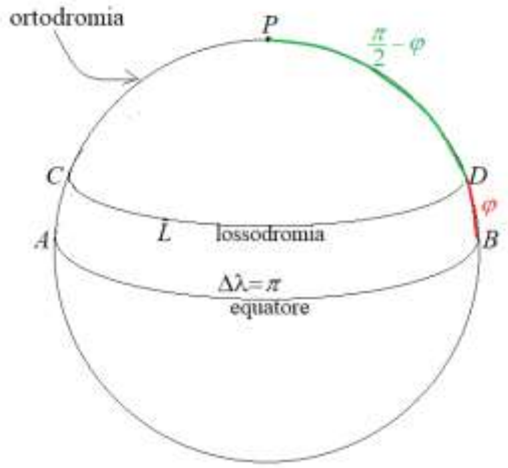
PROBLEMA

Nella seguente figura



sono rappresentati sulla Terra:

- uno dei due poli geografici *P*;
- l'arco equatoriale *AB* avente ampiezza $\Delta\lambda = \pi$;
- l'arco di parallelo *CLD* equivalente all'arco di equatore *AB*, di latitudine φ;
- l'arco di meridiano *CPD*.

Supponiamo che una nave debba andare dal punto *C* al punto *D* o viceversa, percorrendo:

1. il cammino lossodromico *CLD*;
2. il cammino ortodromico **(*)** *CPD*.

Determinare per quale latitudine φ si ha il massimo guadagno del cammino ortodromico rispetto a quello lossodromico.

(*) Ho chiamato *CPD* cammino ortodromico perché è un arco di circolo massimo minore di 180°; in realtà è simultaneamente un arco di "lossodromia degenere". Infatti percorrendo un meridiano la rotta della nave è sempre 0° (se si va verso Nord) o 180° (se si va verso SUD) e questo fatto soddisfa una parte di definizione di lossodromia. Il termine "degenere" serve quando si ha un caso limite: nel caso dei meridiani come lossodromie, l'angolo di rotta costante (0° o 180°) è un valore estremo, rendendo la curva una linea retta sulla superficie sferica (e non una curva gobba) lungo una direzione cardinale.

SOLUZIONE.

1. il cammino lossodromico *CLD* ha lunghezza $\pi \cdot \cos\varphi$,

NOTA I.

La **1.** proviene dalla relazione che lega matematicamente un arco di parallelo col simile arco di equatore.

In Fig.1 sono riportati l'arco $A'B'$ di parallelo ed il simile arco *AB* di equatore, il raggio $R = OB = OB'$ della sfera terrestre, il raggio $r = O'B'$ del parallelo, la latitudine $\varphi = B\hat{O}B'$ del parallelo considerato e la differenza di longitudine $\Delta\lambda = B\hat{O}A$ tra i punti *A* e *B*.

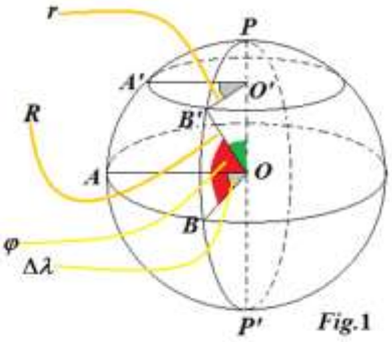
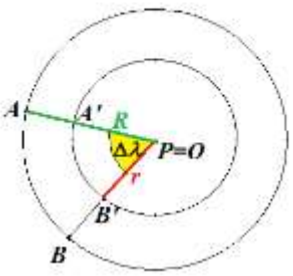


Fig.1

Il preliminare per determinare la relazione che lega l'arco di parallelo *A'B'* con il simile arco di equatore *AB* è la seguente proprietà geometrica: *il rapporto tra due archi di circonferenza simili appartenenti a due circonferenze aventi raggi diversi è uguale al rapporto tra i rispettivi raggi.*

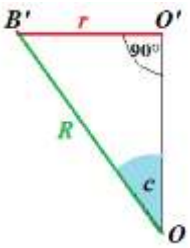
Nella seguente figura viene riportata la *Fig*.1 in proiezione ortografica equatoriale con punto di vista all'infinito, nel senso che va da P a P', dove P' è il polo opposto a P.



Da essa, per la precedente proprietà di geometria, è:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{R}{r}; \qquad (*)$$

Nella *Fig*.1 consideriamo il triangolo *B'O'O*, rettangolo in *O'*:



nel quale ***c*** è la colatitudine; dalle relazioni goniometriche degli elementi di un triangolo rettangolo, è:

$$r = R \cdot \sin c \quad \Rightarrow \quad r = R \cdot \cos\varphi$$

da cui:

$$\frac{R}{r}=\frac{1}{\cos\varphi} \qquad (**)$$

Dal confronto della (**) con la (*), à:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{1}{\cos\varphi},$$

da cui:

$$A'B'=AB\cdot\cos\varphi \qquad (***)$$

pertanto, "*la lunghezza di un arco di parallelo è uguale alla lunghezza del simile arco di equatore moltiplicata per il coseno della latitudine di quel parallelo*". Nel nostro caso la (***) diventa $CD=AB\cdot\cos\varphi$, e per i dati del problema risulta giustificata la relazione $CLD=\pi\cdot\cos\varphi$

2. il cammino ortodromico CPD ha lunghezza è $2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\pi-2\cdot\varphi$.

Indico con G il guadagno:

$$G(\varphi)=\pi\cdot\cos\varphi-\pi+2\cdot\varphi. \qquad (1)$$

Calcolo a quale latitudine si ha il massimo guadagno:

derivo la (1):

$$G'(\varphi)=-\pi\cdot\sin\varphi+2 \qquad (2)$$

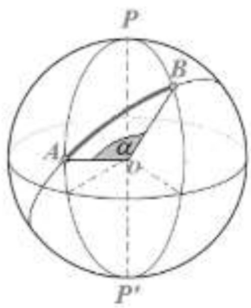
uguaglio la (2) a zero:

$$-\pi\cdot\sin\varphi+2=0 \quad\Rightarrow\quad \sin\varphi=\frac{2}{\pi} \quad\Rightarrow\quad \varphi\approx 0.6901070912rad\approx 39°32'25''.$$

Il valore trovato esprime il massimo[(*)] di G essendo la derivata seconda $G''(\varphi)=-\pi\cdot\cos\varphi$, in quel punto, negativa, infatti è:

$$G''(0.6901070912)=-\pi\cdot\cos 0.691070912\cong-2.422726646<0.$$

NOTA II.



In geometria sferica si dice ortodromia la linea che individua il cammino più breve tra due punti *A* e *B* di una superficie sferica, così è anche sulla superficie sferica terrestre; pertanto l'ortodromia è il minore dei due archi di circonferenza massima che hanno per estremi i due punti *A* e *B* ed è detta *distanza sferica*. Caso particolare: se i due punti *A* e *B* sono diametralmente opposti, i due punti dividono la circonferenza massima in due parti uguali, entrambe ortodromie. In riferimento alla figura possiamo dire che l'arco *AB* è una ortodromia se $A\hat{O}B = \alpha \leq 180°$.

PROVIAMO ORA IL RISULTATO DEL PROBLEMA.

Esprimiamo gli angoli in gradi sessagesimali:

ricordiamo che il miglio nautico è l'unità di misura di lunghezza utilizzata in navigazione marittima e aerea. Per convenzione internazionale, un miglio marino equivale a **1852 metri**, valore corrispondente approssimativamente ad un primo di circolo massimo ed ecco perché trasformiamo i radianti in gradi sessagesimali, e in particolare in primi; allora:

- la (1) diventa:

$$G(\varphi) = (180 \cdot 60)' \cdot \cos 39°32'25'' - (180 \cdot 60)' + 2 \cdot \left(39 \cdot 60 + 32 + \frac{25}{60}\right)' = 2273.547553\, mg,$$

- il cammino lossodromico è:

$$\pi \cdot \cos\varphi = (180 \cdot 60)' \cdot \cos 29°32'25'' = 8328.71422 mg,$$

- il cammino ortodromico è:

$$\pi - 2 \cdot \varphi = 6055.166667 mg.$$

Sottraiamo dal cammino lossodromico il cammino ortodromico che chiamiamo $G_1(\varphi)$:

$$G_1(\varphi) = 8328.71422 mg - 6055.166667 mg = 2273.547553 mg$$

segue:

$$G_1(\varphi) = G(\varphi).$$

(*) Se la derivata prima di una funzione $y = f(x)$ è nulla in un punto *a*, cioè $f'(a) = 0$, questo significa che in quel punto la retta tangente al grafico della funzione è orizzontale. Questo è un **punto critico** detto anche **punto stazionario**; esso potrebbe essere un massimo locale, un minimo locale o un punto di flesso orizzontale; interessiamoci solo dei massimi e minimi.

Ricordando che la derivata seconda $y = f''(a)$ fornisce informazioni sulla **concavità della curva**, si ha**:**

- se è $f''(a) < 0$, la concavità della curva (grafico di *f*) rivolge la concavità verso il basso in *a*, in *a* la curva ha un massimo relativo;
- se è $f''(a) > 0$, la concavità della curva (grafico di *f*) rivolge la concavità verso l'alto in *a*, in *a* la curva ha un minimo relativo.

Il problema dato ricade, tra i due casi, nel primo.