Dalle **effemeridi del 2017**, rilevo l'inizio del crepuscolo vespertino alla latitudine di 45°*N*, la più vicina tabulata a quella di **Camogli**, per i giorni riportati nella seguente tabella:

MESI	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
GIORNI	1. **21**	3. **11**	6. **11**	9. **11**	12. **11**	15. **11**	18. **11**
	2. **30**	4. **21**	7. **21**	10. **21**	13. **21**	16. **21**	19. **21**
		5. **31**	8. **31**	11. **30**	14. **31**	17. **30**	

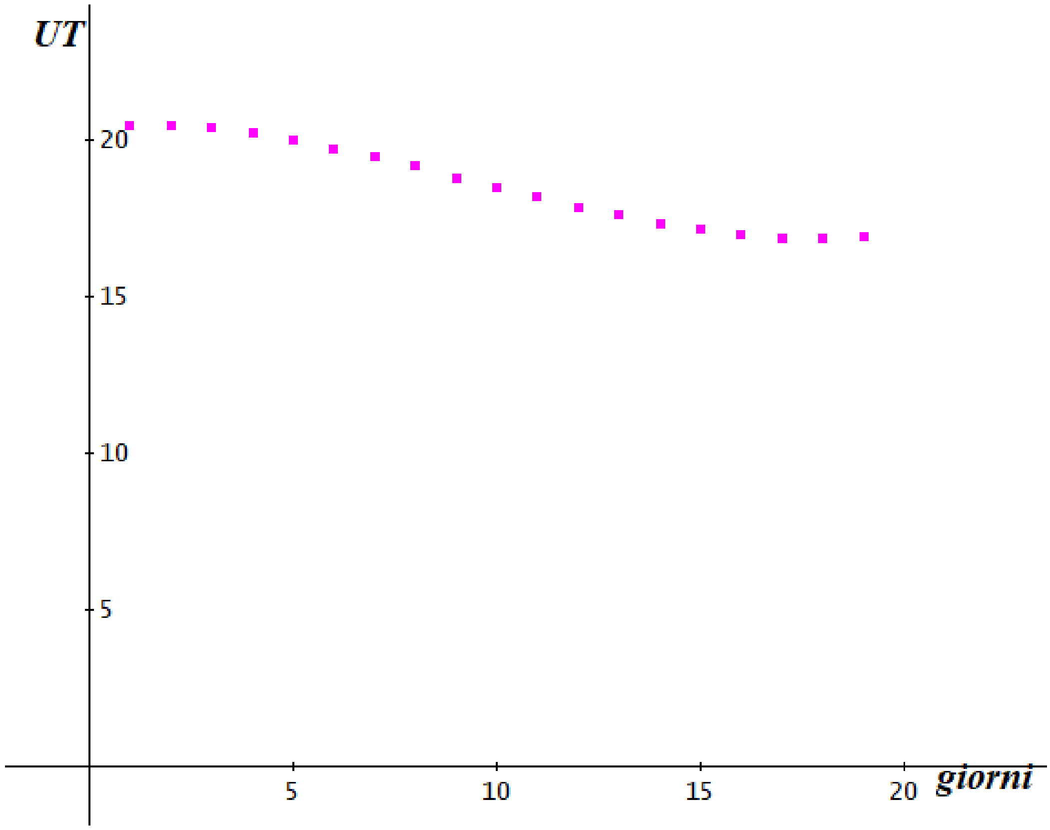
Le effemeridi, nelle pagine giornaliere, porgono nella tabella intestata "**Crep. Naut.**" l'inizio e la fine espressi in ore e minuti; per esempio nel giorno 21 giugno si legge per l'inizio il valore 20^h 28^m, ovvero $\left(20+\frac{28}{60}\right)^h$; questa forma di esprimere i valori da elaborare è quella che userò nell'ambiente Derive.6.

►Entro in ambiente Derive.6 e implemento la matrice riportante l'inizio del crepuscolo vespertino, per i giorni riportati nella precedente tabella; nella seconda colonna della matrice sono scritti gli istanti di inizio del crepuscolo vespertino, espressi in ore e frazioni di ora.

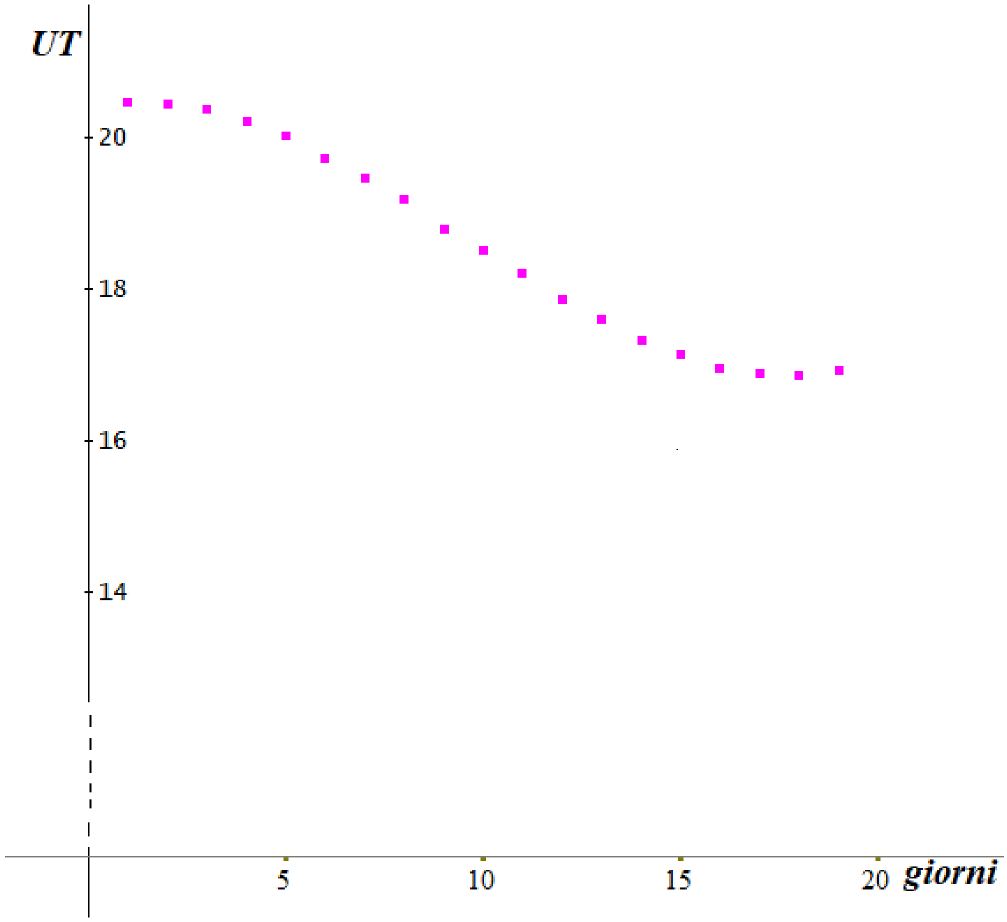
$$\#1: \begin{bmatrix} 1 & 20+\frac{28}{60} \\ 2 & 20+\frac{27}{60} \\ 3 & 20+\frac{23}{60} \\ 4 & 20+\frac{13}{60} \\ 5 & 20+\frac{1}{60} \\ 6 & 19+\frac{43}{60} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 19+\frac{28}{60} \\ 8 & 19+\frac{11}{60} \\ 9 & 18+\frac{48}{60} \\ 10 & 18+\frac{31}{60} \\ 11 & 18+\frac{13}{60} \\ 12 & 17+\frac{51}{60} \\ 13 & 17+\frac{36}{60} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 17+\frac{19}{60} \\ 15 & 17+\frac{8}{60} \\ 16 & 16+\frac{57}{60} \\ 17 & 16+\frac{53}{60} \\ 18 & 16+\frac{52}{60} \\ 19 & 16+\frac{56}{60} \end{bmatrix}$$

Derive è veramente un ottimo software matematico che riesce utile per tutte le discipline, anche non strettamente scientifiche.

Ed allora entro in "Grafica 2D" e diagrammo i dati della matrice



Posso variare la scala in ordinata a piacere al fine di avere una migliore sensazione della variabilità dei dati



Il grafico è formato da una distribuzione di punti (per i dati grezzi, in statistica, si parla anche di "*nuvola di punti*").

Desidero determinare una funzione il cui grafico sia una curva che, nell'intervallo del dominio di questa distribuzione di punti, possa sostituirsi ad essi con buona approssimazione.
Il procedimento più attendibile è il "*metodo dei minimi quadrati*".

Questo metodo è mirabilmente risolto da DERIVE mediante il seguente programma

"FIT ([variabile d'azione, espressione approssimante], vettore coppie dati)"

Ho provato le funzioni algebriche

- $a \cdot x + b$
- $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
- $a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

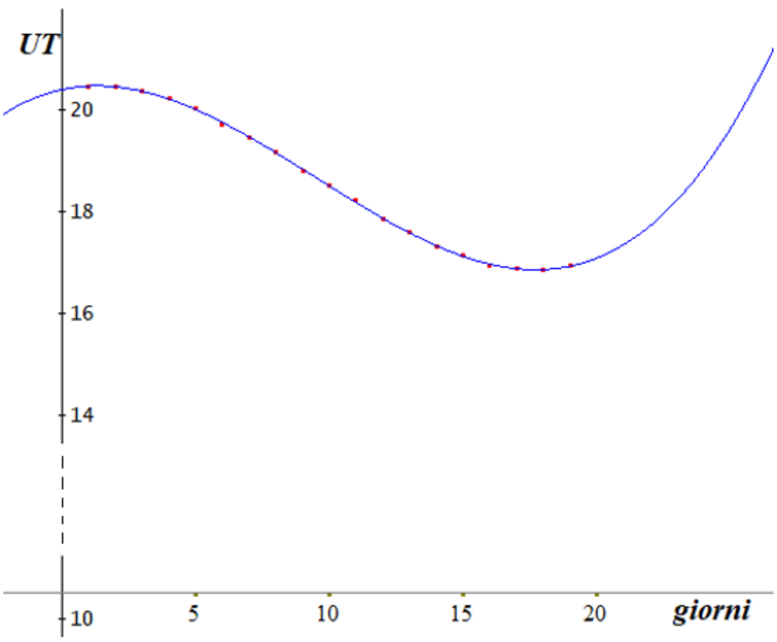
e sono rimasto soddisfatto della cubica, che è quella che riporto:

$$\mathrm{FIT}\left(\left[x,\ a\cdot x^{3}+b\cdot x^{2}+c\cdot x+d\right],\ \begin{bmatrix} 1 & 20+\frac{28}{60} \\ 2 & 20+\frac{27}{60} \\ 3 & 20+\frac{23}{60} \\ 4 & 20+\frac{13}{60} \\ 5 & 20+\frac{1}{60} \\ 6 & 19+\frac{43}{60} \\ 7 & 19+\frac{28}{60} \\ 8 & 19+\frac{11}{60} \\ 9 & 18+\frac{48}{60} \\ 10 & 18+\frac{31}{60} \\ 11 & 18+\frac{13}{60} \\ 12 & 17+\frac{51}{60} \\ 13 & 17+\frac{36}{60} \\ 14 & 17+\frac{19}{60} \\ 15 & 17+\frac{8}{60} \\ 16 & 16+\frac{57}{60} \\ 17 & 16+\frac{53}{60} \\ 18 & 16+\frac{52}{60} \\ 19 & 16+\frac{56}{60} \end{bmatrix}\right)$$

In esecuzione, ottengo la seguente cubica

$$\#3:\quad \frac{6271\cdot x^{3}}{3837240}-\frac{52168\cdot x^{2}}{1119195}+\frac{3033473\cdot x}{26860680}+\frac{1186193}{58140}$$

Col bottone “Finestra Grafica 2D” entro nell’ambiente grafico; successivamente illumino, col mouse, l’espressione #3 e clicco il bottone “Traccia il Grafico”, ed ecco il tracciamento della curva, grafico della funzione #3



Ovviamente questa funzione è buona per le *interpolazioni*, ma non per le *extrapolazioni*.

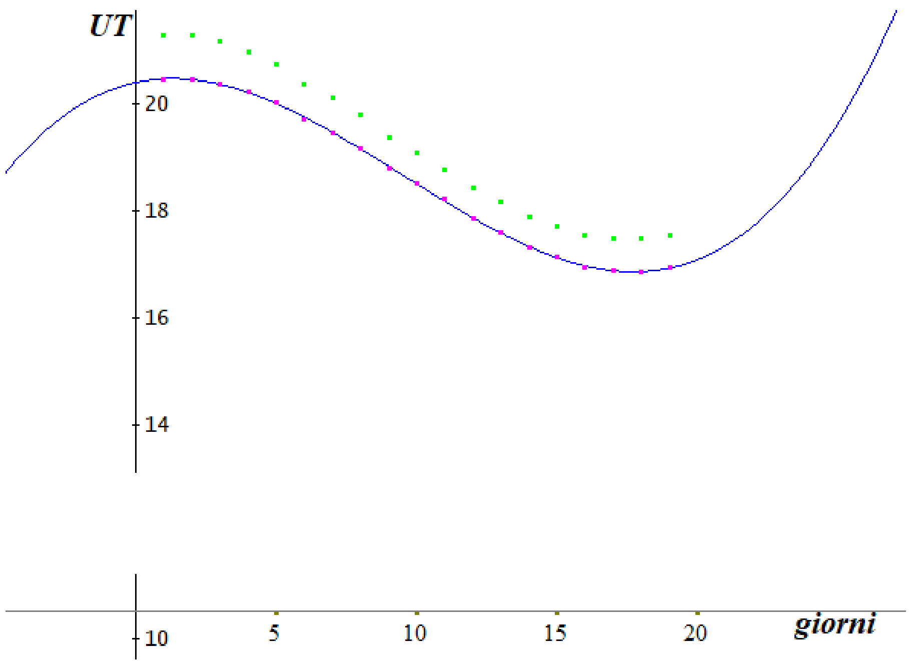
Posso determinare l'istante (approssimato) dell'inizio del crepuscolo vespertino in un giorno qualunque compreso tra il 21 giugno e il 21 settembre dell'anno 2017.

Forse è possibile accettare anche il risultato per estrapolazione, ma per giorni molto vicini a quelli sopradetti, perché la curva al di fuori del dominio della nuvola di punti va per conto suo e non è per niente più significante.

►Implemento la matrice che riporta la fine del crepuscolo vespertino, per gli stessi giorni; allo scopo riporto nella seconda colonna della matrice gli istanti della fine del crepuscolo vespertino, espressi in ore e frazioni di ora:

$$\#4: \begin{bmatrix} 1 & 21+\frac{18}{60} \\ 2 & 21+\frac{17}{60} \\ 3 & 21+\frac{11}{60} \\ 4 & 20+\frac{58}{60} \\ 5 & 20+\frac{44}{60} \\ 6 & 20+\frac{23}{60} \\ 7 & 20+\frac{6}{60} \\ 8 & 19+\frac{48}{60} \\ 9 & 19+\frac{23}{60} \\ 10 & 19+\frac{5}{60} \\ 11 & 18+\frac{47}{60} \\ 12 & 18+\frac{25}{60} \\ 13 & 18+\frac{10}{60} \\ 14 & 17+\frac{53}{60} \\ 15 & 17+\frac{43}{60} \\ 16 & 17+\frac{33}{60} \\ 17 & 17+\frac{30}{60} \\ 18 & 17+\frac{29}{60} \\ 19 & 17+\frac{33}{60} \end{bmatrix}$$

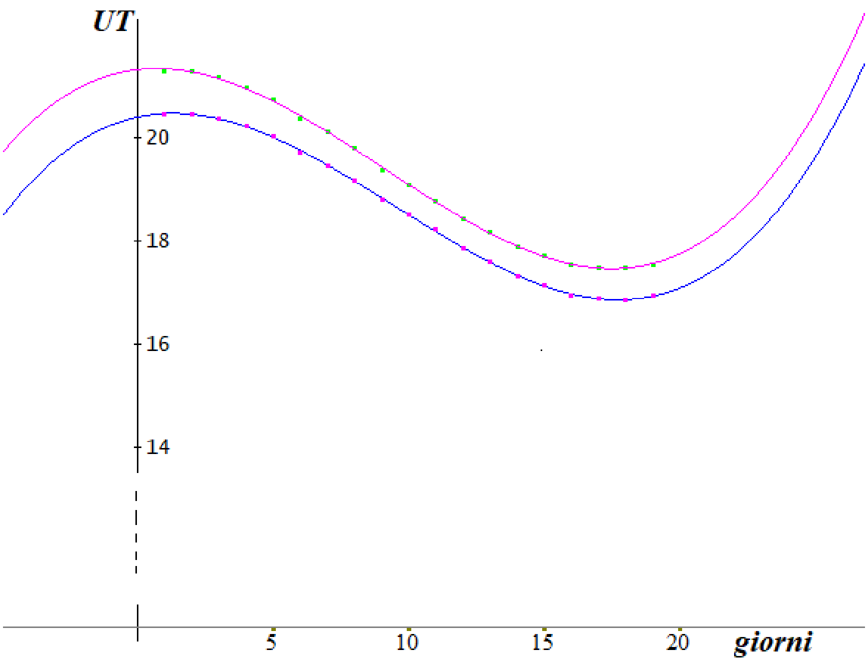
Ed allora entro in "Grafica 2D" e diagrammo i dati della matrice, ancora sul precedente ambiente "2D"



Allo stesso modo adoperato precedentemente, determino la funzione che approssima la seconda distribuzione di punti ed ottengo la cubica

$$\#5: \quad \frac{12557 \cdot x^3}{7674480} - \frac{99817 \cdot x^2}{2238390} + \frac{3177379 \cdot x}{53721360} + \frac{275473}{12920}$$

Ed ecco il nuovo grafico definitivo



La domanda viene spontanea: perché tutto questo? Ebbene ho lavorato sull'intervallo di tempo della durata del crepuscolo, in particolare quello vespertino (ma lo stesso può essere fatto per quello mattutino) perché credo che questi intervalli sono legati agli angoli con cui la traiettoria del Sole incide l'orizzonte astronomico.

Riporto la matrice in cui risulta la durata del crepuscolo vespertino alla latitudine $\varphi = 45°N$, ottenuto per differenza dei dati nelle seconde colonne della matrice #4 e #1

#6:

giorni	differenza in minuti
1	50
2	50
3	48
4	45
5	43
6	40
7	38
8	37
9	35
10	34
11	34
12	34
13	34
14	34
15	35
16	36
17	37
18	37
19	37

Confronto la prima ed ultima differenza della matrice #6 con gli angoli *j* di incidenza (già determinati in altro file) della traiettoria del Sole con l'orizzonte vero:

1. al *solstizio d'estate* risulta $J \approx 40°21'$ e *durata crepuscolo* = 50^m
2. all'*equinozio di autunno* risulta $J \approx 45°38'$ e *durata crepuscolo* = 37^m

Può quindi concludersi:

- **più l'angolo di incidenza *J* diminuisce, più aumenta la durata crepuscolare,**
- **più l'angolo di incidenza *J* aumenta, più diminuisce la durata crepuscolare,**