GEOMETRIA E NAVIGAZIONE

Consideriamo i due punti del piano cartesiano $A(2;1)$ e $B\left(-1;\frac{5}{2}\right)$; per essi passa una ed una sola retta r del piano. La pendenza *m* della retta *r* è:

$$m=\frac{1-\frac{5}{2}}{2-(-1)}=-\frac{1}{2};$$

pertanto l'equazione della retta r è del tipo

$$y=-\frac{1}{2}x+q\,. \qquad (1)$$

OSSERVAZIONE. Ho battezzato il *coefficiente angolare* (denominazione utilizzata in geometria analitica) *m* della retta con la locuzione "*pendenza*". Non è certo un caso, infatti la pendenza di una curva in un suo punto è il valore che la derivata prima della funzione assume in quel punto; nel nostro caso la derivata prima della funzione *y* è $-\frac{1}{2}$ che è una costante e quindi esprime la pendenza in tutti i punti di quella retta.

Ricordiamo che le rette, non parallele all'asse delle ordinate, sono le uniche curve di pendenza costante.

Ancora è importante non confondere la *pendenza* con l'*inclinazione* che, purtroppo, in alcuni testi sono considerati sinonimi. Sono, in realtà, entità diverse, anche se tra loro legate matematicamente.

L'inclinazione è l'angolo α che la retta forma con l'asse delle ascisse misurato in senso antiorario ed il coefficiente angolare o pendenza è $m=\tan\alpha$.

Nel nostro caso l'inclinazione è $\alpha=\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)\cong 153°26'06''$.

Ora sostituiamo le coordinate dei punti A e *B* nella (1) e risolviamo le due equazioni determinate rispetto al parametro *q*.

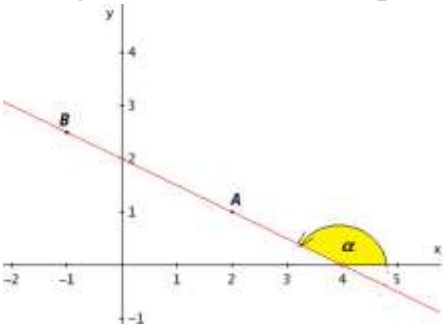
- Per il punto *A* abbiamo:

$$1=-\frac{1}{2}\cdot 2+q \qquad \Rightarrow \quad q=2\,;$$

- per il punto *B* abbiamo:

$$\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}\cdot(-1)+q \qquad \Rightarrow \quad q=2\,.$$

Come si vede, ed era da aspettarselo, otteniamo la stessa ordinata all'origine. Riportiamo il grafico che, grazie a Cartesio, ci permette di "*vedere*" l'algebra.



► Questo procedimento lo posso usare anche per la lossodromia. Vediamo in che modo, utilizzando i dati di un *esempio* di un testo di navigazione tradizionale.

Riporto le ultime righe di una pagina dello stesso testo*: L'arco di lossodromia AB non è il minimo percorso tra i due punti; come è già noto la minima distanza tra due punti della sfera è misurata sull'arco di circolo massimo minore di* π.

Ho volutamente rimarcato in colore rosso l'aggettivo *minima* che non avrebbe dovuto essere scritto; infatti la distanza tra due punti considerati in un determinato UNIVERSO è unica ed esprime il ***minimo percorso*** tra i suddetti punti in quel determinato UNIVERSO. È pertanto concettualmente sbagliato parlare di *minima distanza*.

È invece corretto dire che la distanza sferica tra due punti *A* e *B* è l'arco di circolo massimo, minore di π, avente per estremi i due punti *A* e *B*.

NOTA. In navigazione questo arco viene chiamato *ortodromia*.

Dall'enciclopedia Treccani si legge; **ortodromìa** (o **ortodròmia**) s. f. [comp. dal gr. ὀρθός «**retto, diritto**» e -δρομία «**corsa**»; cfr. ὀρθοδρομέω «**correre dritto**»]. – In geometria sferica, linea che individua il più breve cammino tra due punti di una superficie sferica (in particolare, della superficie terrestre); è perciò il minore dei due archi di cerchio massimo che hanno per estremi i due punti. (ed è per questo che si chiama distanza sferica).Ovviamente se i due punti sono diametralmente opposti i due archi che individuano sono entrambi ortodromie: trattasi di caso limite

È importante ricordare che per due punti di una superficie sferica, non diametralmente opposti (per esempio sulla Terra, considerata sferica, vi sono infiniti circoli meridiani perché i poli geografici sono punti tra loro diametralmente opposti), passa uno ed un solo circolo massimo, allo stesso modo come avviene sul piano, senza però nessuna eccezione, per due punti passa una ed una sola retta.

Ora veniamo al problema di lossodromia. Per due punti della superficie terrestre passano infinite lossodromie, ma una ed una sola che individui un arco compreso nel fuso sferico limitato dai meridiani di *A* e di *B*; e noi ci riferiamo solo a questa lossodromia.

Come l'equazione di una retta dipende dai parametri *inclinazione e ordinata all'origine*, allo stesso modo l'equazione di una lossodromia dipende dalla *longitudine del nodo* e dalla *rotta*.

Siano:

- punto di partenza Taranto: $A(\varphi = 40°16'N; \lambda = 17°02'E)$
- punto di arrivo Tobruk: $A(\varphi = 32°28'N; \lambda = 24°00'E)$

Dai calcoli si ottiene la rotta vera circolare $R_v = 144°40'06''$; questo risultato è uno dei parametri dell'equazione della lossodromia passante per i punti A e B.

Pertanto l'equazione di questa lossodromia, indicando con λ_N la longitudine del nodo, è del tipo:

$$\lambda_N = \lambda - \ln\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \frac{10800'}{\pi} \cdot \tan R_v$$

nella quale φ e λ sono le coordinate del punto corrente e la rotta vera è nota.

Tenuto conto che l'espressione $\ln\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)$ è espressa in radianti,

l'espressione $\ln\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \frac{10800'}{\pi}$ è espressa in primi d'arco; pertanto consideriamo così anche le longitudini.

A questo punto calcoliamo la longitudine del nodo, una volta mediante le coordinate del punto A ed un'altra volta mediante le coordinate del punto B:

1. $\lambda_N = 1022 - \ln\tan\left(45° + \frac{40°16'}{2}\right) \cdot \frac{10800'}{\pi} \cdot \tan(144°40'06'')$,

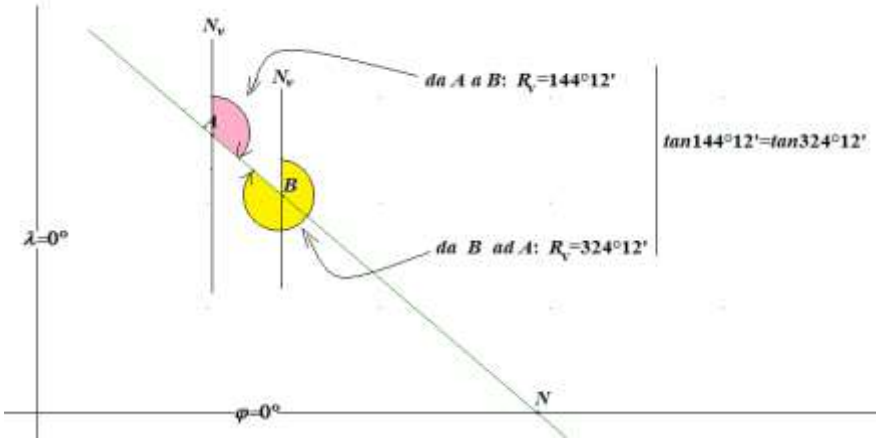
   (mediante una calcolatrice scientifica) otteniamo $\lambda_N \cong (2920.3)'E = 48°40'18''E$;
2. $\lambda_N = 1440 - \ln\tan\left(45° + \frac{32°28'}{2}\right) \cdot \frac{10800'}{\pi} \cdot \tan(144°40'06'')$,

   otteniamo $\lambda_N \cong (2920.3)'E = 48°40'18''E$.

L'equazione di questa curva è pertanto:

$$(2927.7)' = \lambda - \ln\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)\cdot\frac{10800'}{\pi}\cdot\tan\left(144°19'06''\right).$$

Ho costruito, mediante DERIVE.6 la carta di Mercatore relativa a questo specchio acqueo

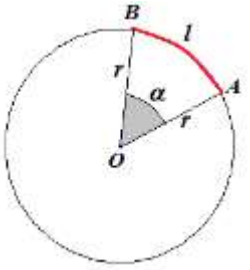


dalla quale viene evidenziata bene la pendenza della retta che rappresenta, su questa carta, la lossodromia in oggetto; infatti la pendenza è la stessa sia che la lossodromia sia percorsa in un senso che nell'altro.

OSSERVAZIONE. Questo procedimento può essere utilizzato per determinare le coordinate del punto di intersezione di due lossodromie.

Precisazione sul passaggio dalla misura di un angolo da radianti a gradi sessagesimali e viceversa

Si definisce ampiezza, espressa in **radianti**, dell'angolo $\alpha = A\hat{O}B$ il rapporto tra la lunghezza *l* (arco di circonferenza su cui insiste l'angolo α) e la misura del raggio *r* della circonferenza



pertanto è

$$\alpha_{rad} = \frac{l}{r}. \qquad (1)$$

Se consideriamo l'arco di circonferenza *l* uguale alla misura del raggio *r*, la (1) diventa:

$$\alpha_{rad} = 1 \qquad (2)$$

La (2) manifesta che l'**angolo unitario**, espresso in radianti, è pari all'angolo al centro di una circonferenza il cui arco ha lunghezza pari al raggio della circonferenza stessa.

►La domanda che ci poniamo è: *quale strategia operare per passare dalla misura di un angolo espresso in gradi sessagesimali nel corrispondente angolo espresso in radianti, e viceversa*?

La risposta può essere la seguente:

consideriamo l'arco *l* pari alla lunghezza della circonferenza che, come è noto, è uguale a $2 \cdot \pi \cdot r$; in questa circostanza l'angolo al centro che insiste sulla circonferenza è l'angolo giro. Quindi la (1) diventa

$$(angolo\ \ giro)_{rad} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r} = 2 \cdot \pi \qquad \textbf{(3)}$$

Dalla (3) si può facilmente rispondere alla domanda posta: è sufficiente impostare una proporzione

$$\alpha_{rad} : \alpha° = 2 \cdot \pi : 360° .$$

E, per una nota proprietà delle proporzioni, è uso utilizzare la seguente proporzione

$$\alpha_{rad} : \alpha° = \pi : 180° . \qquad (4)$$

Ed ora possiamo determinare il valore in gradi di **un radiante**. Dalla (4) abbiamo

$$1_{rad} : \alpha° = \pi : 180°$$

nella quale è incognito $\alpha°$

$$\alpha° = \frac{180°}{\pi} \cong (57.29577951)° .$$

Allo stesso modo, essendo $180° = (180° \cdot 60)' = 10800'$, determiniamo il valore di **un radiante** espresso i primi d'arco

$$\alpha' = \frac{10800'}{\pi};$$

ovviamente gli angoli $\alpha°$, α' e 1_{rad} esprimono lo stesso angolo, ovvero l'ampiezza di **un radiante**.

NOTA sulla convenzione di misurazione gli angoli.

Esiste infatti una differenza tra la matematica e le applicazioni pratiche come l'astronomia e la navigazione.

►In **matematica**, la convenzione standard per la misurazione degli angoli è il **senso antiorario**, per diverse ragioni per questa scelta:

- **coerenza con il piano cartesiano.**

  Nel sistema di coordinate cartesiane, l'angolo di 0° è posto sul semiasse positivo delle ascisse (in generale asse *x*). Ruotando in senso antiorario, si passa attraverso il primo quadrante (angoli da 0° a 90°), il secondo (90° a 180°), e così via, con valori crescenti. Questo si allinea bene con la progressione naturale dei numeri positivi.

- **Funzioni trigonometriche.**

  Le definizioni delle funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) sono strettamente legate a questa convenzione. Un angolo in senso antiorario è considerato positivo, mentre uno in senso orario è negativo. Questo permette una rappresentazione uniforme e una manipolazione algebrica più semplice.

- **Numeri complessi.**

  Nel piano complesso, la moltiplicazione per l'unità immaginaria *i* corrisponde a una rotazione di 90° in senso antiorario, rafforzando ulteriormente questa convenzione.

►In **astronomia** e **navigazione**, spesso si preferisce il **senso orario** per la misurazione degli angoli, in particolare per l'azimut e l'angolo orario. Anche qui, ci sono motivazioni pratiche e storiche:

- **riferimento al Nord.**

  In navigazione, la direzione di riferimento più comune è il **Nord**. Gli angoli (come l'azimut o la rotta) vengono misurati a partire dal Nord (o dal Nord vero, dal Nord magnetico, o dal Nord bussola, a seconda del contesto) e si procede in senso orario. Questo è intuitivo: se si parte dal Nord, andando verso Est si ha 90°, verso Sud 180°, verso Ovest 270°, e di nuovo Nord a 360°/0°. Questo rispecchia il modo in cui ci si orienta su una bussola o una carta nautica.

- **movimento apparente del Sole.**

  Nell'emisfero boreale, il Sole si muove apparentemente nel cielo da Est a Ovest, quindi in senso orario. Questo movimento ha influenzato le prime osservazioni astronomiche e la definizione di angoli come l'angolo orario, che misura la distanza angolare di un astro dal meridiano locale verso ovest (che corrisponde al senso orario per un osservatore che guarda il cielo).

- **Praticità storica.**

  Molti strumenti di misurazione e navigazione tradizionali, come la bussola o il quadrante, sono stati sviluppati con una progressione in senso orario, il che ha consolidato questa convenzione.

In sintesi:

- La **matematica** adotta il **senso antiorario** per una questione di coerenza interna al sistema di coordinate cartesiane e per la facilità di manipolazione algebrica degli angoli.
- L'**astronomia** e la **navigazione** spesso usano il **senso orario** per ragioni pratiche legate all'orientamento sul campo (rispetto al Nord) e al movimento apparente dei corpi celesti.

Risulta pertanto importante essere consapevoli di queste diverse convenzioni a seconda del contesto in cui si lavora, per evitare errori di interpretazione o calcolo.