§1 SUCCESSIONE DI FIBONACCI

DEFINIZIONE

► La successione di Fibonacci è la sequenza di numeri nella quale ogni elemento è la somma dei due termini che, immediatamente, lo precedono e nella quale il primo termine è 0 ed il secondo è 1.

Riportiamo il programma che traduce la suddetta definizione:

$$
\begin{array}{l}
f(n) = \\
\quad \text{if } n=1 \\
\quad\quad 0 \\
\quad \text{if } n=2 \\
\quad\quad 1 \\
\quad\quad f(n-1)+f(n-2)
\end{array}
$$

che si legge:

se $n=1$ allora

$$f(n)=0 \qquad (1)$$

se $n=2$ allora

$$f(n)=1 \qquad (2)$$

altrimenti

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2). \qquad (3)$$

Trattasi quindi della seguente funzione discreta:

$$f(1)=0$$

$$f(2)=1$$

$$f(3)=f(2)+f(1)=0+1=1$$

$$f(4)=f(3)+f(2)=1+1=2$$

$$f(5)=f(4)+f(3)=1+2=3$$

e così di seguito.

Scriviamo i primi 10 elementi di questa successione:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. (*)

EQUAZIONE CHE DEFINISCE IL TERMINE GENERALE

►Determiniamo ora una equazione che porga il "*termine generale*" della successione, senza usare il metodo ricorsivo. Allo scopo cerchiamo quel numero x, tale che si abbia:

$$f(n) = x^n; \qquad (4)$$

ma, dovendo $f(n)$ soddisfare la (3), possiamo scrivere:

$$x^{n-1} + x^{n-2} = x^n;$$

dividendo ambo i membri per x^{n-2}, otteniamo:

$$x + 1 = x^2; \qquad (5)$$

la (5) è una equazione di secondo grado la cui forma canonica è:

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad (6)$$

e le cui radici sono

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \vee \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

pertanto le successioni

$$g(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (7)$$

$$h(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (8)$$

soddisfano la (3) ma non la (1) e la (2). Mentre è immediata la non soddisfazione delle (1) e (2), rimane non immediata quella della (3); verifichiamo, per esempio, il valore $g(n)$, lasciando al lettore la verifica per $h(n)$:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1}; \quad \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}};$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2}; \qquad \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\left(1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2};$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}; \qquad \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n, \text{ che è una identità}$$

Cerchiamo allora di determinare un’equazione che sia atta a soddisfare le (1), (2) e (3); ora, rilevato che $g(n)$ e $h(n)$ soddisfano la (3), quest’ultima è soddisfatta anche da una loro combinazione lineare, pertanto addizioniamo $g(n)$ e $h(n)$, rispettivamente moltiplicati per α e β:

$$\alpha\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n; \tag{9}$$

ci proponiamo di determinare i valori di α e β affinché la (9) sia soluzione anche delle (1) e (2);

imponiamo allora che la (9) assuma il valore 0 per n=1 ed il valore 1 per n=2:

$$\alpha\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^1+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1=0 \quad \wedge \quad \alpha\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1 \tag{10}$$

Il sistema (10) ha soluzioni:

$$\alpha=\frac{5-\sqrt{5}}{10} \qquad \wedge \qquad \beta=\frac{5+\sqrt{5}}{10}.$$

Allora la (9), che indichiamo con $FIB(n)$, diventa:

$$FIB(n)=\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \tag{11}$$

che possiamo anche scrivere:

$$FIB(n)=2^{-n-1}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{5}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)^n+2^{-n-1}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)^n\cdot\frac{\sqrt{5}+5}{5}\cdot(-1)^n. \tag{12}$$

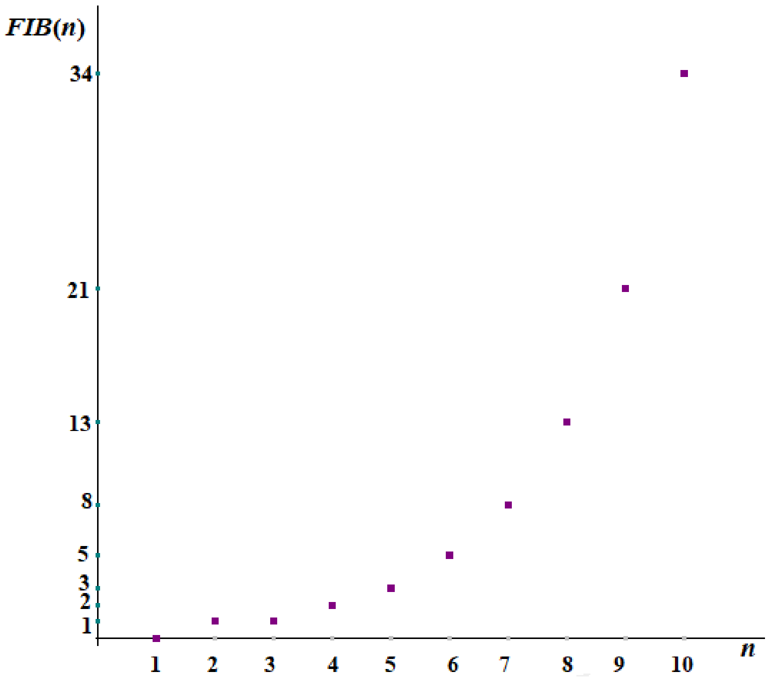
Attribuiamo ad n i valori da 1 a 10 ed otteniamo la sequenza (*).

GRAFICO DI $FIB(n)$

►Costruiamo la matrice

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n & f(n) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \\ 6 & 5 \\ 7 & 8 \\ 8 & 13 \\ 9 & 21 \\ 10 & 34 \end{bmatrix} \end{array}$$

il cui grafico è



CARATTERISTICA DELLA SUCCESSIONE

►Scriviamo il rapporto

$$\frac{FIB(n)}{FIB(n-1)} \tag{13}$$

e determiniamone, per esempio, i valori per $n = 2, 3, \ldots.., 15$, approssimando i rapporti alla nona cifra decimale:

1.069647742;1;2;1.5;1.666666666;1.61818181818;1.617977528;1.618055555;1.618025751.

Dalla sequenza di numeri calcolati sembrerebbe che la (13) sia dotata di limite finito per $n \to +\infty$; indichiamo questo ipotetico limite, se esiste, con la lettera ϕ e proviamo a determinarlo.

Allo scopo, per convenienza, torniamo alla funzione (3), che riscriviamo:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2); \tag{14}$$

dividiamo ambo i membri per $f(n-1)$

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} = 1 + \frac{f(n-2)}{f(n-1)}; \tag{15}$$

indicato con $r(n)$ il rapporto tra l'ennesimo termine col proprio precedente, nella (15) è:

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} = r(n) \qquad \text{e} \qquad \frac{f(n-2)}{f(n-1)} = \frac{1}{\frac{f(n-1)}{f(n-2)}} = \frac{1}{r(n)}$$

pertanto la (15) diventa

$$r(n) = 1 + \frac{1}{r(n)};$$

se per $n \to +\infty$, $r(n)$ tende al limite ϕ, abbiamo:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

che scriviamo in forma canonica

$$\phi^2 - \varphi - 1 = 0. \tag{16}$$

La (16) ha le soluzioni:

$$\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \wedge \qquad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

la soluzione positiva è il limite cercato che, approssimato al miliardesimo è

$$\phi = 1.618033988.$$

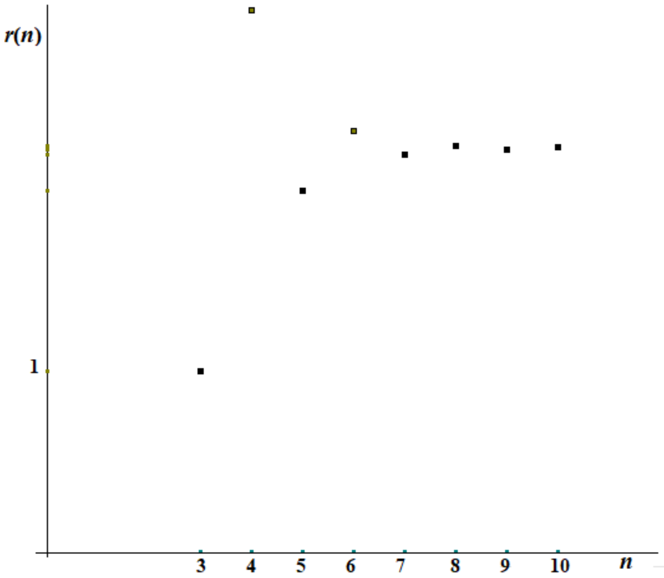
Per comodità usiamo un programma, residente in Derive.6, che consenta di determinare una sequenza discreta di dati: trattasi della specifica "VECTOR" nella quale viene scritto il termine generico (nel nostro caso il termine generico della matrice desiderata, racchiusa tra parentesi quadre) seguito, dopo una virgola, dalla dichiarazione della variabile indipendente (nel nostro caso la variabile *n*) e successivamente, con le dovute virgole, i valori iniziale e finale di *n*:

$$\text{VECTOR}\left(\left[n,\ \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}\right],\ n,\ 3,\ 10\right)$$

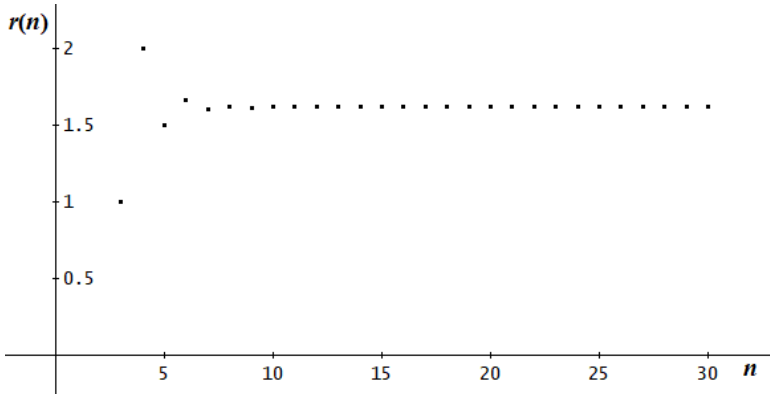
in esecuzione compare sullo schermo la seguente matrice:

n	$r(n)$
3	1
4	2
5	1.5
6	1.666666666
7	1.6
8	1.625
9	1.615384615
10	1.619047619

e,   graficamente abbiamo:



Ed ecco una delle potenzialità dei software: nel precedente programmino sostituiamo all'estremo superiore 10, per esempio il numero 30, e tracciamo il relativo grafico senza riportare (per motivi di spazio) la matrice



NUMERO AUREO

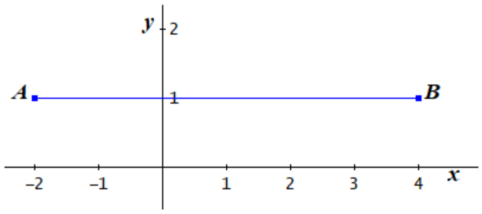
Il numero $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ assume il nome di "rapporto aureo" perché consente di dividere un segmento in due parti di cui la maggiore è media proporzionale tra la minore e tutto il segmento.

PROBLEMA.

Costruire la sezione aurea sul segmento avente estremi $A(-2;1)$ e $B(4;1)$.

SOLUZIONE

Posizioniamo il segmento AB sul piano cartesiano:



Indichiamo con $C\,(x,\,1)$ il punto del segmento (per esempio più vicino al punto B), per cui si verifichi:

$$(C-A)^2 = (B-C)(B-A),$$

che, per i dati del problema diventa:

$$(x+2)^2 = (4-x)(4+2)$$

la cui radice positiva $-3+3\sqrt{5}$ è l'ascissa del punto C, ovvero è

$$C\left(-3+3\sqrt{5};1\right).$$

Vogliamo rappresentare il quadrato ed il rettangolo, tra loro equivalenti, che soddisfano la definizione di sezione aurea.

- Per costruire il quadrato scriviamo l'equazione della circonferenza avente centro in A e raggio AC:

  $$x^2+y^2+4x-2y++18\sqrt{5}-49=0$$

  risolviamola rispetto alla variabile y e, della semicirconferenza che è al di sopra del segmento AB, consideriamo solo l'arco:

  $$IF\left(-2 \le x \le 3\sqrt{5}-5, \sqrt{-x^2-4x-18\sqrt{5}+50}+1\right)$$

  che rappresentiamo; indicato con E l'estremo sinistro di questo arco, il quadrato richiesto è $AEDC$.

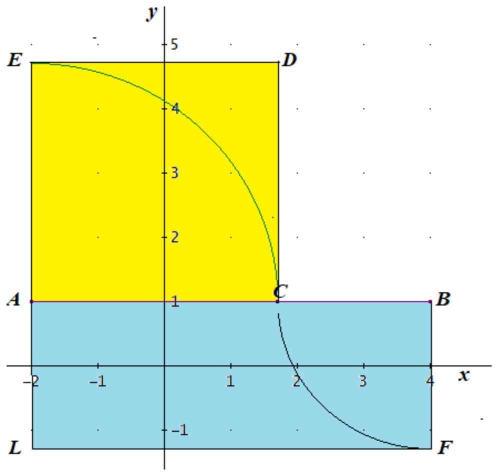
- Per costruire il rettangolo scriviamo l'equazione della circonferenza avente centro in B e raggio BC:

  $$x^2+y^2-8x-2y++54\sqrt{5}-109=0$$

  risolviamola rispetto alla variabile y e, della semicirconferenza che è al di sotto del segmento AB, consideriamo solo l'arco:

$$IF\left(3\sqrt{5} \le x \le 4, -\sqrt{-x^2 + 8x - 54\sqrt{5} + 110} + 1\right)$$

che rappresentiamo; indicato con F l'estremo destro di questo arco, il rettangolo richiesto è $ABFL$.



SUCCESSIONE DI NUMERI CON LA STESSA CARATTERISTICA DI QUELLA DI FIBONCCI

Con la stessa definizione della successione di Fibonacci assumiamo come primo e secondo termine due numeri a piacere, ad esempio rispettivamente 18 e 31.

Mediante il programma ricorsivo utilizzato per Fibonacci

$$\begin{array}{l} f(n) = \\ \quad if\ n = 1 \\ \quad \mathbf{18} \\ \quad if\ n = 2 \\ \quad \mathbf{31} \\ \quad f(n-1) + f(n-2) \end{array}$$

Scriviamo i primi 10 elementi utilizzando questo metodo ricorsivo:

$$18,\ 31,\ 49,\ 80,\ 129,\ 209,\ 338,\ 547,\ 885,\ 1432. \qquad (**)$$

Con lo stesso ragionamento utilizzato con Fibonacci, scriviamo l'equazione che poga il termine ennesimo, ed allora riscriviamo la **(9)**

$$\alpha\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

imponendo che assuma il valore 18 per n =1 ed il valore 31 per n =2:

$$\alpha\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^1 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 18 \quad \wedge \quad \alpha\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 31 \qquad (17)$$

Il sistema (17) ha soluzione:

$$\alpha = \frac{23\sqrt{5}}{10} + \frac{13}{2} \qquad \wedge \qquad \beta = -\frac{23\sqrt{5}}{10} + \frac{13}{2}$$

Allora la (9), che indichiamo con *BIF*(*n*), diventa:

$$BIF(n) = \frac{23\sqrt{5}+65}{10}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{65-23\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad (18)$$

dalla quale, per n = 1, 2, 3, …. , 10 ritroviamo la successione (**).

Anche in questo caso consideriamo i rapporti

$$\frac{BIF(n)}{BIF(n-1)}$$

e, mediante la specifica VECTOR di DERIVE.6:

$$\text{VECTOR}\left(\left[n, \frac{BIF(n)}{BIF(n-1)}\right], n, 1, 10\right)$$

otteniamo la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.384615384 \\ 2 & 1.722222222 \\ 3 & 1.580645161 \\ 4 & 1.632653061 \\ 5 & 1.6125 \\ 6 & 1.620155038 \\ 7 & 1.617224880 \\ 8 & 1.618343195 \\ 9 & 1.617915904 \\ 10 & 1.618079096 \end{bmatrix}$$

dalla quale emerge nuovamente la tendenza al numero aureo.

Ciò che abbiamo detto vale quindi per qualunque coppia di numeri a e b scelti a piacere tal che sia $a > b$. ….. PROVARE.

§2 FRAZIONI CONTINUE

Riprendiamo l'equazione (6)

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

isoliamo a primo membro il termine quadrato,

$$x^2 = x + 1$$

dividiamo ambo i membri per x (possibile perché 0 non è soluzione dell'equazione)

$$x = 1 + \frac{1}{x} \qquad (19)$$

sostituiamo alla x del secondo membro il valore ora determinato

$$x = 1 + \frac{1}{\dfrac{1}{1+x}}$$

e così continuiamo di seguito nello stesso modo:

otteniamo:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}}}}}}}}$$

Incorniciamo le frazioni con colore rosso e blu, alternati, al fine di evidenziare le varie frazioni che si vengono a creare durante questo algoritmo:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}}}}}}}}$$

Cosi abbiamo:

$x = 1;\quad x = 1 + \frac{1}{1} = 2;\quad x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = 1.5\quad x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} \cong 1.666666666$

$x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = 1.6\quad x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}} = 1.625$

$x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}} \cong 1.615384615\quad x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}}} \cong 1.619047619$

$$x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}}}} \cong 1.617647058$$

$$x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}}}}} \cong 1.618181818$$

Ci sembra opportuno dare la procedura per passare da una frazione alla immediatamente successiva; per esempio scelgo il passaggio dalla quinta alla sesta

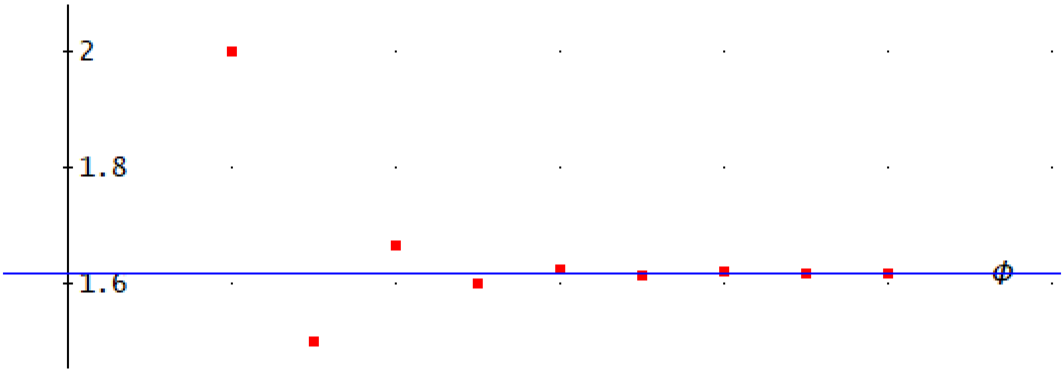
$$x = 1 + \cfrac{1}{\boxed{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}} = \mathbf{1.6} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1.6}} = \mathbf{1.625}$$

$$= \mathbf{1.6}$$

Costruiamo la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1.5 \\ 4 & 1.666666666 \\ 5 & 1.6 \\ 6 & 1.625 \\ 7 & 1.615384615 \\ 8 & 1.619047619 \\ 9 & 1.617647058 \\ 10 & 1.618181818 \end{bmatrix}$$

e diagrammiamola



Il diagramma è formato da una infinità di punti, le cui ordinate oscillano attorno al numero Φ e, man mano che aumentano vi si avvicinano sempre di più..

Questo metodo era usato da Diofanto per la soluzione di equazioni.

§3 DIOFANTO

Diofanto, matematico greco, vissuto tra il terzo secolo e il quarto secolo, è stato uno dei precursori dell'algebra; tra i suoi tanti interessi si dedicò alla soluzione di equazioni ed in particolare all'equazione

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{in cui } x, y, z, n \text{ sono numeri interi e } n \geq 2 \qquad (1)$$

- la (1), per n=2, porge tutte le terne pitagoriche e quindi Diofanto è stato precursore di Pitagora.

  OSSERVAZIONE: tutte le terne pitagoriche si ottengono dalle tre espressioni

$$a^2 - b^2 \quad ; \quad 2ab \quad ; \quad a^2 + b^2 \quad \text{con} \quad a > b > 0 \qquad (2)$$

infatti facilmente si verifica che la somma dei quadrati delle prime due espressioni risulta uguale al quadrato della terza espressione:

$$\left(a^2 - b^2\right)^2 + (2ab)^2 = \left(a^2 + b^2\right)^2 . \qquad (3)$$

La (2) è valida anche per $a < b$, ma visto che la terna (2) è riferita al teorema di Pitagora il quale porge una relazione tra i lati di un triangolo rettangolo, la condizione $a > b > 0$ assicura l'esistenza del triangolo stesso.

- la (1), per $n > 2$, porge l'ultimo teorema di Fermat e quindi Diofanto fu precursore anche di Fermat.

► Sulla sua tomba è scritto il seguente epitaffio:

« Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος· ἆ μέγα θαῦμα!
καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
Ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην,
δωδεκάτην δ' ἐπιθείς μῆλα πόρεν χνοάειν·
τῇ δ' ἄρ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτει.
Αἰαῖ, τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρός
σοῦ γ' ἐκάης δυεροῦ μέτρον ἑλὸν βιότου.
Πένθος δ' αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς

τῆδε πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε

la cui traduzione è

Questa tomba rinchiude Diofanto e, meraviglia!
dice matematicamente quanto ha vissuto.
Un sesto della sua vita fu l'infanzia,
aggiunse un dodicesimo perché le sue guance si coprissero della peluria dell'adolescenza.
Dopo un altro settimo della sua vita prese moglie,
e dopo cinque anni di matrimonio ebbe un figlio.
L'infelice (figlio) morì improvvisamente
quando raggiunse la metà dell'età che il padre ha vissuto.
Il genitore sopravvissuto fu in lutto per quattro anni
e raggiunse infine il termine della propria vita. »

L’equazione che risolve il problema è

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

la cui soluzione è

$$x = 84.$$

§4 LA STELLA D’ITALIA

Non solo nei numeri incontriamo il numero aureo.

La Nostra Repubblica, dal 5 maggio 1948 , ha il suo simbolo: *la stella d’Italia*.

Questo emblema fu scelto tra 800 bozzetti proposti da altrettanti cittadini, a seguito di un concorso voluto, nel 1946, dall’allora presidente del consiglio Alcide DE GASPERI che istituì una apposita commissione giudicatrice del concorso stesso.

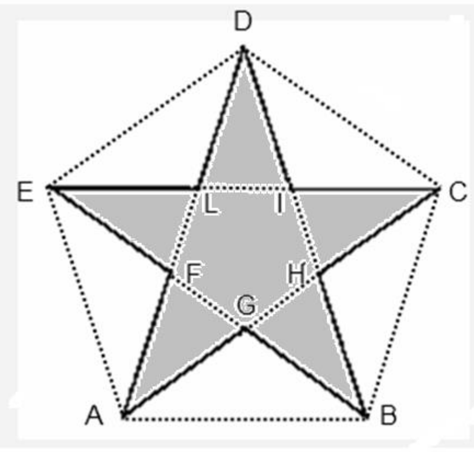
L'emblema della Repubblica Italiana è costituito da quattro elementi: la stella, la ruota dentata, il ramo di ulivo, il ramo di quercia.

- La stella, che è uno dei simboli più antichi del nostro patrimonio iconografico, è sempre stata adoperata a rappresentare l'Italia. Compare infatti nel simbolo del Risorgimento e così pure, fino al 1890, nello stemma del Regno.

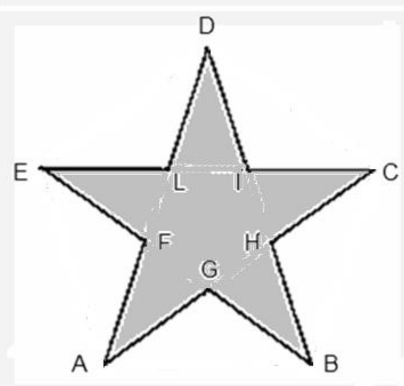
La stella esprime la prima onorificenza repubblicana della ricostruzione e ancora oggi indica l'appartenenza alle Forze Armate della Repubblica Italiana.

- La ruota dentata è il simbolo dell'attività lavorativa ed esprime il primo articolo della Costituzione Italiana: *l'Italia è una Repubblica democratica fondata sul lavoro*
- Il ramo di ulivo esprime la volontà di pace della Nazione.
- Il ramo di quercia, esprime la forza e la dignità del Popolo Italiano.

Ora poniamo l'attenzione sulla stella a cinque punte, in figura il decagono regolare concavo AGBHCIDLEF.



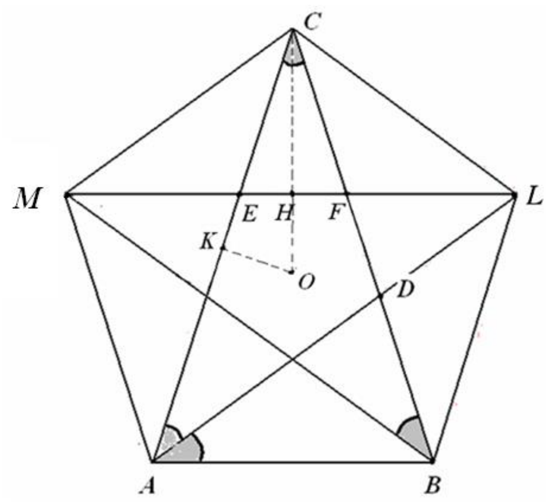
Come si rileva, la stella si ottiene tracciando le diagonali di un pentagono (convesso) regolare, e successivamente cancellando sia i lati del pentagono ABCDE che quelli del pentagono FGHIL



Tra le caratteristiche di questa figura piana risalta la relazione tra il lato ℓ (= LI) del pentagono FGHIL ed il lato $\mathcal{L}$ (= LD) della stella:

ℓ è la parte aurea di $\mathcal{L}$

Vediamo di dimostrare la precedente asserzione; allo scopo, consideriamo la seguente figura:



nella quale indichiamo con *O* il centro della circonferenza circoscritta al pentagono (non tracciata in figura). Prendiamo in esame il triangolo *ABC*; rileviamo che in esso l'angolo $A\hat{C}B$ è la decima parte dell'angolo giro, infatti trattasi di un angolo alla circonferenza che insiste sulla corda *AB*, sulla quale insiste anche l'angolo al centro $A\hat{O}B$ (non segnato in figura) che, come è ovvio è la quinta parte dell'angolo giro

Considerati i gradi sessagesimali, è $A\hat{C}B$ = 36°, ed essendo il triangolo *ABC* isoscele, è $C\hat{A}B = C\hat{B}A$ = 72°.

Ma, anche l'angolo $B\hat{A}L$ è angolo alla circonferenza che insiste sulla corda *BL* (lato del pentagono) e quindi è $B\hat{A}L$ =36°. Allora *AL* è bisettrice dell'angolo $C\hat{A}B$

Segue che i triangoli *ABD* e *ABC* sono simili, da cui la proporzione:

$$AC : AB = AB : BD$$

ma, *AB* = *AD*, quindi:

$$AC : AD = AD : BD$$

Indicato con $\mathcal{L}$, il lato del pentagono, come precedentemente fatto,

si ha

$$AC : \mathcal{L} = \mathcal{L} : (AC - \mathcal{L}),$$

da cui

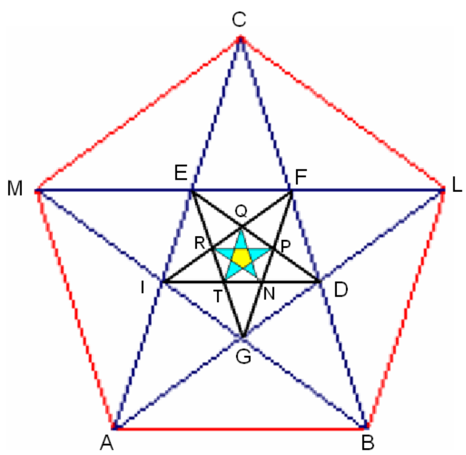
$$\mathcal{L}^2 + AC \cdot \mathcal{L} - AC^2 = 0 ,$$

la cui radice positiva è

$$\mathcal{L} = AC \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = AC \cdot \phi$$

Allora, *AB* è la parte aurea di *AC*, ed essendo *AB = AD*, *AD* è la parte aurea di *AC*; ma, il triangolo *MEC* è simile al triangolo *ALE*, e quindi *CE* è la parte aurea di *MC*, che è l'asserzione che volevamo dimostrare.

Tracciamo ora le diagonali del pentagono *EIGDF*; otteniamo un'altra stella a cinque punte; tracciamo nuovamente le diagonali del pentagono *RTNPQ*; otteniamo un'altra stella a cinque punte; possiamo quindi procedere in questo modo all'infinito nidificando sempre più piccole stelle a cinque punte.



In riferimento a questa ultima figura. Scriviamo:

- *CL* è sezione aurea di *BC*
- *CE* è sezione aurea di *CL*
- *EF* è sezione aurea di *CE*
- *EQ* è sezione aurea di *EF*
- *RQ* è sezione aurea di *EQ*

- e così di seguito

La successione di sezioni auree può continuare all'infinito, tracciando le diagonali dei pentagoni convessi ottenuti dalle intersezioni dei pentagoni precedenti.

Dato un pentagono convesso di lato $l_{1,}$ ci proponiamo di determinare la somma delle aree delle infinite stelle nidificate in questo pentagono, in funzione di l_1.

Ci riferiamo alla quarta figura, in cui è:

- $CF = CE = l_1$,
- $EF = l_1 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,
- $HF = EH = EK = l_1 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,
- $CH = \sqrt{l_1^2 - \left(l_1 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = l_1 \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

dalla similitudine dei triangoli *CKO* e *CHF*, possiamo scrivere.

$$\overline{CK} : \overline{CH} = \overline{CO} : \overline{CF}$$

$$l_1\left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) : l_1 \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = l_1 \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} + \overline{OH} : l_1$$

$$\overline{OH} = \frac{\sqrt{10\sqrt{5}+50}}{20} l_1 .$$

L'area A della stella è:

$$A = \frac{5}{2} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{OC} ,$$

quindi

$$A = \frac{\sqrt{10\sqrt{5}+50}}{20} l_1^2 .$$

Indichiamo rispettivamente con:

- l_i i lati dei pentagoni convessi,
- d_i le diagonali dei pentagoni convessi,
- s_i i lati delle stelle,

- A_i le aree delle stelle,

abbiamo:

$$l_1 = d_1 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$d_1 = l_1 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$s_1 = d_1 - l_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot l_1 - l_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot l_1$$

$$l_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot s_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot l_1\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot l_1$$

$$d_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot l_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot l_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot l_1$$

$$s_2 = d_2 - l_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot l_1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot l_1 = \left(\sqrt{5}-2\right) \cdot l_1$$

$$l_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot s_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \left(\sqrt{5}-2\right) \cdot l_1 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \cdot l_1$$

$$d_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot l_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \cdot l_1 = \left(\sqrt{5}-2\right) \cdot l_1$$

$$s_3 = d_3 - l_3 = \left(\sqrt{5}-2\right) \cdot l_1 - \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \cdot l_1 = \frac{5\sqrt{5}-11}{2} \cdot l_1$$

e così di seguito.

Per le aree è:

$$A_1 = \frac{\sqrt{10\sqrt{5}+50}}{20} l_1^2$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{10\sqrt{5}+50}}{20} l_2^2 = \frac{\sqrt{10\sqrt{5}+50}}{20} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot l_1\right)^2$$

$$A_3 = \frac{\sqrt{10\sqrt{5}+50}}{20} l_3^2 = \frac{\sqrt{10\sqrt{5}+50}}{20} \cdot \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \cdot l_1\right)^2$$

e così di seguito.

Le sequenze

- l_1 , l_2 , …., l_i , l_{i+1} , ….., l_n , …..

- d_1 , d_2 , …., d_i , d_{i+1} , ….. d_n , …..
- s_1 , s_2 , …., s_i , s_{i+1} , ….., s_n , …..

formano progressioni geometriche di ragione

$$q_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

analogamente la sequenza

- A_1 , A_2 , …., A_i , A_{i+1} ……, A_n , …..

forma una progressione geometrica di ragione

$$q_2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} ,$$

che, per la teoria della similitudine di figure geometriche piane, equivale a $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

La somma delle aree delle prime n stelle nidificate dentro al pentagono regolare convesso di lato l_1 è:

$$; \sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cdot \frac{1-q_2^n}{1-q_2} ;$$

ha senso determinare la somma delle aree delle infinite stelle perché la ragione della progressione è comprese tra 0 ed 1:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-q_2^n}{1-q_2} = A_1 \cdot \frac{1}{1-q_2}$$

Essendo

$$\frac{1}{1-q_2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

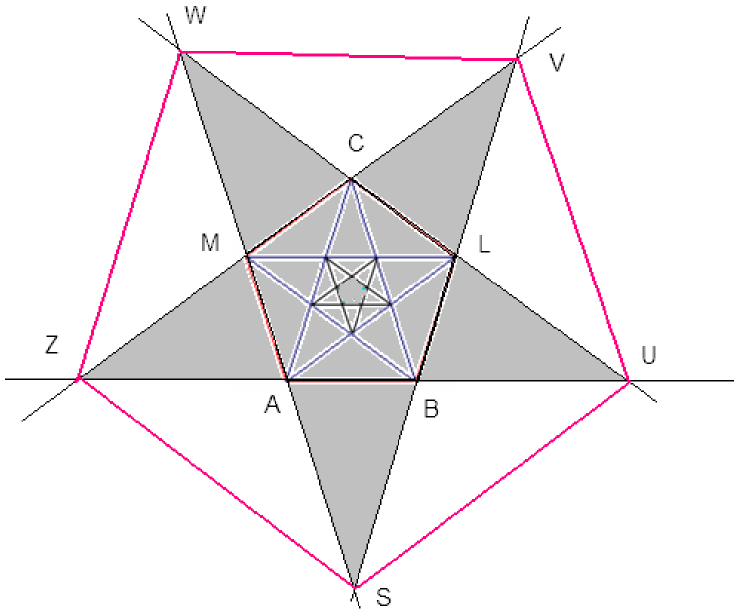
è

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \frac{\sqrt{10\sqrt{5}+50}}{20} l_1^2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{10\sqrt{5}+25}}{10} l_1^2$$

che, approssimata a 10 cifre, è 0.6881909602 l^2 .

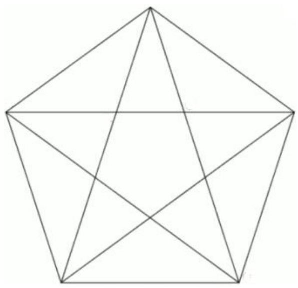
OSSERVAZIONE. Se prolunghiamo i lati del pentagono ABLCM, otteniamo la stella ASBULVCWMZ ;

E, se continuiamo a prolungare i lati dei pentagoni che hanno per vertici le punte delle stelle. otteniamo stelle sempre più grandi; vedi seguente figura:

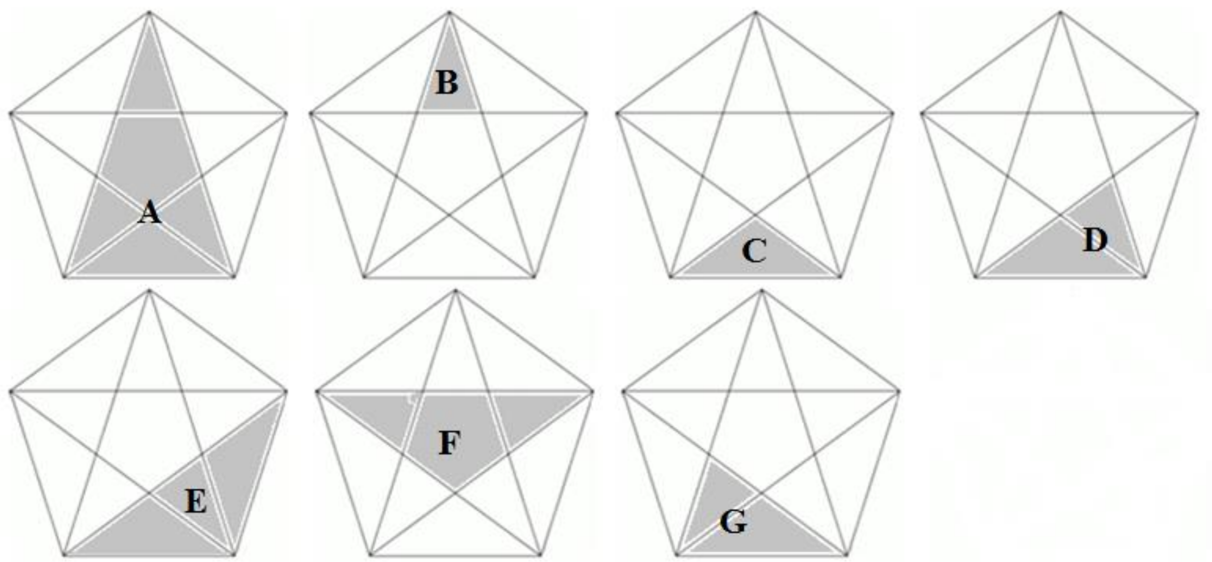


NOTA: anche la matematica è patriotica.

Infine, volendo determinare il numero dei triangoli presenti nella seguente figura



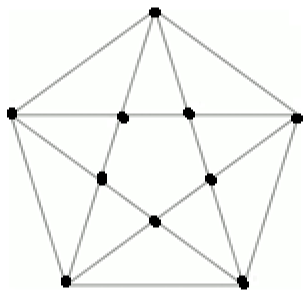
potremmo proporre la strategia di individuare tutte le **tipologie** di triangoli; esse sono riportate nelle seguenti figure, indicate con le lettere dell'alfabeto che vanno dalla A alla G.



Osserviamo che le tipologie sono 7 , e che per ognuna di esse vi sono 5 triangoli uguali, pertanto i triangoli che si possono estrarre dalla figura sono 35.

§5 CARATTERISICHE DELLE POLIGONALI

Riprendiamo la seguente figura



Indichiamo con:

- ***p*** i punti in cui si incontrano i segmenti,
- ***s*** i segmenti che collegano, a due a due, i punti,
- ***q*** le superfici elementari che formano il pentagono

ebbene, abbiamo:

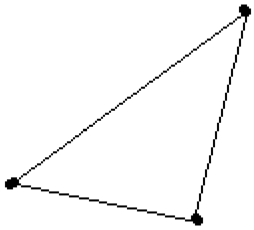
$p = 10; \quad s = 20; \quad q = 11.$

Esiste la relazione

$$p + q - s = 1 \qquad (\bullet)$$

La (●) non è un caso, ma vale per ogni poligono:

- per il triangolo:



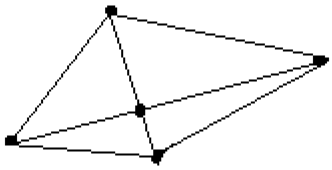
$p = 3$

$s = 3$

$q = 1$

$\rightarrow p + q - s = 3 + 1 - 3 = 1$

- per il quadrilatero:



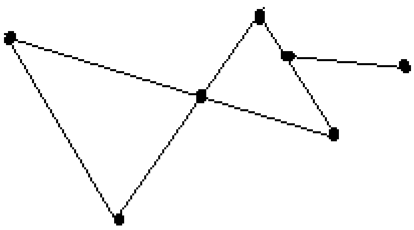
$p = 5$

$s = 8$

$q = 4$

$\rightarrow p + q - s = 5 + 4 - 8 = 1$

Quanto detto vale anche per qualunque poligonale

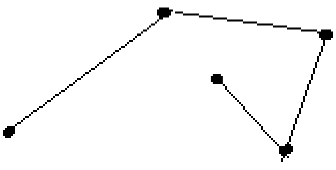


$p = 7$

$s = 8$

$q = 2$

$\rightarrow p + q - s = 7 + 2 - 8 = 1$



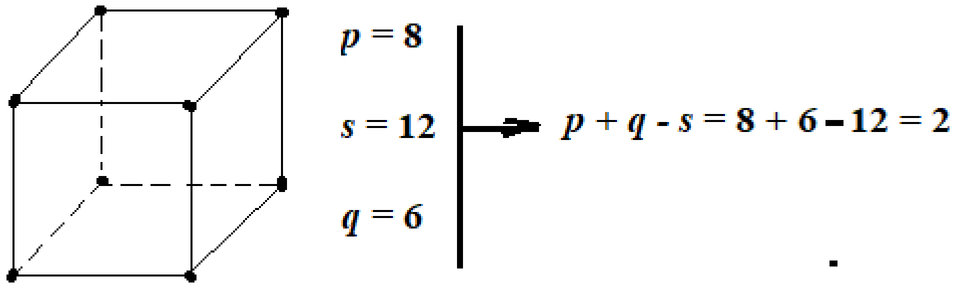
$p = 5$

$s = 4$

$q = 0$

$\rightarrow p + q - s = 5 + 0 - 4 = 1$

E, nello spazio tridimensionale?



Si ha una cosa similare alle poligonali del piano, ma è:

$$p + q - s = 2\,. \qquad\qquad (\textit{teorema di Eulero})$$

Allora nello spazio a 4 dimensioni sarà

$$p + q - s = 3$$

e in quello a cinque dimensioni sarà

$$p + q - s = 4$$

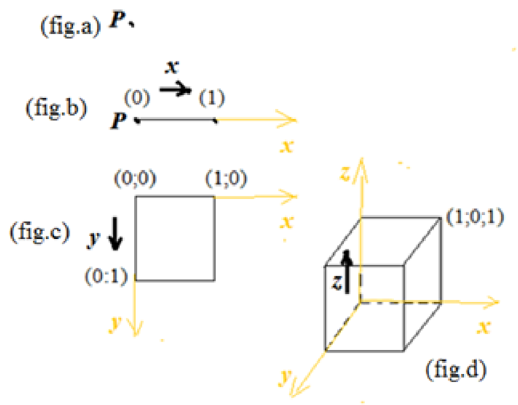
e, così di seguito?

Be', **non è così!** Proviamolo

Nella **geometria euclidea** le dimensioni sono sempre e solamente **intere** (dallo zero ad *n* qualunque). In uno spazio ad *n* dimensioni (ammettendo di poterlo immaginare), prendiamo un punto qualunque *P* (dimensione nulla) (fig.a) e trasliamolo in una stabilita direzione *x* di una quantità (per semplicità) unitaria; otteniamo un segmento (dimensione 1) (fig.b) nel quale ogni suo punto è individuato da una sola coordinata [se il punto *P*, estremo sinistro del segmento è considerato il punto zero *P*(0), l'altro estremo è espresso dall'ascissa (1)].

Trasliamo ora il segmento in una direzione *y*, perpendicolare ad *x* (fig.c), ottenendo così un quadrato (dimensione 2); ogni suo punto è univocamente individuato da una copia ordinata di numeri; in figura abbiamo segnato i punti (0;0), (0;1), (1;0).

Trasliamo ora, di una quantità unitaria, il quadrato secondo una direzione *z* perpendicolare alle due precedenti direzioni *x* ed *y*. Otteniamo un cubo (dimensione 3) (fig.d) in cui tutti i punti sono individuati da una terna ordinata di numeri; in figura abbiamo segnato il punto (1;0;1)



Indicando gli elementi che compongono le varie figure precedenti con le lettere:

- *p* i punti (estremi dei segmenti, vertici dei quadrati e dei cubi)
- *s* i segmenti (lati dei quadrati, spigoli dei cubi)
- *q* i quadrati (facce dei cubi)
- *c* i cubi,

possiamo costruire la seguente tabella

dimensione euclidea	elementi geometrici
0 (fig.a)	1 p
1 (fig.b)	2 p 1 s
2 (fig.c)	4 p 4 s 1 q
3 (fig.d)	8 p 12 s 6 q 1 c

che possiamo modificare come segue:

0	$\boxed{1}$
1	$\boxed{1}\cdot 2 + \boxed{1}$
2	$\boxed{1}\cdot 2^2 + \boxed{2}\cdot 2 + \boxed{1}$
3	$\boxed{1}\cdot 2^3 + \boxed{3}\cdot 2^2 + \boxed{3}\cdot 2 + \boxed{1}$

In questo secondo schema rileviamo che i coefficienti delle lettere *p*, *s*, *q* , *c* del precedente schema sono i termini dello sviluppo della potenza ennesima di (2+1) (con *n* variabile da 0 a 3) , considerato come fosse un binomio ; pertanto, ad esempio, l'ultima riga dello schema precedente si legge nel seguente modo.

Il **cubo** è formato da **sei quadrati** (facce), **dodici segmenti** (spigoli) e da **otto punti** (vertici).

Allora, continuando a calcolare (mediante il favoloso triangolo di **Tartaglia**) le righe successive del secondo schema (per esempio altre 3 righe), otteniamo:

4 $\boxed{1}\cdot 2^4 + \boxed{4}\cdot 2^3 + \boxed{6}\cdot 2^2 + \boxed{4}\cdot 2 + \boxed{1}$

5 $\boxed{1}\cdot 2^5 + \boxed{5}\cdot 2^4 + \boxed{10}\cdot 2^3 + \boxed{10}\cdot 2^2 + \boxed{5}\cdot 2 + \boxed{1}$

6 $\boxed{1}\cdot 2^6 + \boxed{6}\cdot 2^5 + \boxed{15}\cdot 2^4 + \boxed{20}\cdot 2^3 + \boxed{15}\cdot 2^2 + \boxed{6}\cdot 2 + \boxed{1}$

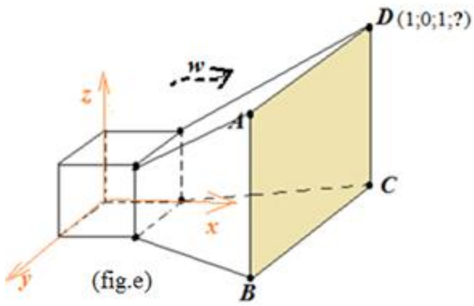
Così che si possono scrivere le 3 successive righe del primo schema:

4 (fig.e)			16 p	32 s	24 q	8 c	1 ip.c.q
5		32 p	80 s	80 q	40 c	10 ip.c.q	1 ip.c.p
6	64 p	192 s	240 q	160 c	60 ip.c.q	12 ip·c·p	1 ip.c.e

nel quale abbiamo indicato con:

- ip.c.q **ipercubo quartico** ovvero nello spazio a 4 dimensioni
- ip.c.p **ipercubo pentadimensionale** ovvero nello spazio a 5 dimensioni
- ip.c.e **ipercubo esadimensionale** ovvero nello spazio a 6 dimensioni.

Ovviamente risulta difficile immaginare queste figure, visto che già si riscontrano difficoltà nella rappresentazione di figure di dimensione 3 su supporti a due dimensioni (per esempio fogli di quaderno); quantunque proviamo a rappresentare sul foglio un ipercubo nello spazio di dimensione 4 (fig.e)



(fig.e)

In questa figura si immagina traslare il cubo della fig.d in una direzione *w*, perpendicolare alle precedenti direzioni *x*, *y*, *z*. Non riuscendo a rappresentare questa nuova direzione, la abbiamo rappresentata, con un po' di fantasia, con una freccia ondulata.

Ma, una cosa è certa: il contorno di una figura dello spazio *n* è formata da figure dello spazio *n* – 1 (es. il cubo è una figura di dimensione *n* =3; il suo contorno è formato da quadrati che hanno dimensione 2 (= 3 – 1))

Pertanto il contorno di un ipercubo dello spazio quadrimensionale è formato da cubi (dello spazio tridimensionale)

Nella fig.e abbiamo rappresentato un solo cubo di contorno, e siccome le facce del cubo di partenza sono 6, di questi cubi ne esistono 6. In più c'è il cubo formato dalle 6 facce uguali a quella colorata in figura, che addizionato ai 6 cubi precedenti, nonché a quello di partenza, otteniamo gli 8 cubi che si leggono nella riga intestata con "*dimensione* 4" dello schema.

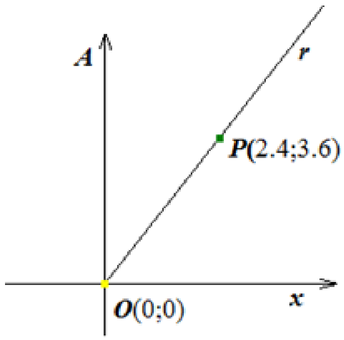
Osservazione1. *Ogni figura di grandezza n appartiene indubbiamente a qualunque spazio di dimensione maggiore; non è vero il viceversa.*

Osservazione2. Ogni punto dell'ipercubo dello spazio quadrimensionale è espresso da una quaterna ordinata di numeri. In fig.e abbiamo espresso con la quaterna (1; 0; 1, ?) le coordinate del punto *D*, dove in particolare abbiamo indicato la quarta coordinata col punto interrogativo per il fatto che ci manca l'informazione della direzione dell'ultima traslazione; una cosa, a mio avviso, è certa, che se la traslazione è, come abbiamo in precedenza fatto, unitaria, il punto interrogativo vale 0 oppure 1.

Osservazione3. Già nella scuola media inferiore l'allievo è abituato a rappresentare sul piano cartesiano l'area di un rettangolo, nota una delle sue dimensioni, in funzione dell'altra; per esempio, sapendo che un lato del rettangolo è 1.5 unità di misura lineare ,indicando con *A* l'area e con *x* la lunghezza del lato variabile, abbiamo:

$$A = 1.5x ,$$

la cui rappresentazione grafica sul piano cartesiano è la semiretta (privata dell'origine, visto che non contempliamo rettangoli degeneri) di pendenza 1.5.



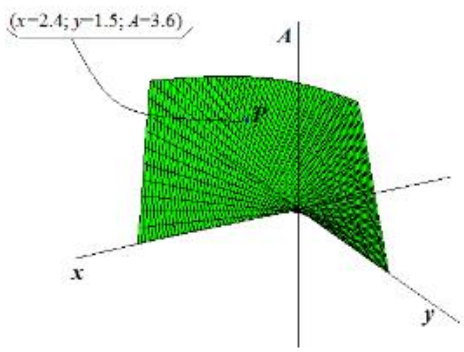
In figura abbiamo rappresentato il Punto *P*(2.4;3.6) la cui ordinata esprime l'area del rettangolo allorquando il lato variabile è 2.4.

Nel caso in cui sia incognita anche l'altra dimensione, indicata con la lettera *y*, l'equazione è:

$$A = xy .$$

Trattasi di una funzione a due variabili indipendenti e quindi per averne una rappresentazione grafica occorrono, oltre all'asse dell'area, gli assi delle due dimensioni lineari del rettangolo; siamo quindi nello spazio tridimensionale .

In particolare il grafico della funzione è una superficie dello spazio tridimensionale i cui punti rappresentano l'area del rettangolo al variare delle due dimensioni lineari *x*>0 e *y*>0; in figura abbiamo rappresentato, sulla sopradetta superficie, il punto *P* che rappresenta l'area del rettangolo pari a 3.6 unità quadratiche in funzione delle due dimensioni lineari 2.4 è 1.5.



E se volessimo rappresentare il volume V di un parallelepipedo di spigoli incogniti x, y, z, avremmo bisogno di quattro assi e quindi saremmo nello spazio *quadrimensionale*.

Allo stesso modo, se volessimo determinare il peso P del precedente parallelepipedo in virtù del materiale di cui è costituito, indicando con w il relativo peso specifico, anch'esso variabile, avremmo bisogno di uno spazio *pentadimensionale*.

Riscontriamo, pertanto, che inconsciamente, nel risolvere i diversificati problemi che spesso incontriamo, operiamo in spazi di dimensione maggiore allo spazio *tridimensionale*.

►Ora torniamo al problema sulla relazione che esiste tra $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{q}$ negli spazi a più di tre dimensioni:

- dalla quarta riga del triangolo di Tartaglia rileviamo che per l'ipercubo nello spazio a 4 dimensioni è:

  $$p = 2^4 = 16 \qquad s = 4 \cdot 2^3 = 32 \qquad q = 6 \cdot 2^2 = 24$$

  e quindi:

  $$p + q - s = 16 + 24 - 32 = 8\ ;$$

- determinare, mediante la quinta riga del triangolo di Tartaglia, la relazione $p + q - s$ esistente per ipercubi dello spazio a cinque dimensioni;
- analogamente per la sesta riga del suddetto triangolo.