodici e solo in pochi casi sono numeri razionali, come il seno di 30°, la secante di 60°, ….

1. Mediante il teorema delle cotangenti (da non dire "o di Vieta" perché il teorema di Vieta porge una relazione tra i tre angoli ed un lato, a fronte del teorema delle cotangenti che porge una relazione tra due lati ed i rispettivi angoli opposti)



L'equazione che traduce il teorema delle cotangenti può essere facilmente scritta con regole mnemoniche:

La prima è ricordare la sequenza delle funzioni goniometriche

cot-sen-cos-cos-sen-cot, (espressione polindroma),

ponendo il segno "=" dopo le prime due funzioni ed il segno "+" dopo le successive due:

$$\cot(..)\cdot\sin(..) = \cos(..)\cdot\cos(..) + \sin(..)\cdot\cot(..)\ ; \qquad (3)$$

ora si tratta di riempire la parentesi con gli argomenti opportuni; in questa fase ci viene in aiuto la spezzata curvilinea che compare in figura. La spezzata parte dal lato opposto all'angolo da determinare (distanza polare), va verso l'altro lato noto (colatitudine), devia verso l'angolo compreso tra i suddetti lati (angolo al polo) per continuare verso l'angolo da calcolare (angolo azimutale); le parentesi della (3) si riempiono, nell'ordine del verso della spezzata, avendo la vertenza di scrivere l'elemento corrispondente a ciascuna cuspide della spezzata due volte consecutive:

$$\cot(p)\cdot\sin(c) = \cos(c)\cdot\cos(\hat{P}) + \sin(\hat{P})\cdot\cot(\hat{Z}) \qquad (4)$$

La (4) si risolve rispetto a $\cot(\hat{Z})$

$$\cot\hat{Z} = \frac{\cot p\cdot\sin c - \cos c\cdot\cos\hat{P}}{\sin\hat{P}}$$

Mediante la calcolatrice otteniamo

$$\cot(\hat{Z}) = -7.780365862\,.$$

E, successivamente, applicando la funzione x^{-1}, otteniamo:

$$\tan(\hat{Z}) = -0.128528866\,,$$

a cui corrisponde

$$\hat{Z} = -73°19'26.39''$$

Essendo negativo, addizioniamo 180° (infatti il minimo periodo della tangente è 180°) ed otteniamo

$$\hat{Z} = 172°40'33.6''\ .$$

Ora si tratta di assegnare i due nomi dell'angolo azimutale, ed è presto fatto:

il prefisso è il nome della latitudine dell'osservatore, quindi *S*, il suffisso è il nome dell'angolo al polo e quindi *W*:

$$\hat{Z} = S172°40'33.6''W \quad (\text{approssimato a } \hat{Z} = S172.7°W)$$

(*) Anche per ricordare l'equazione di Eulero esiste una spezzata curvilinea costruita opportunamente nel triangolo, ma io credo che sia più efficace la seguente regola:

si deve ricordare la sequenza delle funzioni goniometriche

cos _cos _ cos _ sen _sen_cos (ed è per questo che è chiamato anche **teorema del coseno**)

si pone il simbolo "=" dopo la prima funzione ed il segno "+" dopo le due successive

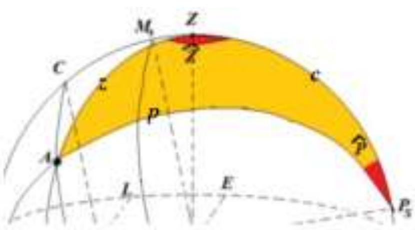
$$\cos(..) = \cos(..) \cdot \cos(..) + \sin(..) \cdot \sin(..) \cdot \cos(..);$$

si tratta ora di riempire le parentesi con gli argomenti opportuni, precisamente nel seguente ordine:

- ella prima parentesi il lato da calcolare,
- nelle due successive e così pure nelle prime due della successiva terna i lati noti,
- nell'ultima parentesi l'angolo opposto al lato da determinare.

Facciamo una prova, per esempio:

■ vogliamo calcolare la distanza polare *p*, conoscendo *z*, *c* e $\hat{Z}$



Seguiamo la precedente regola.

$$\cos p = \cos z \cdot \cos c + \sin z \cdot \sin c \cdot \cos \hat{Z}\ ;$$

sostituendo gli argomenti noti al secondo membro, la calcolatrice porge:

$$\cos p \approx -0.6258780756$$

da cui si ottiene

$$p \approx 128°44'47.9''$$

da cui è

$$\delta = 180° - p \approx 128°44'47.9'' - 90° = 38°44'47.9''N \approx 38°44.798'N$$

che, salvo le approssimazioni date dallo strumento di calcolo, coincide col valore dato $\delta = 38°44.8'N$.