

AREA DI LINEE D'ACQUA E VOLUMI DI CARENA: INTEGRAZIONE NUMERICA.

L'integrazione numerica consiste nel calcolare un valore approssimato dell'area di una superficie o il valore approssimato del volume di un solido.

Consideriamo il caso delle aree.

Vogliamo, per esempio, determinare l'area compresa tra una curva γ e l'asse delle ascisse, in un dato intervallo $[a, b]$, supponendo che la curva sia tutta posizionata nel semipiano $y \geq 0$.

Ovviamente se la curva ha nota equazione $y = f(x)$, facilmente integrabile, l'area è uguale ad un numero (espresso in una conveniente unità di misura) determinato dall'integrazione definita in un intervallo $[a, b]$:

$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx.$$

I metodi approssimati si usano quando la curva è empirica e pertanto priva di equazione o quando pur essendo sorretta da una legge matematica, questa è di difficile integrazione.

1. Metodo dei rettangoli

L'area che vogliamo determinare è quella rappresentata nella fig.1

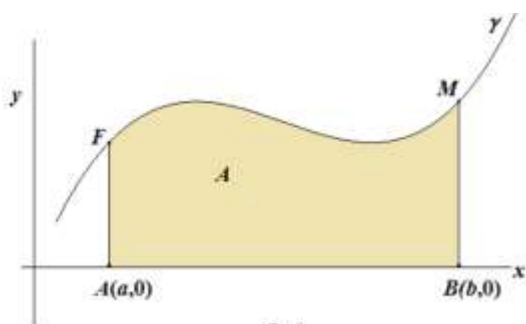


fig.1

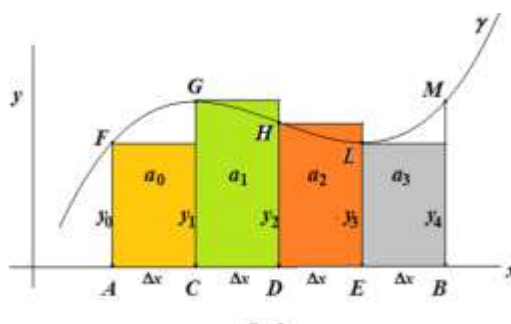


fig.2

Possiamo approssimare l'area reale incognita mediante la seguente strategia: dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in un numero n di intervalli, per convenienza, tutti tra loro uguali, di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e, ad ogni intervallo facciamo corrispondere un rettangolo, come nella fig.2; l'area cercata è l'area del *plurirettangolo* così costruito.

L'indice delle ordinate parte dal numero zero; con questo accorgimento, l'indice dell'ultima ordinata indica il numero dei rettangoli di suddivisione dell'area da determinare; nel caso della fig.2, essendo 4 i rettangoli, è:

$$\begin{aligned} A_{\text{approssimaa}} &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \Delta x \cdot y_0 + \Delta x \cdot y_1 + \Delta x \cdot y_2 + \Delta x \cdot y_3 = \\ &= \Delta x \cdot (y_0 + y_1 + y_2 + y_3) \end{aligned}$$

Se le suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$ sono n , l'equazione generale è:

$$A_{\text{approssimaa}} = \Delta x \cdot (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-2} + y_{n-1})$$

Osservazione.

Si otterrebbe un valore più approssimato se si usasse il **metodo del punto medio** ovvero imponendo che ogni rettangolo di base Δx avesse per altezza l'ordinata corrispondente al punto medio dell'intervallo; ma quell'ordinata non è di solito disponibile ed allora si può escogitare il seguente metodo:

- si assume per altezza di ogni rettangolo l'ordinata all'inizio dell'intervallo,

$$A_{\text{approssimaa}}^1 = \Delta x \cdot (y_0 + y_1 + y_2 + y_3);$$

- si assume per altezza di ogni rettangolo l'ordinata alla fine dell'intervallo,

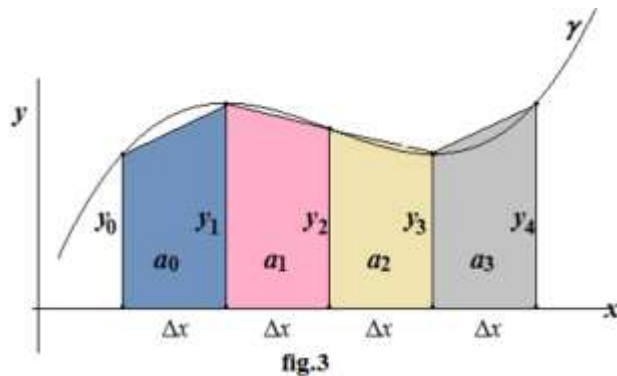
$$A_{\text{approssimaa}}^2 = \Delta x \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

- si assume l'approssimazione dell'area come media aritmetica delle precedenti aree

$$A_{\text{approssimaa}} = \frac{A_{\text{approssimaa}}^1 + A_{\text{approssimaa}}^2}{2}$$

2. Metodo dei trapezi o di Bezout

Si opera la divisione come nel caso precedente e si determina l'area approssimata mediante un *pluritrapezio*, come nella fig.3:



Nel caso dell'esempio i trapezi sono 4 e quindi è:

$$\begin{aligned} A_{\text{approssimaa}} &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \Delta x \cdot \frac{y_0 + y_1}{2} + \Delta x \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} + \Delta x \cdot \frac{y_2 + y_3}{2} + \Delta x \cdot \frac{y_3 + y_4}{2} = \\ &= \Delta x \cdot \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \frac{y_3 + y_4}{2} \right) = \Delta x \cdot \left(\frac{y_0 + y_4}{2} + y_1 + y_2 + y_3 \right) \end{aligned}$$

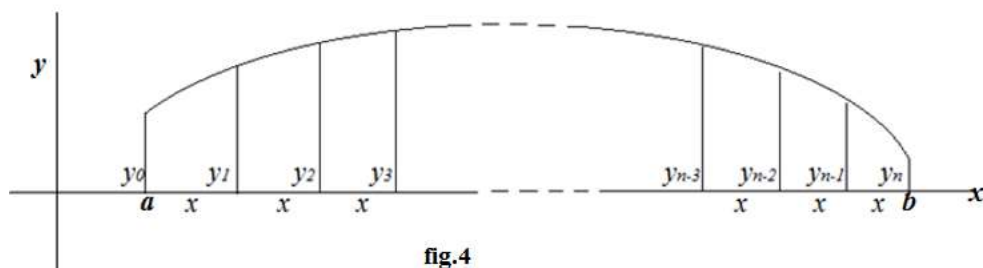
Se le suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$ sono n , l'equazione generale è:

$$A_{\text{approssimaa}} = \Delta x \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-2} + y_{n-1} \right)$$

OSSERVAZIONE. Nella fig.3 i primi due trapezi approssimano per difetto, mentre i successivi approssimano per eccesso; ciò è dovuto al fatto che i primi due trapezi approssimano un'area il cui contorno superiore della curva rivolge la concavità verso il basso mentre gli altri due approssimano un'area il cui contorno superiore della curva rivolge la concavità verso l'alto; pertanto l'approssimazione risulta sempre per difetto o per eccesso rispettivamente se la curva rivolge la concavità verso il basso o verso l'alto.

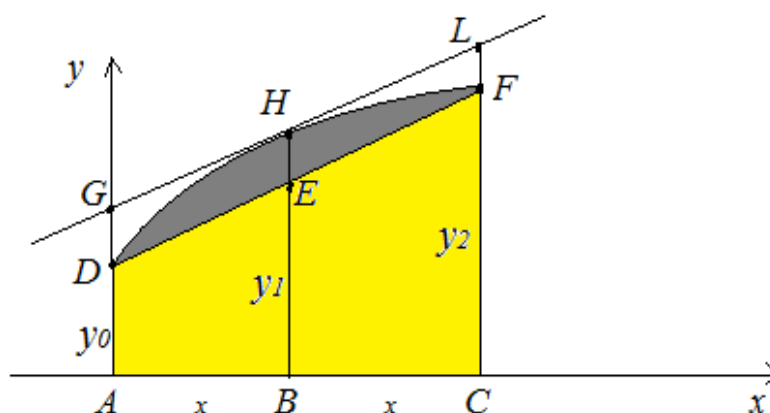
3. Metodo dei segmenti parabolici o di Cavalieri-Simpson

Consideriamo una curva che rivolga la concavità verso il basso ed operiamo con la stessa strategia dei casi precedenti, con l'accorgimento di fare una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in numero pari cioè: $n = 2 \cdot m$, dove m è un numero naturale, scelto a seconda della precisione desiderata nell'approssimazione.



Simpson considera le suddivisioni della superficie a 2 a 2, ed è per questo che il numero delle suddivisioni deve essere un numero pari (per semplicità indichiamo con x l'ampiezza di ciascuna suddivisione dell'intervallo $[a, b]$).

In particolare riferiamoci alle prime due suddivisioni della fig.4, perché il procedimento che utilizzeremo per determinare l'area della prima coppia di rettangoloidi sarà la stessa usata per tutte le successive coppie.



L'area che dobbiamo determinare è la somma dell'area del trapezio $ACFD$ con l'area della lunula $DEFH$.

L'area del trapezio è A

$$A_{\text{trapezio}} = \frac{y_0 + y_2}{2} \cdot 2 \cdot x \quad (1)$$

Allo stesso modo per le due successive suddivisioni

$$\frac{x}{3} \cdot (y_2 + 4 \cdot y_3 + y_4)$$

e così è anche per le due successive

$$\frac{x}{3} \cdot (y_4 + 4 \cdot y_5 + y_6)$$

fino alle ultime due

$$\frac{x}{3} \cdot (y_{n-2} + 4 \cdot y_{n-1} + y_n).$$

Addizioniamo, rilevando che:

- la prima e l'ultima ordinata compaiono una volta sola, quindi hanno coefficiente 1,
- le ordinate con indice dispari hanno coefficiente 4,
- le ordinate con indice pari hanno coefficiente 2,

si ottiene l'equazione che porge l'area approssimata del metodo di Simpson:

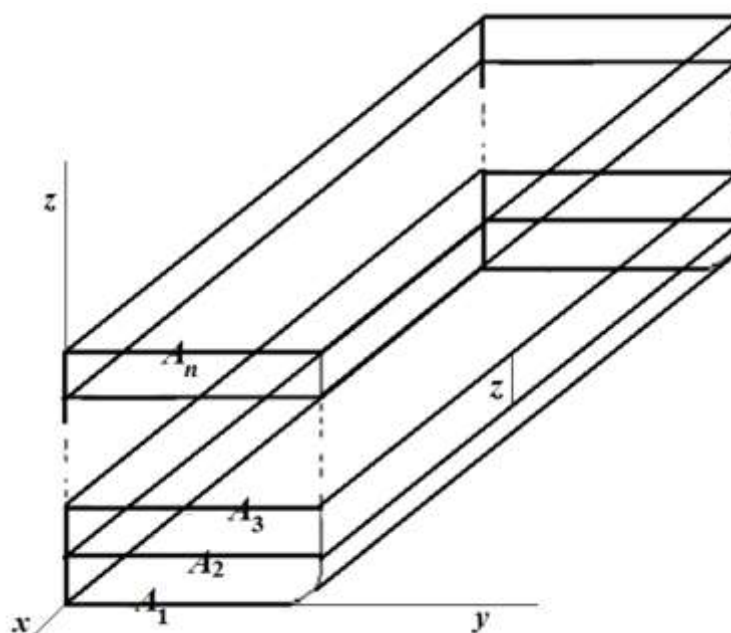
$$A_{\text{approssimata}} = \frac{x}{3} \cdot [y_0 + 4 \cdot (y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n]$$

APPROSSIMAZIONE DI VOLUMI

Per quanto concerne l'approssimazione dei volumi di solidi, basterà sostituire nelle equazioni delle aree approssimate dei vari metodi visti:

- le aree A_i al posto delle ordinate y_i ;
- delle ampiezze Δx o semplicemente x dell'intervallo di suddivisione l'ampiezza di suddivisione nella direzione scelta.

Nella figura è riportata un prototipo di carena in cui abbiamo scelto la suddivisione del volume nel senso dell'altezza, indicata con z :



per cui abbiamo:

- a. col metodo dei rettangoli:

$$V_{\text{approssimato}} = z \cdot (A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-2} + A_{n-1})$$

- b. col metodo dei trapezi:

$$V_{\text{approssimato}} = z \cdot \left(\frac{A_0 + A_n}{2} + A_1 + A_2 + \dots + A_{n-2} + A_{n-1} \right)$$

- c. Col metodo dei segmenti parabolici:

$$V_{\text{approssimato}} = \frac{z}{3} \cdot [A_0 + 4 \cdot (A_1 + A_3 + \dots + A_{n-1}) + 2 \cdot (A_2 + A_4 + \dots + A_{n-2}) + A_n]$$

Esempio di calcolo di area di una semi linea d'acqua.

Per semplificare i calcoli, consideriamo una porzione di una semi-larghezza di una linea d'acqua, intorno alla sezione maestra pari a 4.2 m. Pertanto sono fornite solamente le semi-larghezze a distanze di 8 m dalla sezione maestra:

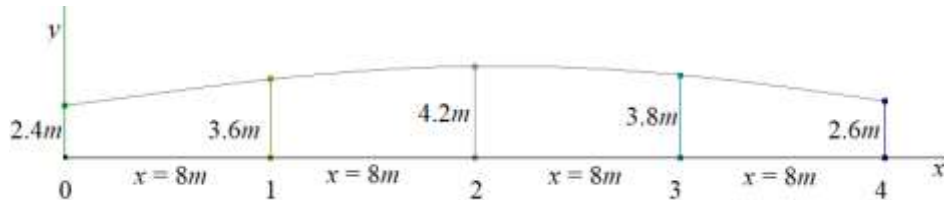
- due sezioni verso poppa con semi-larghezze rispettivamente di 3.6 m e 2.4 m,
- due sezioni verso prora con semi-larghezze rispettivamente di 3.8 m e 2.6 m.

Si richiede di determinare l'area della di questa sola porzione della semi-superficie di galleggiamento utilizzando i seguenti metodi di quadratura:

- Metodo dei rettangoli
- Metodo di Bezout (o dei trapezi)
- Metodo di Cavalieri-Simpson

Soluzione

Ci riferiamo alla seguente figura



- Metodo dei rettangoli

$$A_{\text{approssimaa}} = 8 \cdot (2.4 + 3.6 + 4.2 + 3.8) m^2 = 112 m^2.$$

Variante, col metodo approssimato del punto medio

Già sappiamo che $A_{\text{approssimaa}}^1 = 112 m^2$

calcoliamo $A_{\text{approssimaa}}^2$

$$A_{\text{approssimaa}}^2 = 8 \cdot (3.6 + 4.2 + 3.8 + 2.6) m^2 = 113.6 m^2$$

ed allora

$$A'_{\text{approssimaa}} = \frac{112 + 113.6}{2} m^2 = 112.8 m^2$$

- Metodo di Bezout (o dei trapezi)

$$A_{\text{approssimaa}} = 8 \cdot \left(\frac{2.4 + 2.6}{2} + 3.6 + 4.2 + 3.8 \right) m^2 = 112.8 m^2$$

- Metodo di Cavalieri-Simpson

$$A_{\text{approssimaa}} = \frac{8}{3} \cdot [2.4 + 4 \cdot (3.6 + 3.8) + 2 \cdot 4.2 + 2.6] m^2 = 114.7 m^2$$

Tutto ciò che ho scritto era parte integrante del programma di Teoria della nave. Durante le verifiche in classe, fino agli anni 70, tutti i calcoli venivano eseguiti manualmente, con l'ausilio al

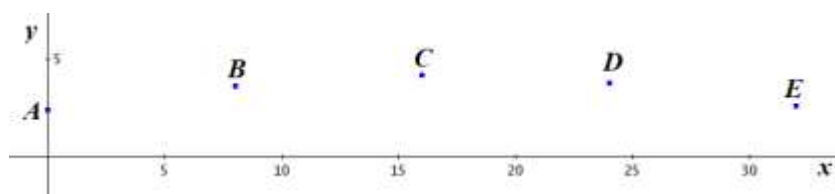
massimo delle tavole dei quadrati e delle radici quadrate. Solo a partire dal 1970 si diffuse l'uso della calcolatrice tascabile.

Nei cantieri navali moderni, invece, la determinazione della superficie delle linee d'acqua e dei volumi di carena avviene tramite software specifici che garantiscono grande rapidità e un'eccellente approssimazione.

► Risolviamo il precedente problema scolasticamente determinando l'equazione del polinomio passante per i punti riportati nella seguente matrice, implementata nel software DERIVE6.1

PUNTI	ASCISSA	ORDINATA
A	0	2.4
B	8	3.6
C	16	4.2
D	24	3.8
E	32	2.6

diagrammiamo questi punti sul piano cartesiano



Ora scriviamo l'equazione polinomiale il cui grafico vogliamo che passi per questi 5 punti; l'equazione polinomiale richiesta è di quarto grado, che implementiamo:

$$y = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

Imponiamo la condizione che il grafico del polinomio passi per i punti A, B, C, D, E, ed allora per la condizione di appartenenza di un punto ad una curva, è:

$$2.4 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$$

$$3.6 = a \cdot 8^4 + b \cdot 8^3 + c \cdot 8^2 + d \cdot 8 + e$$

$$4.2 = a \cdot 16^4 + b \cdot 16^3 + c \cdot 16^2 + d \cdot 16 + e$$

$$3.8 = a \cdot 24^4 + b \cdot 24^3 + c \cdot 24^2 + d \cdot 24 + e$$

$$2.6 = a \cdot 32^4 + b \cdot 32^3 + c \cdot 32^2 + d \cdot 32 + e$$

mettiamo a sistema le 5 equazioni

$$\begin{aligned}
 2.4 &= a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e \wedge 3.6 = a \cdot 8^4 + b \cdot 8^3 + c \cdot 8^2 + d \cdot 8 + e \wedge 4.2 = a \cdot 16^4 + b \cdot 16^3 + c \cdot 16^2 + \\
 &d \cdot 16 + e \wedge 3.8 = a \cdot 24^4 + b \cdot 24^3 + c \cdot 24^2 + d \cdot 24 + e \wedge 2.6 = a \cdot 32^4 + b \cdot 32^3 + c \cdot 32^2 + d \cdot 32 + e
 \end{aligned}$$

Nota. Il simbolo $\wedge$ significa simultaneità e quindi inserito tra una equazione e la successiva ha il significato del tradizionale simbolo di sistema, ovvero della parentesi graffa $\{$.

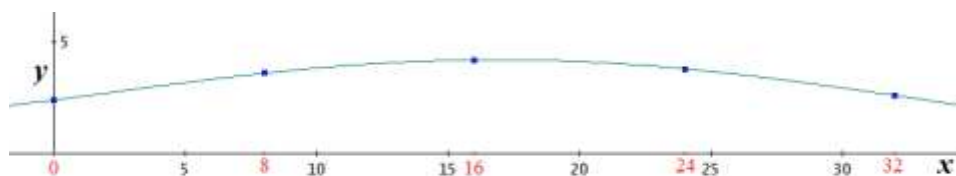
Col comando “Risolvi sistema nel campo reale”, in esecuzione otteniamo.

$$a = \frac{3}{163840} \wedge b = -\frac{13}{10240} \wedge c = \frac{61}{2560} \wedge d = -\frac{11}{160} \wedge e = \frac{16}{5}$$

che andiamo a sostituire

$$y = \frac{x^4}{163840} - \frac{13 \cdot x^3}{30720} + \frac{7 \cdot x^2}{2560} + \frac{73 \cdot x}{480} + \frac{12}{5}$$

il cui grafico è



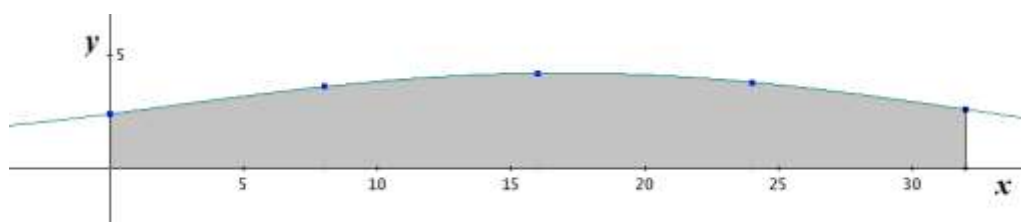
Ora calcoliamo l’area compresa tra la curva e l’asse delle ascisse nell’intervallo $[0; 32]$. mediante l’integrazione definita:

$$\int_0^{32} \left(\frac{x^4}{163840} - \frac{13 \cdot x^3}{30720} + \frac{7 \cdot x^2}{2560} + \frac{73 \cdot x}{480} + \frac{12}{5} \right) dx$$

ed in esecuzione porge

114.56

ovviamente espresso in metri quadrati; ed ecco il grafico con la relativa area segnata in colore grigio



DEFINIZIONE di DISLOCAMENTO.

Il **dislocamento** di una nave è definito come il peso dell'acqua spostata dalla parte immersa (carena) dello scafo. Per il principio di Archimede, questo peso è uguale al peso totale della nave stessa.

In termini più semplici: la parte dello scafo che è sott'acqua sposta un certo volume di acqua. Il peso di quel volume d'acqua spostata è il dislocamento della nave, ed è esattamente uguale al peso della nave (in condizioni di equilibrio).

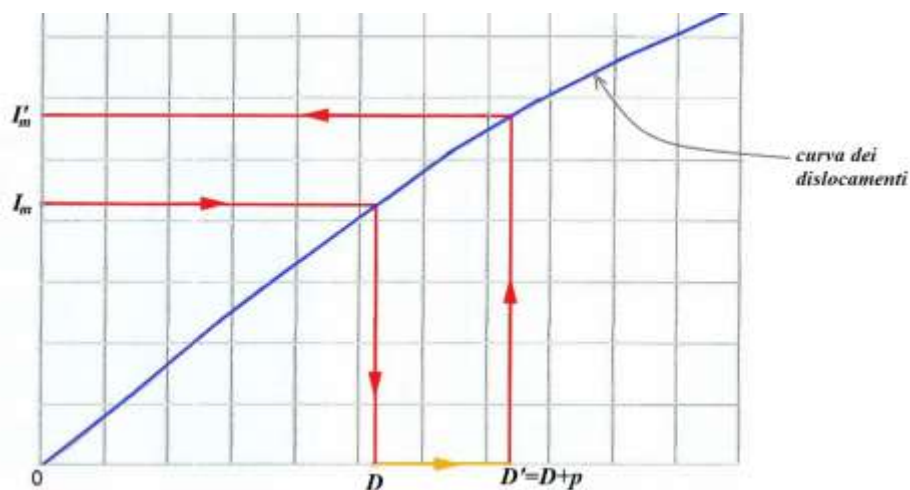
Etimologicamente il dislocamento deriva da *dislocare* che deriva dalla parola latina “*locare*” nel senso di porre qualcosa in luoghi diversi. In particolare nella nautica significa che il peso della nave è equivalente al peso dell'acqua dislocata (spostata) dalla carena, ovvero dalla parte immersa.

Ed è perciò che per conoscere il peso di una nave (ad una data immersione media) occorre conoscere il volume V (calcolato con metodi di integrazione numerica, prima descritti) della sua parte immersa che corrisponde al volume di acqua spostata. Il dislocamento D si ottiene moltiplicando questo volume, espresso in m^3 per il peso specifico ρ , espresso in $\frac{t}{m^3}$, dell'acqua ove la nave galleggia:

$$D = \rho \cdot V.$$

► Esistono dei diagrammi detti delle **carene dritte** in dotazione delle navi che sono ancora ampiamente utilizzati, specialmente sulle navi da carico. Nonostante l'avvento di software di calcolo sofisticati, questi diagrammi rimangono uno strumento fondamentale a bordo per diverse ragioni.

Nella seguente figura emerge un esempio di una sua utilizzazione

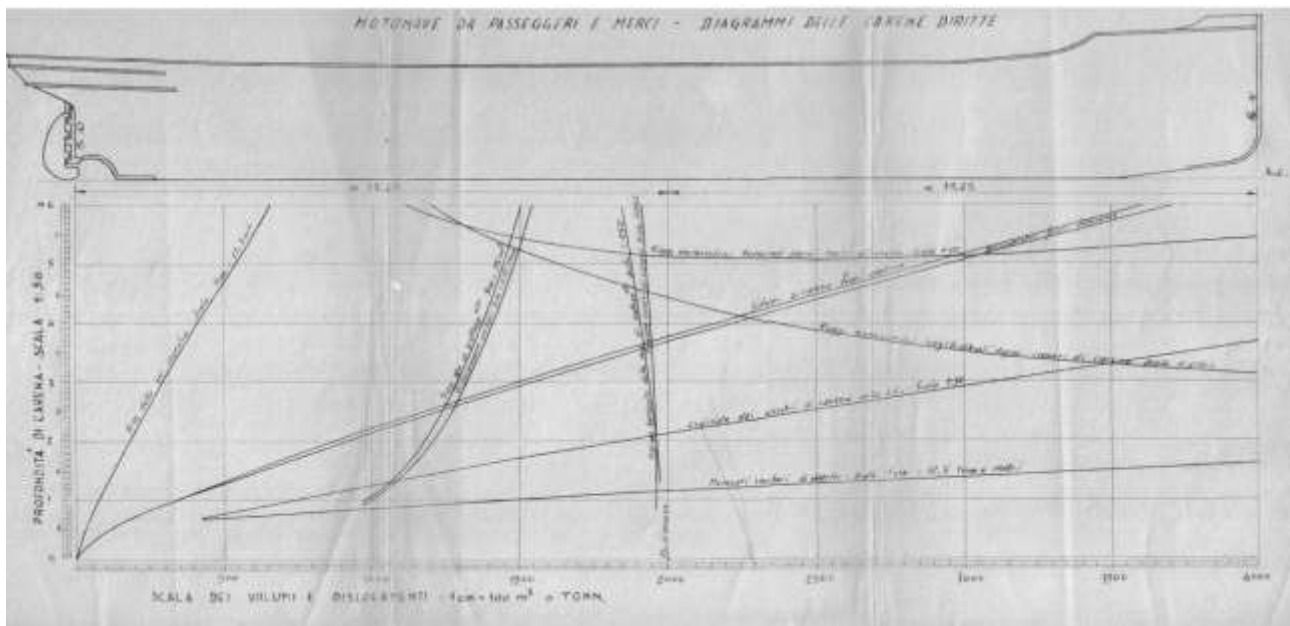


Letti il pescaggio prodiero I_{AV} e poppiero I_{AD} , dalla loro media aritmetica si ottiene il pescaggio

medio $I_m = \frac{I_{AV} + I_{AD}}{2}$; mediante il diagramma, in funzione di I_m si ottiene il corrispondente

dislocamento D ; volendo caricare un peso p , si vuole sapere quale sarà la nuova immersione media; allora si entra nel diagramma col dislocamento D' e si determina la corrispondente immersione media I'_m .

Ecco un diagramma di una nave mista (passeggeri e merci)



Si rileva come questi diagrammi forniscano in funzione dell'immersione media i seguenti elementi geometrici dello scafo:

- volumi di carena,
- dislocamenti,
- ordinate dei centri di carena,
- momenti unitari di assetto,
- dislocamenti unitari,
- raggi metacentrici trasversali,
- raggi metacentrici longitudinali,
-

In conclusione, sebbene i moderni software di calcolo abbiano semplificato molte operazioni, i diagrammi delle carene dritte mantengono la loro importanza pratica e legale a bordo delle navi da carico, fornendo un mezzo affidabile e indipendente per valutare gli elementi geometrici dello scafo.

► Come visto, per calcolare le aree delle semi-linee d'acqua, si utilizzano principalmente due metodi:

- il metodo di Bezout detto anche dei trapezi,
- il metodo di Cavalieri-Simpson detto anche dei segmenti parabolici.

Un po' di storia su questi due personaggi

Étienne Bézout (1730-1783) è stato un matematico francese del XVIII secolo, ricordato principalmente per i suoi contributi apportati all'algebra ed in particolare alla teoria delle equazioni algebriche. Noti sono:

- il teorema che stabilisce che due curve piane algebriche, rispettivamente di gradi m e n , si intersecano al più in $m \cdot n$ punti;
- l'identità che dice che se a e b sono due numeri interi non nulli con massimo comune divisore d , allora esistono due interi x e y tali che $a \cdot x + b \cdot y = d$.

ESEMPIO.

Presi $a = 6$ e $b = 8$, è $M.C.D.=2$, allora $6 \cdot x + 8 \cdot y = 2$ risulta verificata da una infinità di coppie x e y , per esempio:

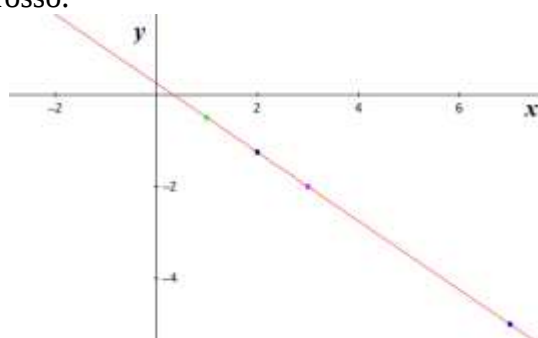
$$6 \cdot 1 + 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \quad \Rightarrow \quad 6 - 4 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2$$

$$6 \cdot 2 + 8 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = 2 \quad \Rightarrow \quad 12 - 10 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2$$

$$6 \cdot 3 + 8 \cdot (-2) = 2 \quad \Rightarrow \quad 18 - 16 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2$$

da cui emerge che esiste anche una coppia di interi (terzo caso); il fatto che le coppie x, y siano infinite è perché l'equazione $6 \cdot x + 8 \cdot y = 2$ è quella di una retta di cui riportiamo il grafico

in cui la prima coppia $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ sono le coordinate del punto di colore blu, la seconda coppia $\left(2; -\frac{5}{4}\right)$ sono le coordinate del punto in neretto e la terza coppia $(3; -2)$ sono le coordinate del punto di colore rosso.



Ma anche le coppie di numeri interi sono infinite: la determinazione di un certo numero di coppie di numeri interi è piuttosto comprensibile proprio riferendoci alla retta, grafico dell'equazione $a \cdot x + b \cdot y = d$. Proviamo quanto detto con l'esempio precedente.

Scriviamo l'equazione $6 \cdot x + 8 \cdot y = 2$ in forma esplicita:

$$y = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{4}$$

da cui ne rileviamo la pendenza ovvero il così detto coefficiente angolare che possiamo scrivere

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{+4} \quad \text{oppure} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+3}{-4};$$

allora se alle coordinate intere di un punto addizioniamo:

all'ascissa il denominatore di una delle due precedenti frazione,

all'ordinata il numeratore della stessa frazione,

otteniamo le coordinate di un altro punto avente coordinate intere che soddisfa l'identità di Bezout.

Proviamo, per esempio con la seconda frazione col punto $(3;-2)$ ed operiamo in esso come detto:

$$(3-4;-2+3) \text{ ovvero } (-1;1)$$

proviamo che questa coppia soddisfa l'equazione $6 \cdot x + 8 \cdot y = 2$:

$$6 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 = 2 \Rightarrow -6 + 8 = 2 \Rightarrow 2 = 2.$$

Partendo dal punto $(3;-2)$, qualunque punto avente coordinate $(3+4 \cdot k;-2-3 \cdot k)$ oppure $(3-4 \cdot k;-2+3 \cdot k)$, dove k è un numero intero, è un punto avente coordinate intere che soddisfano l'identità di Bezout.

Ed ora viene in aiuto l'informatica per determinare una serie di queste coppie di numeri.

Il programma

```
VECTOR([3 + 4*k, -2 - 3*k], 1, 1, 7)
```

in esecuzione porge la matrice

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 11 & -8 \\ 15 & -11 \\ 19 & -14 \\ 23 & -17 \\ 27 & -20 \\ 31 & -23 \end{bmatrix}$$

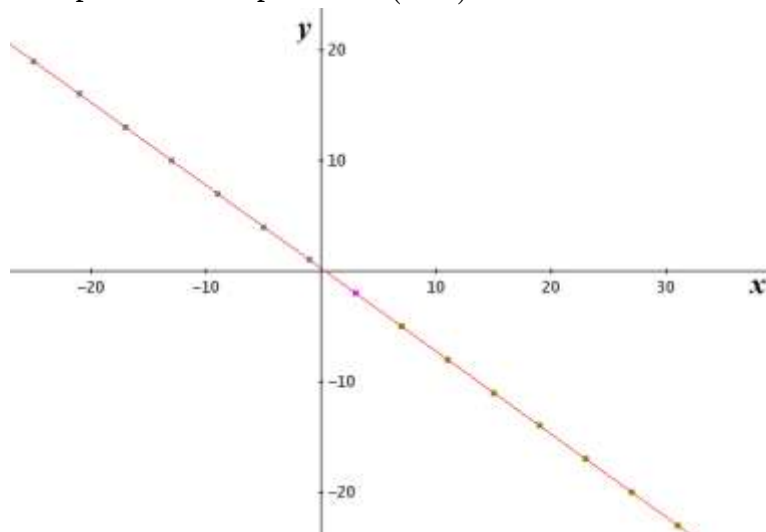
Il programma

```
VECTOR([3 - 4*1, -2 + 3*1], 1, 1, 7)
```

in esecuzione porge la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 4 \\ -9 & 7 \\ -13 & 10 \\ -17 & 13 \\ -21 & 16 \\ -25 & 19 \end{bmatrix}$$

Diagrammiamo i precedenti 14 punti con $(3;-2)$ che ho lasciato di colore rosso

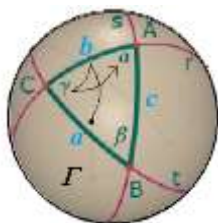


► Ma, storicamente non esiste conferma che Bezout si sia interessato di integrazione numerica ed in particolare sul metodo a lui attribuito ovvero quello di suddividere in trapezi l'area sotto una curva, anche perché questo metodo era già noto. Si potrebbe allora pensare che, venuto a conoscenza di questo metodo, si sia adoperato a meglio formalizzarlo, ma non ne è certamente l'inventore.

Un'altra possibilità potrebbe essere che un autore abbia battezzato il metodo dei trapezi col nome Bezout e i successivi autori lo abbiano copiato. Del resto non sarebbe la prima volta: anche in astronomia nautica o in navigazione alcuni autori, in epoche diverse, hanno scritto *teorema di Vieta* al posto di *teorema delle cotangenti* ...e, a proposito di questi teoremi riporto la loro distinzione:

In figura:

- r, s, t sono circonferenze massime sulla superficie sferica Γ ;
- ABC un triangolo sferico con i relativi lati a, b, c ed angoli α, β, γ .



Teorema delle cotangenti: è una relazione tra quattro elementi (lati e angoli) consecutivi. Scrivo una delle 6 equazioni ottenute con la regola mnemonica

$$\cot \quad \sin \quad \cos \quad \cos \quad \sin \quad \cot$$

da cui scrivo al lato destro di ciascuna funzione goniometrica gli elementi del triangolo nell'ordine indicato dalla traiettoria cuspidale riportata in figura, avendo cura di ripetere l'elemento su cui cade ciascuno dei due punti cuspidali, e, finalmente, ponendo il simbolo = dopo la prima coppia ed il segno + dopo la seconda

$$\cot a \cdot \sin b = \cos b + \cos \gamma + \sin \gamma \cdot \cot \alpha .$$

Teorema di Vieta: è una relazione fra i tre angoli e un lato non ne riporto l'equazione perché non viene usato in nessuna materia nautica.

Thomas Simpson (1710-1761) matematico britannico del XVIII secolo è noto per i suoi contributi in vari campi della matematica, tra cui il calcolo numerico, la probabilità e l'astronomia. Il suo metodo, ovvero quello dei segmenti parabolici e anche detto metodo di Cavalieri-Simpson, essendo **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647) un matematico italiano del XVII secolo.

La motivazione del doppio nome forse è da attribuirsi al fatto Cavalieri, vissuto circa un secolo prima di Simpson, si interessò ai metodi per calcolare aree e volumi attraverso la suddivisione in "indivisibili", ovvero in elementi infinitesimi, gettando così le basi per lo sviluppo di altre tecniche di integrazione.