VIAGGO NEL MONDO DEI NUMERI COMPLESSI (di Mortola Carlo)

((1)) INTRODUZIONE

Trattasi di una estensione del concetto di numero; essa ha l'obiettivo di potere eseguire operazioni che nel campo dei numeri reali sono impossibili, come per esempio il calcolo:

- della radice di indice pari di un numero negativo,
- del logaritmo di un numero negativo.

► Si dice numero complesso, indicato con il simbolo (a,b), una coppia ordinata di numeri reali a e b, stabilendo di operare con essi mediante definizioni.

((2)) DEFINIZIONI

⌈**a**⌋ *Uguaglianza* di due numeri complessi (a,b) e (a',b'):

$$(a,b) = (a',b') \quad \Leftrightarrow \quad a = a' \wedge b = b' \qquad (1)$$

⌈**b**⌋ *Somma* di due numeri complessi (a,b) e (a',b'):

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b') \qquad (2)$$

⌈**c**⌋ *Opposto* di un numero complesso (a,b): è il numero complesso

$$(-a,-b) \quad \Rightarrow \quad (a,b) + (-a,-b) = (0,0) \qquad (3)$$

⌈**d**⌋ *Differenza* di due numeri complessi (a,b) e (a',b'):

$$(a,b) - (a',b') = (a,b) + (-a',-b') = (a-a', b-b') \qquad (4)$$

⌈**e**⌋ *Prodotto* di due numeri complessi (a,b) e (a',b'):

$$(a,b) \cdot (a',b') = (a \cdot a' - b \cdot b', a \cdot b' + a' \cdot b) \qquad (5)$$

⌈**f**⌋ *Reciproco* di un numero complesso $(a,b) \neq (0,0)$; indicato con (m,n), deve essere:

$$\frac{(1,0)}{(a,b)} = (m,n) \quad \Rightarrow (1,0) = (a,b) \cdot (m,n) \quad \Rightarrow \quad (1,0) = (a \cdot m - b \cdot n, b \cdot m + a \cdot n),$$ per la (1) è

$$\begin{cases} a \cdot m - b \cdot n = 1 \\ b \cdot m + a \cdot n = 0 \end{cases}$$

ed essendo $\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$, $\Delta_m = \begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a$, $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b$, è $\begin{cases} m = \dfrac{a}{a^2+b^2} \\ n = \dfrac{-b}{a^2+b^2} \end{cases}$,

otteniamo il reciproco del numero complesso $(a,b) \neq (0,0)$:

$$\frac{(1,0)}{(a,b)} = (m,n) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) \qquad (6)$$

⌈**e**⌋ *Quoziente* di due numeri complessi (a,b) e (a',b'):

$$\frac{(a,b)}{(a',b')}=$$

per la (6)

$$=(a,b)\cdot\left(\frac{a'}{a'^2+b'^2},\frac{-b'}{a'^2+b'^2}\right)=$$

per la (5)

$$=\left(\frac{a\cdot a'}{a'^2+b'^2}+\frac{b\cdot b'}{a'^2+b'^2},\frac{-a\cdot b'}{a'^2+b'^2}+\frac{a'\cdot b}{a'^2+b'^2}\right),$$

pertanto è:

$$\frac{(a,b)}{(a',b')}=\left(\frac{a\cdot a'+b\cdot b'}{a'^2+b'^2},\frac{b\cdot a'-a\cdot b'}{a'^2+b'^2}\right) \qquad (7)$$

⌈**f**⌋ *Potenza* di un numero complesso ad esponente $n\in N_0$

$$(a,b)^n \qquad (8)$$

⌈**g**⌋ *Potenza* di un numero complesso ad esponente intero negativo: si definisce mediante la (7) e la (8)

$$(a,b)^{-n}=\frac{(1.0)}{(a.b)^n} \qquad (9)$$

⌈**h**⌋ *Potenza ad esponente nullo*: si definisce dalla (9)

$$\left|\begin{array}{l}(a,b)^{-n}\cdot(a,b)^n=(1,0)\\ \\ (a,b)^{-n}\cdot(a,b)^n=(a,b)^{-n+n}=(a,b)^0\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad (a,b)^0=(1,0) \qquad (10)$$

OSSERVAZIONE: Le precedenti definizioni sono ammesse per il fatto che con esse si introducono nuovi simboli ai quali si possono dare *nome* e *significato* che più sembrino opportuni. Ma, soprattutto, emerge che per le operazioni fra numeri complessi prima definite valgono le medesime proprietà formali delle operazioni analoghe fra numeri reali, infatti facilmente si può verificare che:

- l'*uguaglianza* gode delle proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*,
- l'*addizione* gode della proprietà *commutativa* e *associativa*,
- la *sottrazione* gode della proprietà *invariantiva*,

- la *moltiplicazione* gode delle proprietà *commutativa, associativa* e *distributiva*,
- la *divisione* gode della proprietà *invariantiva.*
- la *potenza* gode delle proprietà: *prodotto e quoziente di potenze con la stessa base, prodotto e quoziente di potenze con lo stesso esponente* e *potenza di potenza*

.

((3)) UNITA' IMMAGINARIA

Si considerino due numeri complessi $(a,0)$ e $(b,0)$, nei quali è nullo il secondo numero reale della coppia ordinata che li formano, e si operi con essi:

- $(a,0) = (b,0) \quad \Leftrightarrow \quad a = b$;
- $(a,0) \pm (b,0) = (a \pm b,0)$;
- $(a,0) \cdot (b,0) = (a \cdot b,0)$;
- $\dfrac{(a,0)}{(b,0)} = \left(\dfrac{a}{b},0\right)$.

Le operazioni precedenti sono le normali operazioni che si effettuano con i numeri reali e quindi emerge che i numeri reali sono particolari numeri complessi. pertanto l'insieme dei numeri reali *R* è un sottoinsieme dei numeri complessi *C*: $R \subset C$.

Pertanto il numero complesso $(a,0)$ si considera identico a numero reale *a*:

$$(a,0) = a. \tag{11}$$

In particolare il numero complesso $(1,0)$ è l'*unità dei numeri reali*, infatti per la (11), è:

$$(1,0) = 1.$$

►I numeri complessi della forma (a,b) si dicono *numeri immaginari* e quelli nella forma $(0,b)$ si dicono *numeri immaginari puri*.

Il numero immaginario puro $(0,1)$ si dice *unità immaginaria* e si indica con la lettera *i*:

$$(0,1) = i \tag{12}$$

Vediamo cosa succede se eleviamo al quadrato l'unità immaginaria; per la (12), è:

$$i^2 = (0,1)^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 1 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 0\cdot 1) = (-1,0) = -1,$$

così viene giustificata l'introduzione, nei libri di testo della scuola media, dell'unità *i*, definita con l'uguaglianza $i^2 = -1$.

► Cosa succede elevando a potenza l'unità immaginaria?

$$
\begin{array}{|l}
i^0 = 1 \\
i^1 = i \\
i^2 = -1 \\
i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l}
i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1 \\
i^5 = i^2 \cdot i^3 = -1 \cdot (-i) = i \\
i^6 = i^2 \cdot i^4 = -1 \cdot 1 = -1 \\
i^7 = i^3 \cdot i^4 = -i \cdot 1 = -i
\end{array}
\quad ;
$$

rileviamo che le prime 4 potenze dell'unità immaginaria (1, *i*, –1, –*i*) si riproducono, nello stesso ordine, indefinitamente; pertanto possiamo scrivere l'espressione generale della loro produzione:

$$i^{n+4\cdot k} = i^n \qquad \text{con} \quad n = 0,1,2,3; k = 0,1,2,3,4,5,....$$

ESEMPI.

- $i^{18} = i^{2+16} = i^2 = -1$
- $i^{51} = i^{3+48} = i^3 = -i$

((4)) FORMA ALGEBRICA DEI NUMERI COMPLESSI

Preso il numero complesso (a,b) , per le (2) , (5) e (12) possiamo scrivere:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a + (0,1) \cdot (b,0) = a + i \cdot b$$

infatti, per la (5) è $(0,1) \cdot (b,0) = (0 \cdot b - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + b \cdot 1) = (0,b)$

così che i numeri complessi possono essere messi sotto la forma:

$$a + b \cdot i \qquad (13)$$

detta *forma algebrica dei numeri complessi*.

Dalla (13) si ha:

- per $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ si hanno i numeri immaginari
- per $a = 0 \wedge b \neq 0$ si hanno i numeri immaginari puri
- per $a \neq 0 \wedge b = 0$ si hanno i numeri reali

► La forma algebrica consente di operare con i numeri complessi con le regole del calcolo letterale: basta considerare l'espressione (13) come un binomio.

- *Adduzione* e *sottrazione* : $(a + b \cdot i) \pm (a' + b' \cdot i) = a + a' \pm (b + b') \cdot i$

- *Moltiplicazione*: $(a + b \cdot i) \cdot (a' + b' \cdot i) = a \cdot a' + a \cdot b' \cdot i + a' \cdot b \cdot i + b \cdot b' \cdot i^2$

  $= a \cdot a' + (a \cdot b' + a' \cdot b) \cdot i - b \cdot b' = a \cdot a' - b \cdot b' + (a \cdot b' + a' \cdot b) \cdot i$

  (che concorda appieno con la (5) ove i numeri complessi sono definiti come copie ordinate dinumeri)

- *Reciproco*: $\dfrac{1}{a+b\cdot i}=\dfrac{a-b\cdot i}{(a+b\cdot 1)\cdot(a-b\cdot i)}=\dfrac{a-b\cdot i}{a^2-b^2\cdot i^2}=\dfrac{a-b\cdot i}{a^2+b^2}$
- *Divisione*: il quoziente di due numeri complessi è il prodotto del primo per il reciproco del secondo.

ESEMPI.

- $(-5+4\cdot i)+(2-5i)=-5+2+(4-5)\cdot i=-3-i$
- $(-5+4\cdot i)-(-5-4i)=-5+5+(4+4)\cdot i=8\cdot i$
- $(3+2\cdot i)\cdot(5-4i)=15-12\cdot i+10\cdot i-8\cdot i^2=15+8-2\cdot i=23-2\cdot i$
- $\dfrac{3+i}{1+2\cdot i}=\dfrac{(3+i)\cdot(1-2\cdot i)}{(1+2\cdot i)\cdot(1-2\cdot i)}=\dfrac{3-6\cdot i+i-2\cdot i^2}{1-4\cdot i^2}=\dfrac{3+2-5\cdot i}{1+4}=1-i$

►Due numeri complessi che hanno parti reali uguali e coefficienti opposti delle parti immaginarie si dicono numeri *complessi coniugati*; sono pertanto complessi coniugati i numeri $a+i\cdot b$ e $a-i\cdot b$.

Caratteristiche dei numeri complessi coniugati:

- la loro somma è un numero reale: $(a+i\cdot b)+(a-i\cdot b)=2\cdot a$
- la loro differenza è un numero immaginario puro: $(a+i\cdot b)-(a-i\cdot b)=2\cdot b\cdot i$
- il loro prodotto è la somma del quadrato della parte reale col quadrato del coefficiente della parte immaginaria: $(a+i\cdot b)\cdot(a-i\cdot b)=a^2-a\cdot b\cdot i+a\cdot b\cdot i-b^2\cdot i^2=a^2+b^2$
  (che conferma la definizione (5))

OSSERVAZIONE. Da quest'ultima proprietà emerge la possibilità, nel campo dei complessi, di potere scomporre la somma di due quadrati.

ESEMPIO.

$$9\cdot a^2+16=(3\cdot a+4\cdot i)\cdot(3\cdot a-4\cdot i)$$

OSSERVAZIONE. Si possono semplificare espressioni numeriche nel campo complesso con le stesse regole che si usano nel campo reale.

ESEMPIO.

Semplificare la seguente espressione

$$A=\frac{(2-i)\cdot(1-2\cdot i)}{(1-i)\cdot(2+3\cdot i)}-\left(\frac{(1-i)^4-(1+i)^4}{(1-i)^3+(1+i)^3}\right)^4 .$$

SOLUZIONE.

Per semplificare le operazioni manipoliamo separatamente i termini delle due frazioni:

- $(2-i)\cdot(1-2\cdot i)=2-4\cdot i-i+2\cdot i^2=-5\cdot i$
- $(1-i)\cdot(2+3\cdot i)=2+3\cdot i-2\cdot i-3\cdot i^2=5+i$
- $(1-i)^4-(1+i)^4=\left((1-i)^2+(1+i)^2\right)\cdot\left((1-i)^2-(1+i)^2\right)=\ldots=(-4\cdot i)\cdot 0=0$

- $(1-i)^3+(1+i)^3=((1-i)+(1+i))\cdot\left((1-i)^2+(1-i)\cdot(1+i)+(1+i)^2\right)=$
  $2\cdot(1-2\cdot i-1-2+1+2\cdot i-1)=2\cdot(-2)=-4\neq 0 \quad \Rightarrow$ il secondo termine di A è nullo, avendo numeratore nullo e denominatore diverso da 0.

Pertanto è:

$$A=\frac{-5\cdot i}{5+i}=\frac{-5\cdot i}{5+i}\cdot\frac{5-i}{5-i}=...=-\frac{5}{26}-\frac{25}{26}\cdot i$$

((5)) RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI

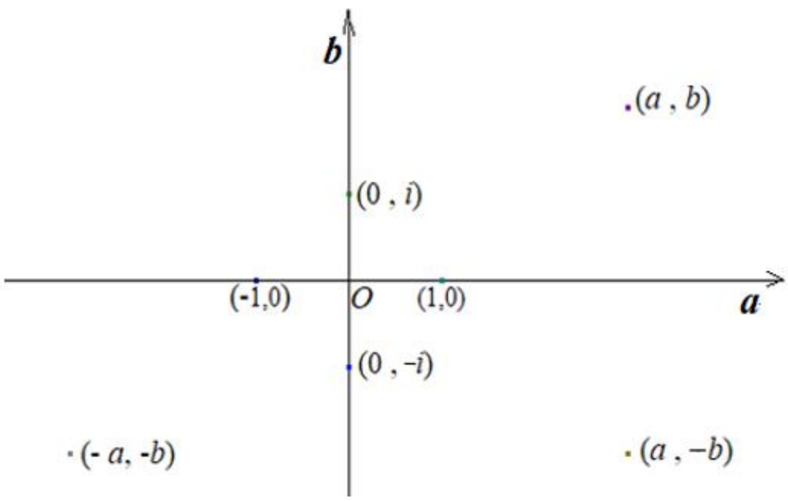
Sappiamo che i numeri reali si possono porre in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta orientata. In modo analogo Gauss ha avuto l'intuizione di potere fare altrettanto per i numeri complessi, rappresentandoli su un piano cartesiano, ed ecco come:

il generico numero complesso $a+i\cdot b$ è caratterizzato dalla corrispondente coppia di numeri reali (a,b); a questa coppia si associa, sul piano cartesiano, il punto *P* avente ascissa *a* e ordinata *b*. Conveniamo perciò di rappresentare il numero $a+i\cdot b$ col punto *P* che è l'immagine geometrica di quel numero complesso. Pertanto, come per i reali sulla retta, anche su questo piano vige la corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e i numeri complessi [tra i punti (a,b) e i numeri complessi $a+i\cdot b$ vige una corrispondenza biunivoca].

Così ai numeri:

- *reali* corrispondono i punti dell'asse delle ascisse detto *asse reale,*
- *immaginari puri* corrispondono ai punti dell'asse delle ordinate detto *asse immaginario*.

Così i quattro numeri 1, *i*, –1, –*i* sono rappresentati da quattro punti situati sugli assi cartesiani aventi distanza uguale all'unità.



In figura sono riportati altresì:

- i punti di coordinate (a,b) e $(a,-b)$ che sono l'immagine dei due numeri complessi coniugati $a+b\cdot i$ e $a-b\cdot i$;
- i punti di coordinate (a,b) e $(-a,-b)$ che sono l'immagine dei due numeri complessi opposti $a+b\cdot i$ e $-a-b\cdot i$.

OSSERVAZIONE. Sarebbe più corretto indicare l'asse elle ordinate con il simbolo $b\cdot i$, ma non lo facciamo perché l'asse delle ascisse lo abbiamo indicato con la lettera *a* e non con il simbolo $a\cdot 1$

ESEMPIO.

Determinare i numeri complessi $z=a+b\cdot i$ e $z'=a'+b'\cdot i$ (i numeri complessi si indicano con la lettera *z*) tale che;

a) $\frac{z}{z'}$ sia un numero *immaginario puro*
b) $z-z'=10$
c) $\frac{a}{a'}=-4$

SOLUZIONE.

b) $\Rightarrow$ $a-a'=10 \wedge b-b'=0$

c) $\Rightarrow$ $\frac{a}{a'}=-4$

allora

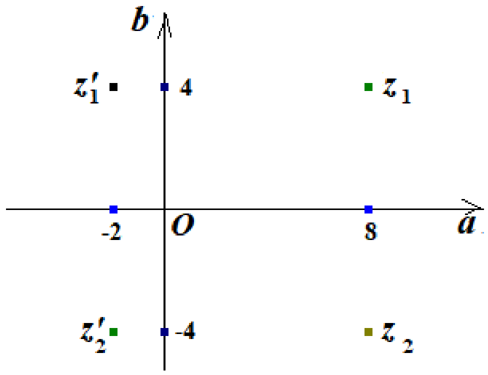
$$b)\wedge c) \quad \Rightarrow \quad a=8; a'=-2; b=b'.$$

Il numero complesso ricercato è $\frac{z}{z'}=\frac{8+b\cdot i}{-2+b\cdot i}=\frac{(8+b\cdot i)\cdot(-2-b\cdot i)}{(-2+b\cdot i)\cdot(-2-b\cdot i)}=$

$$=\frac{-16+b^2}{4+b^2}+\frac{-8\cdot b-2\cdot b}{4+b^2}\cdot i$$

Quest'ultimo è immaginario puro se e solo se è $b=\pm 4$ per cui segue:

$$(z=8+4\cdot i \wedge z'=-2+4\cdot i)\vee(z=8-4\cdot i \wedge z'=-2-4\cdot i)$$



((6)) INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'INTRODUZIONE DELL'UNITA'IMMAGINARIA

Prendiamo la retta numerica a dei reali (sistema di ascisse) e, su di essa, fissiamo un punto A al quale corrisponda un assegnato numero reale a.

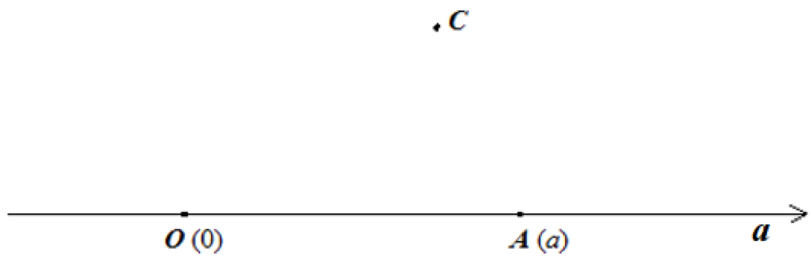
Possiamo pensare che a indichi, in *valore intensivo* e *verso* il vettore $\overline{OA} = A - O = a - 0$

E, come vi è corrispondenza biunivoca tra i punti della retta e i numeri reali, allo stesso modo, tale corrispondenza vige anche tra i vettori e numeri reali; così il vettore $\overline{OA}$ ha intensità $|a|$ e verso stabilito dal segno di a.

Nello spazio tridimensionale una retta ed un punto, non appartenente a quella retta, individuano univocamente un piano.

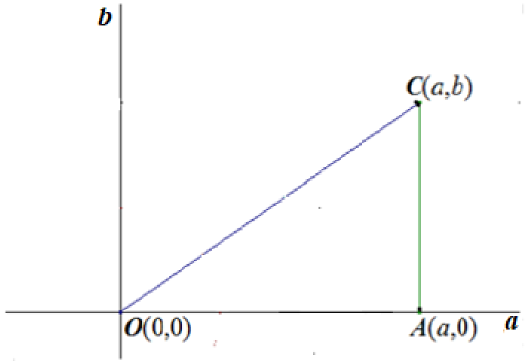
Dallo spazio euclideo sappiamo che una retta ed un punto fuori di essa definiscono uno ed un solo piano; cosa succede, allora, se prendiamo un punto C non appartenente all'asse x?

Avremo la seguente figura



Siccome stiamo lavorando su un piano (piano del foglio), ed il punto C è fuori dall'asse x, abbiamo bisogno, per indicarlo univocamente, di un altro sistema di ascisse; denotiamo questo secondo asse con y, avente origine coincidente con l'origine O dell'asse x, e ad esso perpendicolare.

Ipotizzato che il punto C abbia la stessa ascissa del punto A e ordinata b, otteniamo la seguente figura

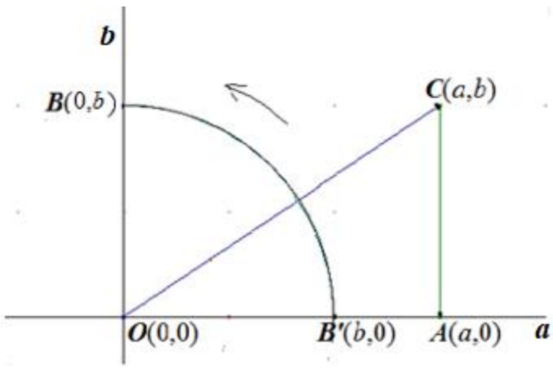


Dalla figura rileviamo che il vettore $\overrightarrow{OC}$ e somma vettoriale di due vettori, e precisamente:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

nella quale la componente $\overrightarrow{OA}$ è totalmente precisata dal numero reale a. Cosa possiamo dire sulla componente $\overrightarrow{AC}$?

Se tracciamo, sull'asse x, il vettore $OB' = b$ e lo facciamo ruotare di 90°, nel senso diretto, otteniamo l'altra componente OB di C.

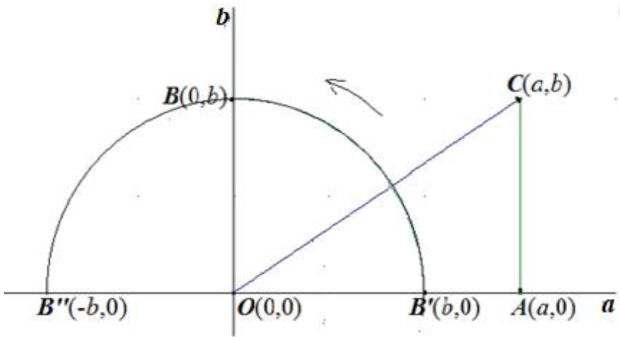


Scriviamo, per convenzione,

$$\overline{O}\overline{B} = \grave{\imath} \cdot \overline{O}\overline{B}'$$

nella quale il simbolo *"i"* esprime un "*operatore unario*" che ha la caratteristica di far ruotare, nel senso diretto, di 90°, il vettore a cui essa è praticata.

Procediamo col precedente operatore applicato al vettore OB:



Otteniamo il vettore OB'', opposto di OB', per cui possiamo scrivere:

$$\left| \begin{array}{l} \overline{OB''} = i \cdot \left(i \cdot \overline{OB'} \right) = i^2 \cdot \overline{OB'} \\ \\ \overline{OB''} = -\overline{OB'} \end{array} \right\rangle \Rightarrow i^2 = -1$$

$$\left| \begin{array}{l} \overline{OB'''} = i \cdot \overline{OB''} = i \cdot i^2 \cdot \overline{OB'} = i^3 \cdot \overline{OB'} \\ \\ \overline{OB'''} = -\overline{OB} = -i \cdot \overline{OB'} \end{array} \right\rangle \Rightarrow i^3 = -i$$

$$\left| \begin{array}{l} \overline{OB'} = i \cdot \overline{OB'''} = i^2 \cdot \overline{OB''} = i^4 \cdot \overline{OB'} \\ \\ \overline{OB''} = -\overline{OB''} = -i^2 \cdot \overline{OB'} \end{array} \right\rangle \Rightarrow i^4 = -i^2 \Rightarrow i^4 = -1 \cdot (-1) = 1$$

OSSERVAZIONE. Un'operazione unaria è un'operazione con un solo operando, per esempio:

- il *fattoriale*; il fattoriale applicato sul numero 6 è $6! = 720$;
- l'*opposto* di un numero; l'opposto di -75 è 75;
- la negazione logica (simbolo ¬); se p è una proposizione, $\neg p$ è la negazione di p.

Ora, proprio su quest'ultimo operatore possiamo rilevare che:

$\neg\neg\neg\neg\neg \ldots\ldots \neg\neg\neg\, p = p$ se i connettivi più volte ripetuti sono in numero *pari*,

$\neg\neg\neg\neg\neg \ldots\ldots \neg\neg\neg\, p = \neg p$ se i connettivi più volte ripetuti sono in numero *dispari*.

Per l'operatore i avviene qualcosa di analogo.

I quattro numeri $1, i, -1, -i$ sono rappresentati rispettivamente da quattro vettori (versori) situati sugli assi ortogonali del piano cartesiano aventi modulo 1, nell'ordine di rotazione diretta a partire dal semiasse delle ascisse positive; così si passa dal primo al secondo, dal secondo al terzo, dal terzo al quarto moltiplicando sempre per i; perciò si capisce come moltiplicando il vettore unitario u, di intensità 1, per l'unità immaginaria i, esso ruota di $\frac{\pi}{2}$ in senso positivo assumendo la stessa direzione e verso dell'asse y; moltiplicando quest'ultimo per i, esso ruota nuovamente, nel senso diretto, di $\frac{\pi}{2}$ dando luogo al vettore di intensità 1 ma opposto ad u, cioè $-u$, e così via.

Emergono due considerazioni:

I) Il piano cartesiano (vedremo che assumerà la denominazione di piano di Argand-Gauss o piano complesso) è monometrico.

II) Per $k \in N$, è:

- $i^{0+4\cdot k} = 1$,
- $i^{1+4\cdot k} = i$
- $i^{2+4\cdot k} = -1$
- $i^{3+4\cdot k} = -i$

► **Ora penso che sia più chiara l'introduzione dei numeri complessi**. Si dicono **numeri complessi** i numeri del tipo

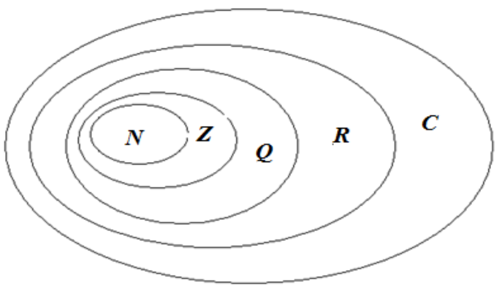
$$a + b \cdot i$$

cioè costituiti dalla <u>*somma indicata*</u> di un numero reale a e da un numero immaginario puro $b \cdot i$.

L'insieme dei numeri di tipo (13) costituiscono una estensione dei reali (indicata con C), infatti se nella (13) è nullo il coefficiente b del numero immaginario, si ha un numero reale e quindi $C \supset R$.

OSSERVAZIONE. Nel campo dei complessi viene meno il carattere di cui sono dotati i numeri reali, ovvero termina la possibilità che quest'ultimi hanno di raffrontarsi in base alla loro grandezza intrinseca

Mediante i noti diagrammi di Eulero-Venn possiamo vedere la nidificazione dei vari insiemi numerici fondamentali



Una volta un mio studente chiamò questi numeri "*i numeri invisibili*" ovvero quei numeri che non si possono vedere. Io gli dissi che, allo stesso modo con cui si possono vedere i numeri reali su una retta, così si sarebbero potuti vedere i numeri immaginari su un'altra retta, ed è proprio quello che ha escogitato **Johann Carl Friedrich Gauss** (Braunschweig 1777-Gottinga 1855) con la sua geniale idea di utilizzare:

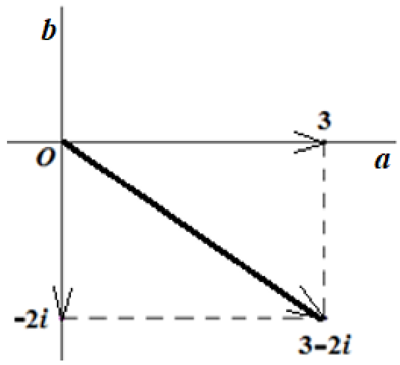
- una retta per i reali,
- una retta per gli immaginari.

La scelta delle due rette cade sugli assi di un sistema cartesiano e precisamente:

- l'asse x delle ascisse per i reali, indicato con la lettera *a*,
- l'asse y delle ordinate per gli immaginari, indicato con la lettera *b*;

così che i numeri complessi sarebbero stati trasformati in vettori.

Esempio. La rappresentazione **geometrica** del numero complesso $3-2i$ è:



OSSERVAZIONE 1.

- L'universo dei **reali** è una retta (nel caso della figura è l'asse *a*),
- L'universo degli **immaginari puri** è una retta (nel caso della figura è l'asse *b*),
- L'universo dei **complessi** è un piano (nel caso della figura è il piano aOb),

OSSERVAZIONE 2. La locuzione "*immaginario*" ha un *contrario* e un *sinonimo* che calzano a pennello:

- il contrario è "*non reale*", infatti un numero è reale o (aut) è immaginario,
- il sinonimo è "*fantastico*", infatti consente di effettuare operazioni impossibili in *R*.

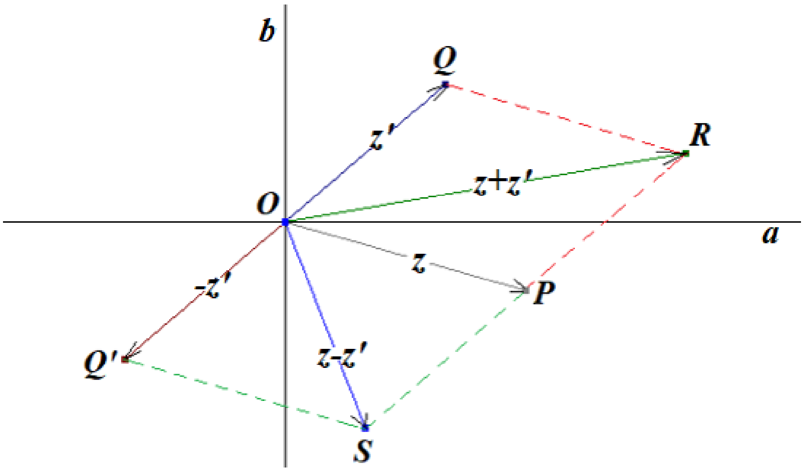
Gli studenti rimangono sbigottiti nell'apprendere che i numeri complessi non siano ne positivi ne negativi e che, soprattutto, non siano confrontabili, non solo con i reali, ma neppure tra di loro: non si può stabilire se $5+2i$ sia minore o maggiore, per esempio, di 2 o di $3i$ o di $1-i$ o ……;

solo i reali si possono confrontare tra loro e solo gli immaginari puri si possono confrontare tra loro e quindi su ciascuno di questi insiemi numerici, singolarmente, vigono le locuzioni: *maggiore*, *minore*, *tra*.

Non dobbiamo stupirci perché ciò che abbiamo detto fu una sorpresa, non taciuta, anche per il più grande matematico dell'illuminismo: **Leonhard Euler** (Basilea 1707-SanPietroburbo 1783). Uomo dotato di una forte capacità di concentrazione tal che poteva lavorare in qualunque situazione; addirittura, avendo avuto ben 13 figli, era capace di lavorare con un figlio in grembo ed altri che schiamazzavano attorno a lui. E' indubbiamente uno dei matematici più produttivi, tanto è vero che la collezione delle sue opere raggiunge il ragguardevole numero di 88.

((7)) DISEGUAGLIANZE

Dati due numeri complessi $u = a + b \cdot i$ e $v = a' + b' \cdot i$ espressi in forma geometrica, li rappresentiamo sul piano di Argand-Gauss rispettivamente con i vettori *OP* e *OQ*, assieme ai vettori (applicando la regola del parallelogrammo) *OR* e *OS*, rispettivamente somma e differenza dei vettori dati.



allora si hanno le diseguaglianze:

$$\left||z| - |z'|\right| \le |z + z'| \le |z| + |z'|$$

ovvero

$$\left||a + i \cdot b| - |a' + b' \cdot i|\right| \le |(a + i \cdot b) + (a' + i \cdot b')| \le |a + i \cdot b| + |a' + i \cdot b'|,$$

che concordano che in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della differenza dagli altri due, per il fatto che:

- $|a + i \cdot b|$, $|a' + i \cdot b'|$, $|(a + i \cdot b) + (a' + i \cdot b')|$ sono i lati del triangolo *OPR*, e
- $|a + i \cdot b|$, $|a' - i \cdot b'|$, $\left||a + i \cdot b| - |a' + b' \cdot i|\right|$ sono i lati del triangolo *OPS*.

((8)) FORMA TRIGONOMETRICA

Una delle caratteristiche dei **numeri complessi** *z* è che possiamo esprimerli in diverse forme ed usare quella che, di volta in volta, ci viene più comodo.

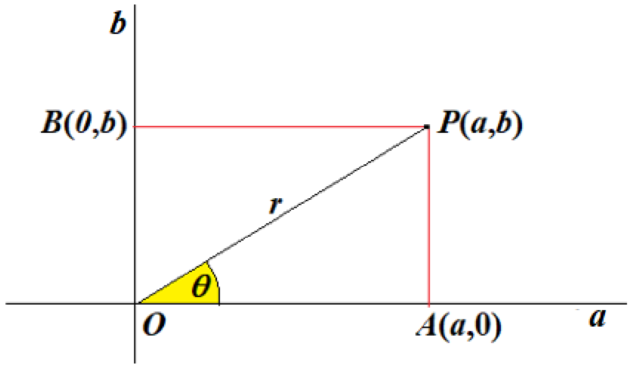
Una di queste forme è quella trigonometrica; allo scopo, sul piano di Gauss ci serviamo di un sistema di coordinate polari aventi per polo l'origine *O* degli assi e per asse polare l'asse delle ascisse.

Sia P il punto che rappresenti il numero $z = a + i \cdot b$ sul piano di Gauss; le sue coordinate:

- cartesiano sono $P(x, y)$
- polari sono $P(r, \vartheta)$

in cui r è la distanza del punto P dall'origine O, ovvero il ***modulo*** o ***norma*** $\left|\overline{OP}\right|$ del vettore $\overline{OP}$ e

ϑ, detta ***argomento*** o ***anomalia***, è l'angolo che il vettore $\overline{OP}$ forma, nel senso diretto, con l'asse x.



Dal triangolo OAP si ha:

$$\begin{cases} a = r \cdot \cos \vartheta \\ b = r \cdot \sin \vartheta \end{cases},$$

quindi, è:

$$z = a + i \cdot b = r \cdot (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta); \qquad (13\ bis)$$

quest'ultima si dice *forma trigonometrica* del numero complesso z.

OSSERVAZIONE.

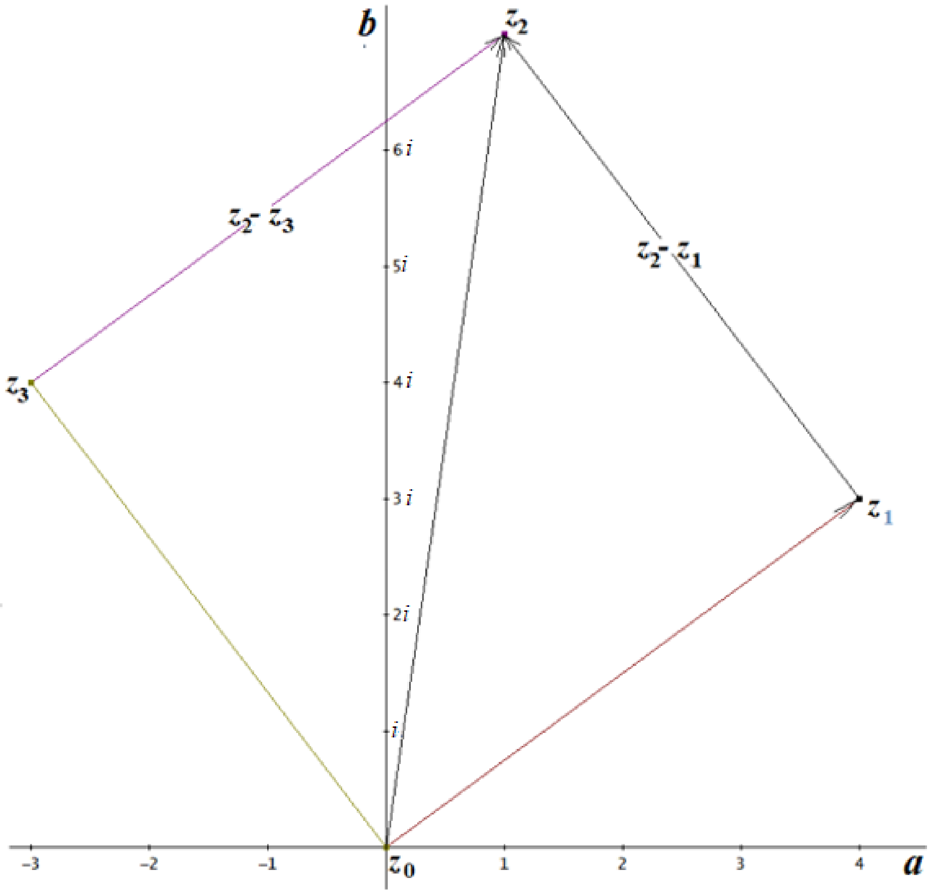
Mentre il modulo di un numero complesso è univocamente determinato, ciò non avviene ugualmente per l'anomalia; infatti se si addiziona all'angolo ϑ un multiplo intero di 2π, $\sin \vartheta$ e $\cos \vartheta$ non mutano e quindi il numero complesso non cambia. Pertanto: *condizione necessaria e sufficiente affinché due numeri complessi siano uguali è che abbiano lo stesso modulo e che le loro anomalie differiscano per un multiplo intero di* 2π.

Così la corrispondenza tra un numero complesso e la sua forma trigonometrica non è biunivoca; per renderla tale imponiamo che l'anomalia sia compresa in un conveniente intervallo come $]-\pi, \pi]$, oppure $]0, 2 \cdot \pi]$; in tale caso l'anomalia si dice principale e si ha:

- i numeri aventi il coefficiente dell'unità immaginaria positivo hanno anomalia principale positiva,
- i numeri aventi il coefficiente dell'unità immaginaria negativo hanno anomalia principale negativa,
- i numeri reali positivi hanno argomento principale π,

ESERCIZIO

Sul piano di Gauss è dato il quadrato di cui sono noti i vertici $z_0 = 0$ e $z_1 = 4 + 3 \cdot i$; determinare gli altri due vertici.



SOLUZIONE

- i vettori z_1 e $z_2 - z_1$ hanno modulo uguale e argomenti che differiscono di $\frac{\pi}{2}$, quindi è:

$$\frac{z_2 - z_1}{z_1} = i \qquad (*)$$

- I vettori z_1 e $z_2 - z_3$ hanno modulo e argomenti uguali, quindi è:

$$\frac{z_2 - z_3}{z_1} = 1 \ ; \qquad (**)$$

dalla (*) si ha;

$$z_2 - 4 - 3 \cdot i = i \cdot (4 + 3 \cdot i)$$

$$z_2 = 4 + 3 \cdot i + 4 \cdot i + 3 \cdot i^2 = 4 + 3 \cdot i + 4 \cdot i - 3 = 1 + 7 \cdot i;$$

dalla (**) si ha:

$$z_3 = z_2 - z_1 = 1 + 7 \cdot i - 4 - 3 \cdot i = -3 + 4 \cdot i$$

VERIFICA:

1. moltiplico z_1 per i e devo ottenere z_3: $(4+3\cdot i)\cdot i = 4\cdot i + 3\cdot i^2 = -3+4\cdot i$
2. moltiplico z_1 per $-i^3$ e devo ottenere z_3: $(4+3\cdot i)\cdot(-i^3) = (4+3\cdot i)\cdot(i) = -3+4\cdot i$

((9)) OPERAZIONI TRA NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

Dati i numeri complessi $z_1 = r_1\cdot(\cos\vartheta_1 + i\cdot\sin\vartheta_1)$ e $z_2 = r_2\cdot(\cos\vartheta_2 + i\cdot\sin\vartheta_2)$, si ha:

●ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

$$z_1 \pm z_2 = [r_1\cdot\cos\vartheta_1 + r_2\cdot\cos\vartheta_2] \pm i\cdot[r_1\cdot\sin\vartheta_1 + r_2\cdot\sin\vartheta_2] \qquad (14)$$

●MOLTIPLICAZIONE

$$z_1\cdot z_2 = [r_1\cdot(\cos\vartheta_1 + i\cdot\sin\vartheta_1)]\cdot[r_2\cdot(\cos\vartheta_2 + i\cdot\sin\vartheta_2)]$$
$$= r_1\cdot r_2\cdot[\cos\vartheta_1\cdot\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\cdot\sin\vartheta_2 + i\cdot(\cos\vartheta_1\cdot\cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1\cdot\sin\vartheta_2)] =$$
$$= r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\cdot\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)], \qquad (15)$$

da cui si ha la seguente regola:

il prodotto di due o più numeri complessi è un numero complesso avente per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti dei numeri dati.

●POTENZA

Dalla precedente regola, il prodotto di n fattori tutti uguali a $z = r\cdot(\cos\vartheta + i\cdot\sin\vartheta)$, è:

$$z^n = r^n\cdot[\cos(n\cdot\vartheta) + i\cdot\sin(n\cdot\vartheta)] \qquad (16)$$

●RADICI

► PREMESSA

Nel campo dei reali , $\{a\neq 0; b; c\}\in R$, l'equazione

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0\,, \qquad (*)$$

ha per risolvente l'espressione

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \qquad (**)$$

in cui è

$$b^2 - 4\cdot a\cdot c \geq 0\,.$$

►Possiamo, con l'introduzione dei numeri immaginari, dare senso alla (**) anche nel caso che sia:

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0.$$

Infatti possiamo scrivere:

$$\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} = \sqrt{(-1) \cdot (-b^2 + 4 \cdot a \cdot c)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-b^2 + 4 \cdot a \cdot c} = i \cdot \sqrt{-b^2 + 4 \cdot a \cdot c}$$

Pertanto, nel campo complesso $\{a \neq 0; b; c\} \in C$, la (*) ha soluzione

$$x = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{-b^2 + 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}. \qquad (***)$$

In conclusione l'equazione di secondo grado ha sempre due radici:

- *reali* se $b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0$
- *complesse coniugate* se $b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$

In realtà quando $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$ la (*) ammette una sola radice, che preferiamo dire "*due radici coincidenti*": ciò discende dall'enunciato del *teorema fondamentale dell'algebra* che recita:

"*Un qualunque polinomio, a coefficienti complessi* (e quindi anche reali), *di grado* $n \geq 1$ *ammette almeno uno zero complesso, da cui segue che tale polinomio ammette n zeri complessi contati con le relative molteplicità*".

► Mediante il software DERIVE.6 riportiamo i seguenti esempi

A) L'equazione

$$\#1: \quad x^2 - 4 = 0$$

- risolta nel campo dei reali

$$\#2: \quad \mathrm{SOLVE}(x^2 - 4 = 0,\ x,\ \mathrm{Real})$$

  porge le radici

$$\#3: \quad x = -2 \lor x = 2$$

- risolta nel campo dei complessi

$$\#4: \quad \mathrm{SOLVE}(x^2 - 4 = 0,\ x)$$

porge le radici

$$\#5: \quad x = -2 \lor x = 2$$

B) L'equazione

$$\#6: \quad x^3 - 4 = 0$$

- risolta nel campo dei reali

$$\#7: \quad \text{NSOLVE}(x^3 - 4 = 0, x, \text{Real})$$

porge la radice

$$\#8: \quad x = 2^{2/3}$$

- risolta nel campo dei complessi

$$\#9: \quad \text{SOLVE}(x^3 - 4 = 0, x)$$

porge le radici

$$\#10: \quad x = -\frac{2^{2/3}}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot 2^{2/3}\cdot i}{2} \vee x = -\frac{2^{2/3}}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot 2^{2/3}\cdot i}{2} \vee x = 2^{2/3}$$

.

OSSERVAZIONE.

- Per l'equazione #1 non vi è differenza nelle sulle soluzioni se risolta in *C* o nella sua restrizione *R*.
- Per l'equazione #6 vi è differenza nelle sulle soluzioni se risolta in *C* o nella sua restrizione *R*, in particolare nella restrizione *R* la soluzione è unica, in tutto *C* le soluzioni sono tre: una reale e due complesse coniugate; il che concorda con la (***) visto che il polinomio $x^3 - 4$ è scomponibile in

$$\left(x - \sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(x + \frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot i}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{\sqrt[3]{4}}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot i}{2}\right).$$

► Ora passiamo ad estrarre le radici dei numeri complessi. La radice ennesima del numero complesso $z = r\cdot(\cos\vartheta + i\cdot\sin\vartheta)$ è un ulteriore numero complesso $z' = r\cdot(\cos\vartheta' + i\cdot\sin\vartheta')$ tale che è:

$$(z')^n = z,$$

e, per la formula di *de Moivre*, è:

$$(r')^n\cdot(\cos(n\cdot\vartheta') + i\cdot\sin(n\cdot\vartheta')) = (\cos\vartheta + i\cdot\sin\vartheta),$$

da cui:

$$r' = r^{\frac{1}{n}} \quad \text{e} \quad \vartheta' = \frac{\vartheta + 2\cdot k\cdot\pi}{n},$$

dove $k = 0,1,2,3,\ldots,n-1$.

In definitiva possiamo scrivere:

$$\sqrt[n]{r \cdot (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta)} = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos \frac{\vartheta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\vartheta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n} \right). \qquad (17)$$

►ESEMPIO 1 (RISOLTO MEDIANTE DERIVE)

Il numero complesso z espresso in forma algebrica

$$\#1: \quad a + i \cdot b$$

ha modulo, ovvero valore intensivo del vettore z

$$\#2: \quad |a + i \cdot b| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

e argomento o anomalia l'angolo θ

$$\#3: \quad \theta = \mathrm{ATAN}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Pertanto il numero complesso

$$\#4: \quad z = 4 - 3 \cdot i$$

ha raggio vettore r

$$\#5: \quad r = |4 - 3 \cdot i| = \sqrt{(4^2 + (-3)^2)} = 5$$

e anomalia

$$\#6: \quad \theta = \mathrm{ATAN}\left(\frac{-3}{4}\right)$$

La radice ennesima del numero #1 è

$$\#7: \quad r^{1/n} \cdot \left(\mathrm{COS}\left(\frac{\theta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right) + i \cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{\theta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}\right)\right)$$

che, per il numero complesso #4 diventa

$$\#8: \quad 5^{1/4} \cdot \left(\mathrm{COS}\left(\frac{\mathrm{ATAN}\left(-\frac{3}{4}\right) + 2 \cdot k \cdot \pi}{4}\right) + i \cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{\mathrm{ATAN}\left(-\frac{3}{4}\right) + 2 \cdot k \cdot \pi}{4}\right)\right)$$

ottenuta sostituendo le espressioni #5 e #6 nell'espressione #7.

Mediante il programma VECTOR

$$\#9: \quad \mathrm{VECTOR}\left(\left[k, 5^{1/4} \cdot \left(\mathrm{COS}\left(\frac{\mathrm{ATAN}\left(-\frac{3}{4}\right) + 2 \cdot k \cdot \pi}{4}\right) + i \cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{\mathrm{ATAN}\left(-\frac{3}{4}\right) + 2 \cdot k \cdot \pi}{4}\right)\right)\right], k, 0, 6, 1\right)$$

in esecuzione otteniamo

$$\#10: \quad \left[\begin{array}{cc} k & z\wedge(1/n) \\ 0 & \boxed{\dfrac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{2})}}{2} - \dfrac{i\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} - 3\cdot\sqrt{2})}}{2}} \\ 1 & \boxed{\dfrac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} - 3\cdot\sqrt{2})}}{2} + \dfrac{i\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{2})}}{2}} \\ 2 & \boxed{-\dfrac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{2})}}{2} + \dfrac{i\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} - 3\cdot\sqrt{2})}}{2}} \\ 3 & -\dfrac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} - 3\cdot\sqrt{2})}}{2} - \dfrac{i\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{2})}}{2} \\ 4 & \boxed{\dfrac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{2})}}{2} - \dfrac{i\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} - 3\cdot\sqrt{2})}}{2}} \\ 5 & \boxed{\dfrac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} - 3\cdot\sqrt{2})}}{2} + \dfrac{i\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{2})}}{2}} \\ 6 & \boxed{-\dfrac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{2})}}{2} + \dfrac{i\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} - 3\cdot\sqrt{2})}}{2}} \end{array}\right]$$

Dalla matrice #10 rileviamo le quattro radici (le prime 4 righe della matrice) del numero #4; la scelta di k variabile da 0 a 6 inclusi serve a rilevare la ricorrenza delle 4 radici distinte con k> 3, evidenziate con i colori:

- prima e quarta riga in colore rosso
- seconda e quinta riga in colore verde
- terza e quinta riga in colore maron.

Proviamo ad assegnare, nell'espressione #8, al parametro k un valore intero negativo, per esempio –1

$$\#11: \quad 5^{1/4}\cdot\left(\mathrm{COS}\left(\frac{\mathrm{ATAN}\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\cdot(-1)\cdot\pi}{4}\right) + i\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{\mathrm{ATAN}\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\cdot(-1)\cdot\pi}{4}\right)\right)$$

in esecuzione otteniamo

$$\#12: \quad -\frac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} - 3\cdot\sqrt{2})}}{2} - \frac{i\cdot\sqrt{(2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{2})}}{2}$$

la quale coincide con la radice riportata nella terza riga della matrice #10. Concludiamo che nell'espressione #7 il parametro k è un numero relativo intero: $k \in Z$.

PUNTUALIZZAZIONE. Di un numero complesso *z* prendiamo due radici ennesime corrispondenti a due interi distinti del parametro *k*; diciamo k_1 e k_2. Le due radici coincidono, avendo stesso modulo

$r^{\frac{1}{n}}$, se e solo se le loro anomalie differiscono per un multiplo di $2 \cdot \pi$, ovvero segue, per *h* intero, la seguente uguaglianza:

$$\frac{\vartheta + 2 \cdot k_1 \cdot \pi}{n} - \frac{\vartheta + 2 \cdot k_2 \cdot \pi}{n} = 2 \cdot h \cdot \pi \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\vartheta}{n} + \frac{2 \cdot k_1 \cdot \pi}{n} - \frac{\vartheta}{n} - \frac{2 \cdot k_2 \cdot \pi}{n} = 2 \cdot h \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad k_1 - k_2 = n \cdot h \qquad (18)$$

Dalla (18) si deduce che se nella (17) si attribuiscono al parametro *k* i valori $1,2,3,....,n-1$ si determinano *n* radici distinte e per qualunque altro intero attribuito al parametro *k* si ritrova una radice appartenente al precedente gruppo delle *n* radici distinte.

((10)) INTERPREAZIONE GEOMETRICA DELLE RADICI COMPLESSE

Interpretiamo geometricamente le radici fornite dalla (17); partiamo dalla prima radice ricavata per $k = 0$:

$$r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\vartheta}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\vartheta}{n}\right) \right);$$

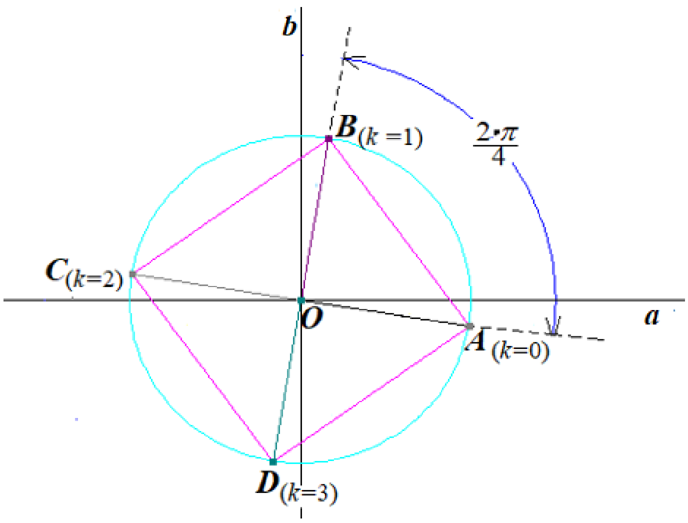
nella ricerca della successiva radice ovvero per $k = 1$, all'angolo ϑ viene addizionato un angolo di ampiezza $\frac{2 \cdot \pi}{n}$, e così di seguito per ogni passaggio da *k* a *k*+1, per $k = 0,1,2,3,....,n-1$.

Le *n* radici distinte riportate sul piano di Argand-Gauss formano i vertici di un poligono regolare per due ragioni:

- ogni vettore, radice ennesima, dista angolarmente dai consecutivi di un angolo $\frac{2 \cdot \pi}{n}$
- ogni punta dei suddetti vettori distano dall'origine *O* del sistema di assi coordinati $r^{\frac{1}{n}}$ **:**

consegue che tutte le punte di quei vettori appartengono alla circonferenza avente centro in *O* e raggio $R = r^{\frac{1}{n}}$ **.**

Così dal precedente **ESEMPIO 1** otteniamo il seguente grafico:



ESEMPIO 2. Calcolo della radice quadrata del numero – *i*

Essendo $r = 1$ e $\vartheta = \frac{3}{2} \cdot \pi$, dalla (17) è:

$$\sqrt{-i} = 1 \cdot \left(\cos \frac{\frac{3}{2} \cdot \pi + 2 \cdot k \cdot \pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\frac{3}{2} \cdot \pi + 2 \cdot k \cdot \pi}{2} \right);$$

- per $k = 0$ $\Rightarrow$ $\sqrt{-i} = \cos\left(\frac{3}{4} \cdot \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3}{4} \cdot \pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$
- per $k = 1$ $\Rightarrow$ $\sqrt{-i} = \cos\left(\frac{7}{4} \cdot \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{7}{4} \cdot \pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$.

((11)) FORMA ESPONENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

Trattasi di un ulteriore modo, detto anche "*forma euleriana*", di esprimere i numeri complessi. Si conviene di porre:

$$e^{i \cdot \vartheta} = \cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta \qquad (19)$$

detta "*identità di Eulero*"

Così la (13 *bis*) diventa:

$$z = a + i \cdot b = r \cdot (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta) = r \cdot e^{i \cdot \vartheta} \qquad (13\ ter)$$

►**GIUSTIFICAZIONE della (19)**

Le funzioni complesse e^{ϑ} , $\cos \vartheta$ e $\sin \vartheta$ sono definite in $\mathbb{C}$ come il limite uniforme delle seguenti serie di potenze che, per ϑ reale, coincidono con l'usuale espansione in *serie di Taylor*:

$$e^{\vartheta} = 1 + \vartheta + \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^3}{3!} + \ldots.$$

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - \frac{\vartheta^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin \vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \frac{\vartheta^7}{7!} + \ldots$$

Sostituiamo ϑ con $i \cdot \vartheta$ e riordinando otteniamo:

$$e^{i \cdot \vartheta} = 1 + i \cdot \vartheta + \frac{(i \cdot \vartheta)^2}{2!} + \frac{(i \cdot \vartheta)^3}{3!} + \frac{(i \cdot \vartheta)^4}{4!} + \frac{(i \cdot \vartheta)^5}{5!} + \frac{(i \cdot \vartheta)^6}{6!} + \frac{(i \cdot \vartheta)^7}{7!} + \frac{(i \cdot \vartheta)^8}{8!} + \ldots. =$$

$$=1+i\cdot\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{i\cdot\vartheta^3}{3!}+\frac{\vartheta^4}{4!}+\frac{i\cdot\vartheta^5}{5!}-\frac{\vartheta^6}{6!}-\frac{i\cdot\vartheta^7}{7!}+\frac{\vartheta^8}{8!}+....=$$

$$=\left(1-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^4}{4!}-\frac{\vartheta^6}{6!}+\frac{\vartheta^8}{8!}\grave{a}...\right)+i\cdot\left(\vartheta-\frac{\vartheta^3}{3!}+\frac{\vartheta^5}{5!}-\frac{\vartheta^7}{7!}+...\right)=\cos\vartheta+i\cdot\sin\vartheta\,. \quad (20)$$

Dalla (20) segue la validità della (13 *ter*).

((12)) EQUAZIONE DI EULERO [Leonhard Euler (1707-1783) matematico svizzero]

Nella (19) poniamo $\vartheta=\frac{\pi}{2}$:

$$e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}=i$$

quadriamo ambi i membri

$$\left(e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\right)^2=i^2 \qquad \Rightarrow \qquad e^{i\cdot\pi}=-1\,,$$

da cui l'equazione di Eulero

$$e^{i\cdot\pi}+1=0\,.$$

E' da attribuirsi al fisico statunitense Richard Phillips Feynman (vincitore del premio Nobel per la fisica nel 1965) la denominazione "*equazione più bella della matematica*".

Indubbiamente è la designazione più appropriata perché, chiunque abbia una certa dimestichezza nella matematica (anche lo studente più comune) non può che rimanere stupito e nel contempo affascinato da tanta bellezza. Infatti questa identità lega i tre numeri reali **1**, ***e***, $\boldsymbol{\pi}$ con il numero immaginario ***i***, dando luogo al nulla: **0**.

Si rileva inoltre che queste cinque entità matematiche, tra loro legate in modo enigmatico, derivano da scenari assai differenti e, tra l'altro, collocati in tempi anche molto diversi:

- il numero 1 è il primo numero dei naturali dal quale i bambini cominciano a contare, numero che è presente in tutte le civiltà della Terra,

- il numero 0, entrato in Europa circa nel 1200 (vedi Fibonacci) provenendo dagli arabi che a loro volta l'avevano scoperto dagli indiani, ha consentito di passare dall'*algebra retorica* all'*algebra simbolica* che è quella che studiamo oggi nelle scuole.

- il numero *e* detto numero di Eulero o costante di Nepero (inventore dei logaritmi) il quale ci informa di aver lavorato per 20 anni alla sua proposta concernente i logaritmi, fino alla pubblicazione nel 1614 della sua opera "Mirifici Logarithmorum", Il numero e = 2.718281828 approssimato alla nona cifra decimale è ricordato con facilità dagli americani, perché dopo la prima cifra decimale (7) si ripete per due volte il numero 1828 che è una data storica per gli Stati Uniti: trattasi delle tariffe protettive del 1928, in base alle quali tutti i benefici risultanti dal sistema protettivo ricadevano sugli industriali del nord, mentre gli agricoltori meridionali dovevano sopportate il peso di prezzi elevati …..

- Il numero π ci ricorda il periodo aureo della geometria greca; è un numero costante **irrazionale** (non esprimibile come rapporto di interi, dimostrato dal matematico Johann Heinrich Lambert nel 1761) e **trascendente** (non può essere soluzione di nessuna equazione algebrica, dimostrato, nel 1882, dal matematico Ferddinand Von Lindmann).

Esso viene definito:

1. **geometricamente**:
   - come il rapporto tra le lunghezze della circonferenza ed il diametro di un cerchio,
   - come l'area di un cerchio avente raggio unitario;
2. **goniometricamente** (in analisi matematica):
   - come il minimo numero positivo che annulla il seno,
   - come la metà del minimo numero positivo che annulla il coseno.

Il simbolo forse è dovuto alla prima lettera della parola *perimetro* (misura intorno) che in greco è $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\zeta$, oppure anche della iniziale del nome del grande matematico di Samo: Pitagora.

Osservazione. Forse è più plausibile la prima ipotesi, perché se fosse la seconda a dare il simbolo a questo numero costante, sarebbe, con tutta probabilità, espresso con carattere maiuscolo, contrariamente alla tradizione che lo vuole espresso con carattere minuscolo.

Pare che il simbolo π, per la prima volta, compaia nell' opera del 1706 "*A New introduction to mathematics*" del matematico Willliam Jones, universalizzato successivamente da Eulero.

- L'unità immaginaria i, il cui quadrato è –1 e che ci rimanda alla disputa rinascimentale italiana tra Niccolò Fontana (Tartaglia) e Girolamo Cardano concernente la risoluzione delle equazioni di terzo grado.

A questo punto, forse, ci viene da porre delle domande:

- È vero che una potenza di base positiva è positiva? Ed allora, come può il primo membro della (1) essere uguale a zero?
- Perché oggetti matematici basilari e, a prima vista tra loro staccati, raggiungono un così piacevole equilibrio?
- Che cosa può esistere di più spirituale dell'influenza che ha l'unità immaginaria, che agendo su dei numeri reali, produce il "nulla"?
- Che esista una Entità, molto più grande di noi, che abbia già scritto la (1) e che ci abbia dato quelle capacità raziocinanti che ci hanno consentito di scoprirla?
- Esisteranno altri elementi basilari della matematica a noi ignoti e tale che quella Entità ci permetterà di scoprirle?

((13)) LOGARITMI DEI NUMERI COMPLESSI

Per determinare il logaritmo di un numero complesso $z = a + i \cdot b$ è necessario esprimerlo nella forma esponenziale $z = r \cdot e^{i \cdot \vartheta}$ nella quale è $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\vartheta \in [-\pi, \pi]$; allora è:

$$\ln z = \ln\left(r \cdot e^{\vartheta \cdot i}\right) = \ln r + \ln e^{\vartheta \cdot i} = \ln r + \vartheta \cdot i \cdot \ln e = \ln r + \vartheta \cdot i \,. \qquad (20)$$

Essendo:

$$\left| \begin{array}{l} z = r \cdot (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta) = r \cdot [\cos(\vartheta + 2 \cdot k \cdot \pi) + i \cdot \sin(\vartheta + 2 \cdot k \cdot \pi)] \\ \\ z = r \cdot e^{\vartheta \cdot i} \end{array} \right. \qquad \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} z = r \cdot (\overbrace{\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta}^{r \cdot e^{\vartheta \cdot i}}) = r \cdot [\cos(\vartheta + 2 \cdot k \cdot \pi) + i \cdot \sin(\vartheta + 2 \cdot k \cdot \pi)] \\ \\ z = r \cdot e^{\vartheta \cdot i} \end{array} \right. \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad z = r \cdot e^{i \cdot (\vartheta + 2 \cdot k \cdot \pi)} \qquad \text{con } k \in Z\,;$$

allora se z e assegnato in forma esponenziale un suo logaritmo l'espressione (20) e tutti i logaritmi complessi di z sono:

$$\ln z = \ln r + (\vartheta + 2 \cdot k \cdot \pi) \cdot i\,;$$

i precedenti logaritmi, sul piano di Gauss, sono disposti su una retta parallela all'asse delle ordinate.

a distanza costante, l'uno dal consecutivo (antecedente) di $2 \cdot \pi$

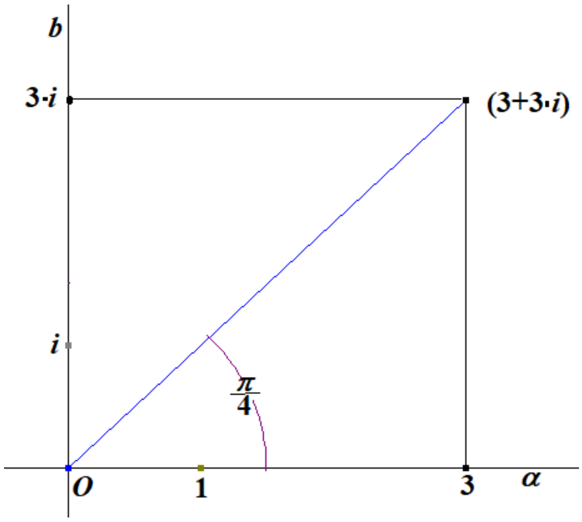
ESEMPIO 1

Determinare il logaritmo di $z = 3 + 3 \cdot i$

SOLUZIONE.

Modulo: $r = 3 \cdot \sqrt{2}$

anomalia: $\vartheta = \frac{\pi}{4}$:



Dalla (20) è:

$$\ln z = \ln \sqrt{18} + \frac{\pi}{4} \cdot i = \frac{1}{2} \cdot \ln 18 + \frac{\pi}{4} \cdot i \, .$$

VERIFICA

$$e^{\frac{1}{2} \cdot \ln 18 + \frac{\pi}{4} \cdot i} = e^{\ln 3 + \frac{1}{2} \cdot \ln 2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(3 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 + 3 \cdot i$$

$$e^{1/2 \cdot \mathrm{LN}(18) + \pi/4 \cdot i} = e^{\mathrm{LN}(3) + \mathrm{LN}(2)/2} \cdot \left(\mathrm{COS}\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = (3 \cdot \sqrt{2}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 + 3 \cdot i$$

OSSERVAZIONE.

Nella premessa abbiamo detto che nel campo complesso si può:

1. estrarre la radice di indice pari di un numero negativo,
2. calcolare il logaritmo di un numero negativo.

Il punto (1.) lo abbiamo già trattato; vediamo il punto (2.)

► Calcolare $\ln(-3)$.

Posiamo scrivere $-3 = -3 + 0 \cdot i$ quindi calcoliamo il logaritmo neperiano del numero complesso $z = -3 + 0 \cdot i$ il quale ha *modulo* $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$ e *anomalia* = π, pertanto è:

$$-3 = 3 \cdot e^{\pi \cdot i} \quad \Rightarrow \quad \ln(-3) = \ln 3 + \pi \cdot i$$

VERIFICA. Dalla elazione $e^{x + y \cdot i} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$, è

$$e^{\ln 3+\pi\cdot i} = e^{\ln 3}\cdot(\cos\pi + i\cdot\sin\pi) = 3\cdot(-1+i\cdot 0) = -3\,.$$

((14)) FUNZIONI GONIOMETRICHE AVENTI NUMERI COMPLESSI PER ARGOMENTI

Considerato il numero complesso $z = a + i\cdot b$, definiamo:

- **seno complesso** di z il numero complesso $\sin z = \dfrac{e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}}{2\cdot i}$,
- **coseno complesso** di z il numero complesso $\cos z = \dfrac{e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}}{2}$.
- **tangente complessa** di z il numero complesso $\tan z = \dfrac{\left(1-e^{2\cdot i\cdot z}\right)\cdot i}{e^{2\cdot i\cdot z}+1}$

Naturalmente è $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; verifichiamolo:

$$\sin^2 z = \left(\frac{e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}}{2\cdot i}\right)^2 = -\frac{e^{-2\cdot i\cdot z}}{4} - \frac{e^{2\cdot i\cdot z}}{4} + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2 z = \left(\frac{e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}}{2}\right)^2 = \frac{e^{-2\cdot i\cdot z}}{4} + \frac{e^{2\cdot i\cdot z}}{4} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 z + \cos^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

Vedi esercizio **((Q))** nel quale il valore della funzione goniometrica, avente per argomento un numero complesso, è maggiore di 1.

((15)) ESERCIZI

((A)) Risolvere l'equazione $\dfrac{1-i}{1+i} = e^{3\cdot x}$.

__________ · __________

Manipoliamo il primo membro dell'equazione:

$$\frac{1-i}{1+i} =$$

$$\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-2\cdot i-1}{1-i^2} = \frac{-2\cdot i}{2} = -i = 1\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi\right)\right] =$$

$$= e^{\left(-\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi\right)\cdot i}$$

da cui:

$$e^{\left(-\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi\right)\cdot i}=e^{3\cdot x}\quad\Rightarrow\quad 3\cdot x=\left(-\frac{\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi\right)\cdot i\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x=\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\cdot k\cdot\pi\right)\cdot i$$

((B)) Determinare $\frac{1}{z}$ essendo $z=\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha$.

———— · ————

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha-i\cdot\sin\alpha}{(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)\cdot(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha-i\cdot\sin\alpha}{\cos^2\alpha-i^2\cdot\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\alpha-i\cdot\sin\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos\alpha-i\cdot\sin\alpha\,.$$

((C)) Può essere reale il prodotto di due numeri che reali non lo sono?

———— · ————

Si! Il prodotto di tutte le coppie di numeri complessi coniugati.

((D)) Quante sono le radici distinte, di indice 6, del numero 1? Che figura individuano sul piano di Argand-Gauss?

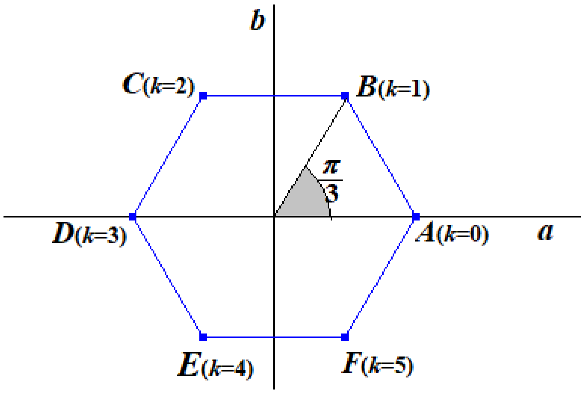
———— · ————

$$z=\sqrt[6]{1}=\sqrt[6]{\cos 0+i\cdot\sin 0}=\cos\frac{0+2\cdot k\cdot\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{0+2\cdot k\cdot\pi}{6}\qquad k\in Z\,;$$

Le radici distinte sono:

- per $k = 0$ $\Rightarrow$ $z_1=1$
- per $k = 1$ $\Rightarrow$ $z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$
- per $k = 2$ $\Rightarrow$ $z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$
- per $k = 3$ $\Rightarrow$ $z_4=-1$
- per $k = 4$ $\Rightarrow$ $z_5=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$
- per $k = 5$ $\Rightarrow$ $z_6=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$

Le sei radici distinte $z_i / i = 1,2,3,4,5,6$ sono i vertici, sul piano di Argand-Gauss, di un esagono regolare:



((E)) Risolvere l'equazione:

$$z^2 + \left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)\cdot z - 1 + \sqrt{3}\cdot i$$

…

$$z = \frac{-1-\sqrt{3}\cdot i \pm \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)^2 - 4\cdot\left(-1+\sqrt{3}\cdot i\right)}}{2} \qquad \text{(a)}$$

Scriviamo il discriminante:

$$\Delta = 1 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot i - 3 + 4 - 4\cdot\sqrt{3}\cdot i = 2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot i = 2 - 3\cdot\sqrt{3}\cdot i \qquad \text{(b)}$$

Poniamo il numero complesso

$$\delta = a + i\cdot b / (a,b) \in R \qquad \text{(c)}$$

tale che sia

$$\delta^2 = \Delta \qquad \text{(d)}$$

Calcoliamo il quadrato di δ:

$$\delta^2 = (a + b\cdot i)^2 = a^2 - b^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot i \qquad \text{(e)}$$

Dalla (d) abbiamo:

$$a^2 - b^2 = 2 \wedge ab = -\sqrt{3} \qquad \text{(f)}$$

Risolviamo il sistema (f)

$$b = -\frac{\sqrt{3}}{a} \qquad \Rightarrow \qquad a^2 - \frac{3}{a^2} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad a^4 - 2\cdot a^2 - 3 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a=-i \vee a=i \vee a=-\sqrt{3} \vee a=\sqrt{3}$$

per la (c) teniamo conto solo delle soluzioni reali; pertanto otteniamo due coppie del numero (c)

$$\left(a=-\sqrt{3}; b=1\right) \vee \left(a=\sqrt{3}; b=-1\right)$$

che sostituiamo nella (a):

$$z_1=\frac{-1-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{2}=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot i$$

$$z_2=\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i+\sqrt{3}-i}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot i$$

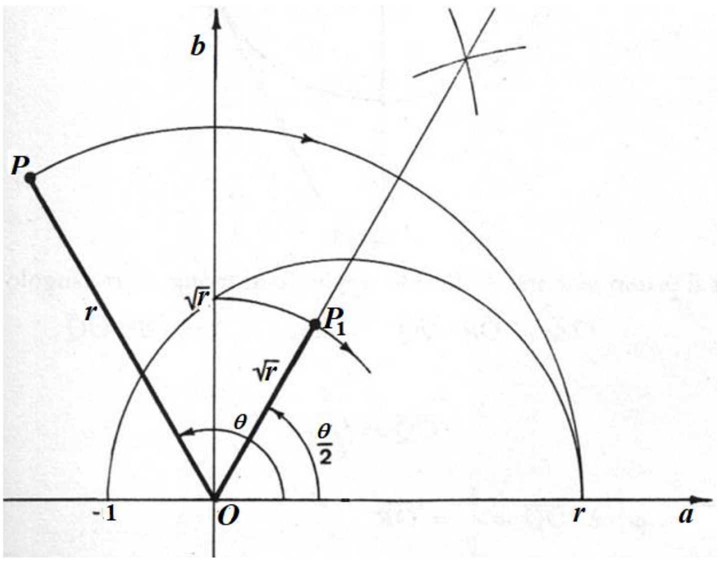
((F)) Costruire la radice quadrata di un numero complesso.

___________ · ___________

Essendo $\sqrt{r\cdot(\cos\vartheta+i\cdot\sin\vartheta)}=\sqrt{r}\cdot\left(\cos\frac{\vartheta}{2}+i\cdot\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$, il modulo o anomalia è $\sqrt{r}$ si può considerare come medio proporzionale fra l'unità ed il radicando *r*, cioè:

$$1:\sqrt{r}=\sqrt{r}:r\,.$$

- Il modulo $\sqrt{r}$ si può costruire applicando uno dei due teoremi di Euclide ;
- l'argomento o anomalia $\frac{\vartheta}{2}$ si ottiene costruendo la bisettrice dell'argomento ϑ.

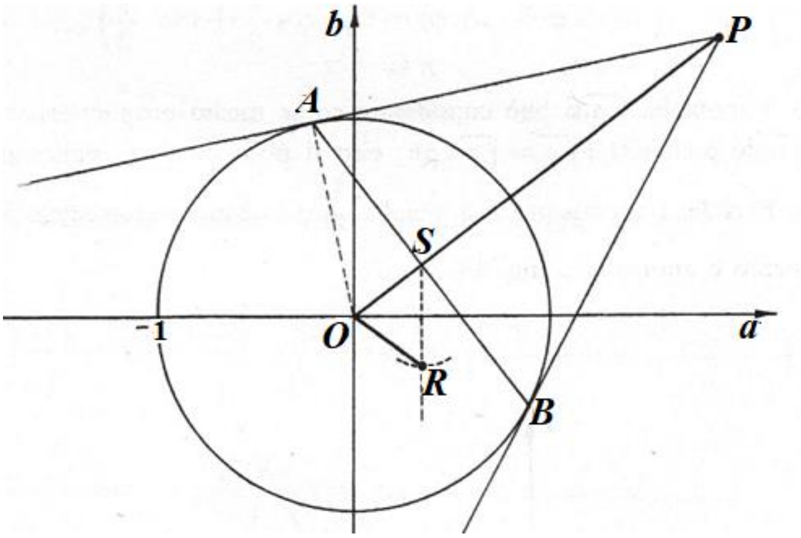


((G)) Costruire il reciproco di un numero complesso.

___________ · ___________

Conduciamo dal punto *P*, immagine del numero complesso dato, le tangenti alla circonferenza di raggio unitario, avente il centro nell'origine del piano di Argand-Gauss.

Consideriamo la corda *AB* avente gli estremi nei punti di tangenza; suddetta corda interseca la retta *PO* nel punto *S*. Il punto *R*, simmetrico di *S*, rispetto all'asse reale, è l'immagine del reciproco del numero complesso dato.



Infatti, per il primo teorema di Euclide, applicato al triangolo rettangolo *OAP*, è:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OP}\cdot\overline{OS} \quad \Rightarrow \quad 1 = \overline{OP}\cdot\overline{OS} \quad \Rightarrow \quad \overline{OS} = \frac{1}{\overline{OP}}.$$

Essendo $\overline{OP} = r$, risulta $\overline{OS} = \frac{1}{r} = \overline{OR}$; segue che il punto R è l'immagine del reciproco del numero dato.

((H)) Calcolare $z = \log_i(-1-i)$

———— · ————

- modulo di $-1-i$: $r = \sqrt{2}$
- per *k* = 0, anomalia di $-1-i$: $\vartheta = -\frac{3}{4}\cdot\pi$, nell'intervallo $[-\pi;\pi[$

Calcoliamo il logaritmo naturale di $-1-i$:

$$\ln(-1-i) = \ln\left(\sqrt{2}\cdot e^{\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\cdot i}\right) = \frac{1}{2}\cdot\ln 2 - \frac{3}{4}\cdot\pi\cdot i \qquad (*)$$

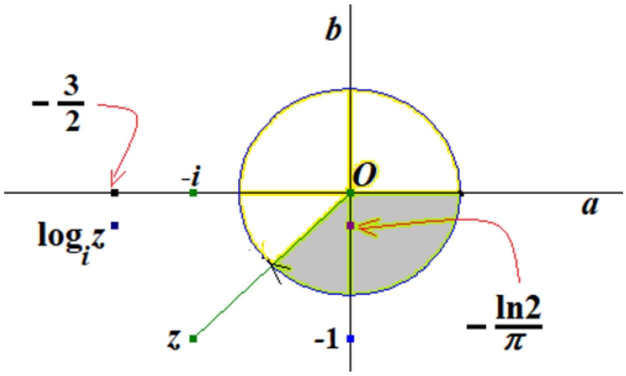
Per il teorema del cambiamento di base del logaritmo, essendo (sempre per *k* =0):

- modulo di i: $r = 1$
- anomalia di i: $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

- $\ln(i)=\ln\left(1\cdot e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}\right)=\ln 1+\frac{\pi}{2}\cdot i=\frac{\pi}{2}\cdot i$.

risulta

$$z=\log_i(-1-i)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\ln 2-\frac{3}{4}\cdot\pi\cdot i}{\ln i}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\ln 2-\frac{3}{4}\cdot\pi\cdot i}{\frac{\pi}{2}\cdot i}=\frac{\ln 2}{\pi\cdot i}-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{\ln 2}{\pi}\cdot i$$



►Ora consideriamo la periodicità dell'anomalia:

$$\ln(-1-i)=\ln\left(\sqrt{2}\cdot e^{\left(-\frac{3}{4}\pi+2\cdot k\cdot\pi\right)\cdot i}\right)=\frac{1}{2}\cdot\ln 2+\left(-\frac{3}{4}\cdot\pi+2\cdot k\cdot\pi\right)\cdot i,\quad \text{con } k\in Z \qquad (*)$$

$$\ln(i)=\ln\left(1\cdot e^{\left(\frac{\pi}{2}+2\cdot h\cdot\pi\right)\cdot i}\right)=\ln 1+\left(\frac{\pi}{2}+2\cdot h\cdot\pi\right)\cdot i=\left(\frac{\pi}{2}+2\cdot h\cdot\pi\right)\cdot i,\quad \text{con}\quad h\in Z \qquad (**)$$

allora il rapporto della (*) con la (**) è:

$$\log_i(-1-i)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\ln 2+\left(-\frac{3}{4}\cdot\pi+2\cdot k\cdot\pi\right)\cdot i}{\left(\frac{\pi}{2}+2\cdot h\cdot\pi\right)\cdot i}, \qquad (***)$$

pertanto i logaritmi, in base *i*, di (– 1 –*i*) sono ∞^2.

Nella (***) poniamo *h* = 0 e calcoliamo i logaritmi per *k* variabile, per esempio, da – 3 a +3, estremi inclusi ed otteniamo la matrice:

k	$\log_i(-1-i)$
-3	$-\dfrac{27}{2}-\dfrac{i\cdot \mathrm{LN}(2)}{\pi}$
-2	$-\dfrac{19}{2}-\dfrac{i\cdot \mathrm{LN}(2)}{\pi}$
-1	$-\dfrac{11}{2}-\dfrac{i\cdot \mathrm{LN}(2)}{\pi}$
0	$-\dfrac{3}{2}-\dfrac{i\cdot \mathrm{LN}(2)}{\pi}$
1	$\dfrac{5}{2}-\dfrac{i\cdot \mathrm{LN}(2)}{\pi}$
2	$\dfrac{13}{2}-\dfrac{i\cdot \mathrm{LN}(2)}{\pi}$
3	$\dfrac{21}{2}-\dfrac{i\cdot \mathrm{LN}(2)}{\pi}$

dalla quale emerge il logaritmo (nel rettangolo di colore rosso), per k = 0, prima ottenuto e posizionato in grafico.

Ovviamente è:

$$i^{-27/2\ -\ i\cdot \mathrm{LN}(2)/\pi} = \ldots\ldots = i^{13/2\ -\ i\cdot \mathrm{LN}(2)/\pi} = \ldots\ldots = -1-i$$

OSSERVAZIONE.

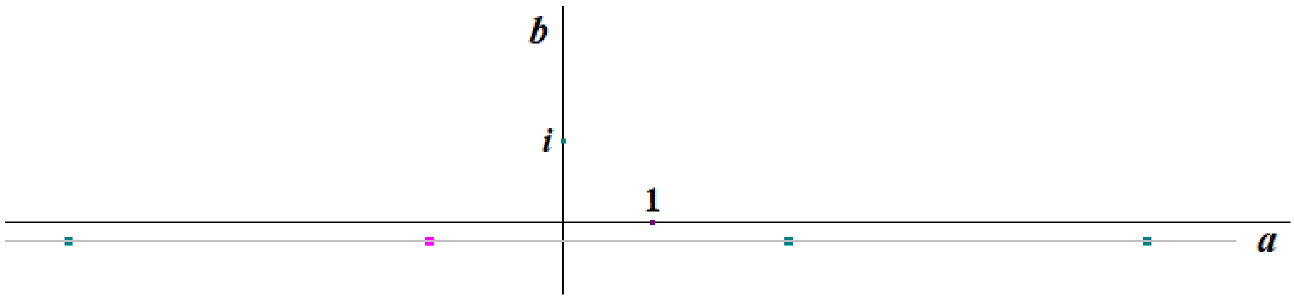
Riprendiamo la (***) e poniamo h=0:

$$\log_i(-1-i)=\frac{\frac{1}{2}\cdot \ln 2+\left(-\frac{3}{4}\cdot \pi+2\cdot k\cdot \pi\right)\cdot i}{\frac{\pi}{2}\cdot i}=\ldots=\frac{8\cdot k-3}{2}-\frac{\ln 2}{\pi}\cdot i$$

calcoliamo i logaritmi per k variabile, per esempio, da – 1 a +3, estremi inclusi ed otteniamo la matrice:

$$\begin{array}{c|c} k & \log_i(-1-i) \\ \hline -\dfrac{11}{2} & -\dfrac{LN(2)}{\pi} \\ \boxed{-\dfrac{3}{2}} & \boxed{-\dfrac{LN(2)}{\pi}} \\ \dfrac{5}{2} & -\dfrac{LN(2)}{\pi} \\ \dfrac{13}{2} & -\dfrac{LN(2)}{\pi} \\ \dfrac{21}{2} & -\dfrac{LN(2)}{\pi} \end{array}$$

da cui il grafico:



nel quale si ritrova il logaritmo, in base *i*, di -1-*i*, determinato precedentemente; tutti questi punti, sul piano di Gauss, appartengono alla retta di equazione $b = -\dfrac{\ln 2}{\pi}$.

Ovviamente è:

$$i^{-11/2 - i\cdot LN(2)/\pi} = ...= i^{13/2 - i\cdot LN(2)/\pi} =....= -1 - i\,.$$

((I)) Dopo avere risolto l'equazione $x^2 - 4\cdot\sqrt{3}\cdot x + 16 = 0$,

1. determinare modulo e anomalia delle radici,
2. verificare che il prodotto dei due quozienti delle radici è uguale a 1,
3. determinare il settimo termine dello sviluppo della decima potenza della radice il cui grafico è il punto appartenente al quarto quadrante.

1. $x_1 = 2\cdot\sqrt{3} - 2\cdot i \quad \vee \quad x_2 = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot i$; $r_1 = r_2 = \sqrt{\left(2\cdot\sqrt{3}\right)^2 + 4} = 4$;

   $\vartheta_1 = \arctan\left(\frac{2}{2\cdot\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$; $\vartheta_2 = \arctan\left(-\frac{2}{2\cdot\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

2. $\frac{x_1}{x_2} = \frac{2\cdot\sqrt{3} - 2\cdot i}{2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot i} = \frac{(2\cdot\sqrt{3} - 2\cdot i)^2}{(2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot i)\cdot(2\cdot\sqrt{3} - 2\cdot i)} = \frac{12 - 8\cdot\sqrt{3}\cdot i + 4}{12 + 4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$

   $\frac{x_2}{x_1} = \frac{2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot i}{2\cdot\sqrt{3} - 2\cdot i} = ... = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$

   $(a + b\cdot i)\cdot(c + d\cdot i) \rightarrow (a\cdot c - b\cdot d) + (a\cdot d + b\cdot c)\cdot i$

   prodotto dei rapporti $= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}\right) = ... = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot i = 1$

3. Lo sviluppo della potenza ennesima di in binomio è $(a+b)^n = \sum_{k=0\backslash}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k =$

   $= \sum_{k=0\backslash}^{n}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$ e il termine dello sviluppo che occupa il posto h è

   $T_h = \binom{n}{h-1}\cdot a^{n-h+1}\cdot b^{h-1}$, allora:

$$T_7 = \binom{10}{6}\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}\right)^4\cdot(-2\cdot i)^6 = 210\cdot 144\cdot 64\cdot i^6 = -1935360.$$

((J)) Cosa succede se si moltiplica per $i^k / k \in N_0$ il numero complesso $z = -2 - i$?

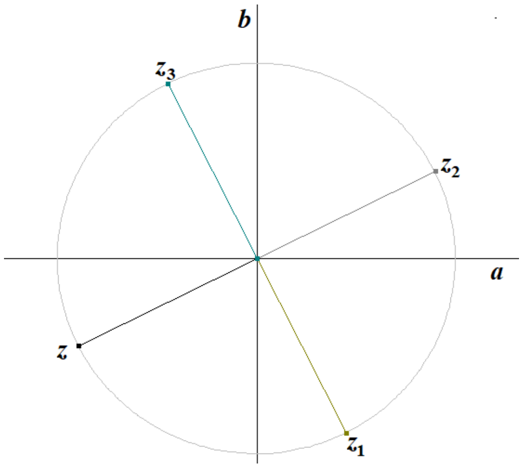
1. $z_1 = (-2-i)\cdot i = 1 - 2\cdot i$
2. $z_2 = (-2-i)\cdot i^2 = 2 + i$
3. $z_3 = (-2-i)\cdot i^3 = -1 + 2\cdot i$
4. $z_4 = (-2-i)\cdot i^4 = -2 - i = z$

———— • ————

- Al punto (1.) *z* ha ruotato di $\frac{\pi}{2}$,
- al punto (2.) *z* ha ruotato di π,
- al punto (3.) *z* ha ruotato di $\frac{3}{2}\cdot\pi$,
- al punto (4.) *z* ha ruotato di $2\cdot\pi$;

quindi il ciclo si ripete indefinitamente per $k > 4$.

Gli z_i appartengono alla circonferenza di equazione $a^2 + b^2 = 5$, essendo $r = \sqrt{5}$ il modulo di tutti i numeri complessi z_i



Si può verificare che z, z_1, z_2, z_3 sono le radici dell'equazione $x^4 + 7 - 24 \cdot i = 0$ -

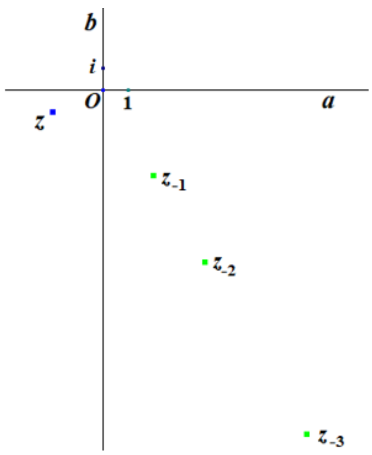
((*K*)) Dato il numero complesso $z = -2 - i$, dire le caratteristiche dei numeri complessi z_k tale che sia:

$$z_k = z \cdot \left(\frac{1}{2^k} \cdot i \right), \text{ con } k \in Z .$$

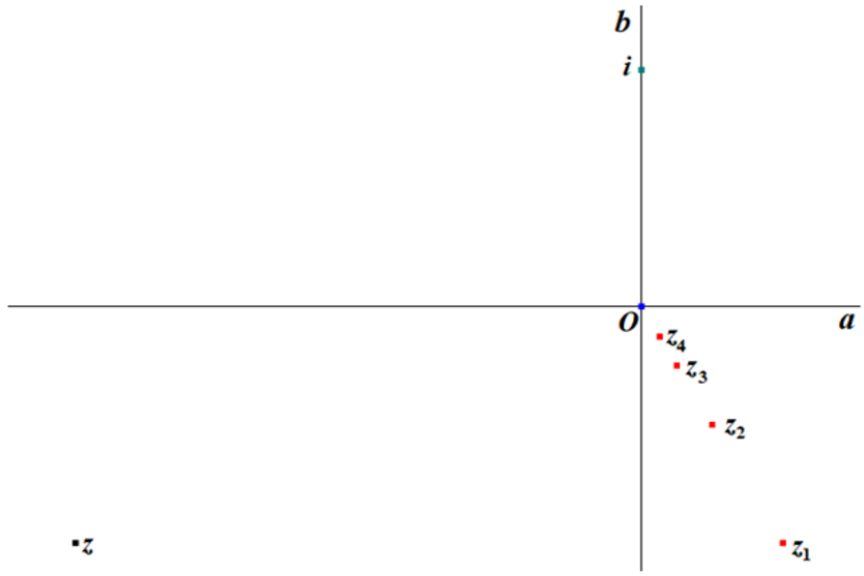
———————— • ————————

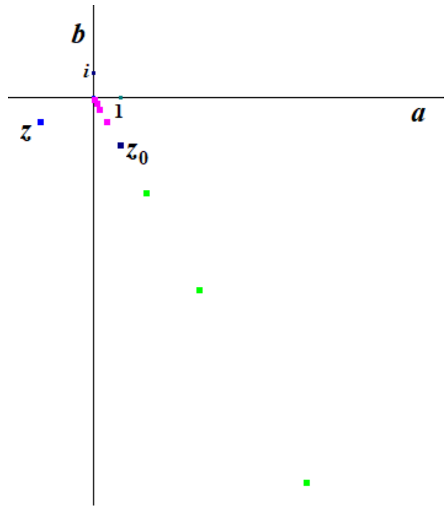
I numeri complessi z_k provengono moltiplicando z, tramite il coefficiente $\frac{1}{2^k}$, per l'unità immaginaria *i*, pertanto sono tutti posizionati sulla semiretta, passante per l'origine degli assi, perpendicolare al raggio vettore del numero *z*; in particolare per $k = 0$ si ha il vettore z_0 che è ha modulo uguale a quello di *z* e ruotato, in senso diretto, di $\frac{\pi}{2}$.

k	z_k
-3	$8 - 16 \cdot i$
-2	$4 - 8 \cdot i$
-1	$2 - 4 \cdot i$



k	z_k
1	$\frac{1}{2} - i$
2	$\frac{1}{4} - \frac{i}{2}$
3	$\frac{1}{8} - \frac{i}{4}$
4	$\frac{1}{16} - \frac{i}{8}$





Gli z_k formano una progressione geometrica di infiniti termini, procedendo da indici negativi a indici positivi, avente ragione $q = \frac{1}{2}$, tutti posizionati sulle semiretta, appartenente a quarto quadrante di equazione $b = -2 \cdot a$.

((*L*))

Quale differenza sostanziale esiste tra l'estrazione della radice quadrata di 25 e l'estrazione della radice quadrata di $8 - 6 \cdot i$?

- $\sqrt{25} = 5$, contrariamente a quanto qualcuno possa pensare alla duplice radice ± 5; mai si può scrivere $\sqrt{25} = -5$ perché i due membri di una uguaglianza numerica reale sono uguali in *valore* e *segno*.
- $\sqrt{8 - 6 \cdot i} = 3 - i \vee -3 + i$; ciò è dovuto al fatto che i numeri complessi non hanno segno. Giustifichiamo i risultati:

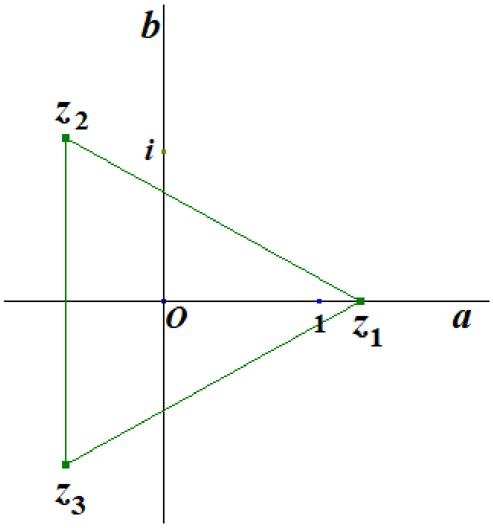
pongo $\sqrt{8-6\cdot i}=a+b\cdot i \quad \Rightarrow \quad 8-6\cdot i=a^2-b^2+2\cdot a\cdot b\cdot i \quad \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=8 \\ a\cdot b=-3 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-i \wedge b=-3\cdot i \\ a=i \wedge b=3\cdot i \\ a=-3 \wedge b=1 \\ a=3 \wedge b=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -i-3\cdot i\cdot i=3-i \\ i+3\cdot i\cdot i=-3+i \\ -3+1\cdot i=-3+i \\ 3-1\cdot i=3-i \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{8-6\cdot i}=\begin{cases} 3-i \\ -3+i \end{cases}$$

Determinare il numero complesso *z*, radice terza di 2 verificando che le tre radici sono i vertici (sul piano di Argan-Gauss) di un triangolo rettangolo equilatero.

$$z=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{0+2\cdot k\cdot\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{0+2\cdot k\cdot\pi}{3}\right);$$

- per $k = 0$: $z_1=\sqrt[3]{2}$
- per $k = 1$: $z_2=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{2\cdot\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot i\right)$
- per $k = 2$: $z_3=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{4\cdot\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{4\cdot\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot i\right)$



Si può verificare che i lati del triangolo hanno lunghezza $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{108}$.

((*M*)) ►Di due numeri complessi $z_1=a+b\cdot i$ e $z_2=a'+b'\cdot i$ si sa:

1. $a = 3$,
2. $z_1+z_2=1+5\cdot i$,
3. $\frac{z_1}{z_2}=-i$

Determinare z_1 e z_2 .

———— · ————

$$z_1 + z_2 = 3 + b \cdot i + a' + b' \cdot i = 3 + a' + (b + b') \cdot i = 3 + a' + 5 \cdot i$$
$$z_1 + z_2 = 1 + 5 \cdot i = 3 + a' + 5 \cdot i \qquad \Rightarrow \qquad 1 = 3 + a' \quad \Rightarrow \quad a' = -2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + b \cdot i}{-2 + b' \cdot i} = \frac{(3 + b \cdot i) \cdot (-2 - b' \cdot i)}{(-2 + b' \cdot i) \cdot (-2 - b' \cdot i)} = \frac{b \cdot b' - 6 - (2 \cdot b + 3 \cdot b') \cdot i}{b'^2 + 4} = -i$$

$$\begin{cases} b \cdot b' - 6 = 0 \\ \dfrac{2 \cdot b + 3 \cdot b'}{b'^2 + 4} = 1 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = 2 \\ b' = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1 = 3 + 2 \cdot i \\ z_2 = -2 + 3 \cdot i \end{cases}$$

VERIFICA.

$$z_1 + z_2 = (3 + 2 \cdot i) + (-2 + 3 \cdot i) = 1 + 5 \cdot i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2 \cdot i}{-2 + 3 \cdot i} = \frac{(3 + 2 \cdot i) \cdot (-2 - 3 \cdot i)}{(-2 + 3 \cdot i) \cdot (-2 - 3 \cdot i)} = \frac{(3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-3)) + (3 \cdot (-3) + 2 \cdot (-2)) \cdot i}{4 + 9} =$$
$$= \frac{0 - 13 \cdot i}{13} = -i$$

((*N*)) Determinare i due numeri complessi z_1 e z_2 conoscendo il loro prodotto $P = 9 + 7 \cdot i$ e la loro somma $S = 4 + i$.

La determinazione di due numeri reali conoscendone la somma *S* e il loro prodotto *P* avviene mediante l'equazione $x^2 - S \cdot x + P = 0$; in modo analogo avviene nel campo complesso sostituendo alla variabile reale *x* la variabile complessa *z*: $z^2 - S \cdot z + P = 0$.
Pertanto si ha:

$$z^2 - (4 + i) \cdot z + 9 + 7 \cdot i = 0 + 0 \cdot i$$

le cui radici sono:

$$z = \frac{4 + i \pm \sqrt{(4 + i)^2 - 4 \cdot (9 + 7 \cdot i)}}{2} = \frac{4 + i \pm \sqrt{-21 - 20 \cdot i}}{2} =$$
$$= \frac{4 + i \pm (2 - 5 \cdot i)}{2} = 3 - 2 \cdot i \vee 1 + 3 \cdot i\,.$$

VERIFICA.

$$S = (3 - 2 \cdot i) + (1 + 3 \cdot i) = (3 + 1) + (-2 + 3) \cdot i = 4 + i$$
$$P = (3 - 2 \cdot i) \cdot (1 + 3 \cdot i) = (3 \cdot 1 - (-2) \cdot 3) + (3 \cdot 3 + (-2) \cdot 1) \cdot i = 9 + 7 \cdot i\,.$$

Verifichiamo l'estrazione della radice quadrata del discriminante:
poniamo $(a + b \cdot i)^2 = -21 - 20 \cdot i$, da cui:

$$a^2 - b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot i = -21 - 20 \cdot i \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 = -21 \wedge +2 \cdot a \cdot b = -20 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \; (a = -5 \cdot i \wedge b = -2 \cdot i) \vee (a = 5 \cdot i \wedge b = 2 \cdot i) \vee (a = -2 \wedge b = 5) \vee (a = 2 \wedge b = -5)$$

$$\sqrt{-21-20\cdot i} = a+b\cdot i = \begin{cases} -5\cdot i+(-2\cdot i)\cdot i = 2-5\cdot i \\ 5\cdot i+(2\cdot i)\cdot i = -2+5\cdot i \\ -2+5\cdot i \\ 2+(-5)\cdot i = 2-5\cdot i \end{cases}$$

((*O*)) Verificare l'identità $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)^3 = i$.

———— · ————

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot i + 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot i\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot i\right)^3 =$$

$$= \frac{3\cdot\sqrt{3}}{8}+\frac{9}{8}\cdot i+\frac{3\cdot\sqrt{3}}{8}\cdot i^2+\frac{1}{8}\cdot i^3 = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{8}+\frac{9}{8}\cdot i-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}\cdot i =$$

$$= \frac{9}{8}\cdot i-\frac{1}{8}\cdot i = \frac{8}{8}\cdot i = i.$$

((*P*)) I numeri complessi $z_0 = 0+0\cdot i$, $z_1 = 3-i$, z_2, z_3 sono, sul piano di Argmd-Gauss, i vertici di un quadrato. sapendo che il centro del quadrato è l'immagine del numero complesso $z^* = 2+i$, determinare z_2 e z_3.

———— · ————

Determinazione di z_2.

L'immagine di z^* è il punto medio delle immagini di z_2 e z_0, quindi:

$$z^* = \frac{z_0+z_2}{2} \qquad \Rightarrow \; z_2 = 2\cdot z^* - z_0 = 2\cdot(2+i) = 4+2\cdot i$$

Determinazione di z_3.

Facciamo ruotare z_1, nel senso diretto, di $\frac{\pi}{2}$:

$$z_3 = z_1\cdot i = (3-i)\cdot i = 1+3\cdot i.$$

((*Q*)) Risolvere l'equazione $\cos z - 2 = 0$

———— · ————

Ricordiamo

$$\cos z = \frac{e^{i\cdot z}+e^{-i\cdot z}}{2}$$

Allora l'equazione data può scriversi:

$$\frac{e^{i\cdot z}+e^{-i\cdot z}}{2}-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad e^{z\cdot i}+e^{-i\cdot z}-4=0$$

moltiplichiamo ambo i membri per $e^{z\cdot i}$:

$$e^{2\cdot z\cdot i}+e^{-i\cdot z+z\cdot i}-4\cdot e^{z\cdot i}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(e^{z\cdot i}\right)^2-4\cdot\left(e^{z\cdot i}\right)+1=0$$

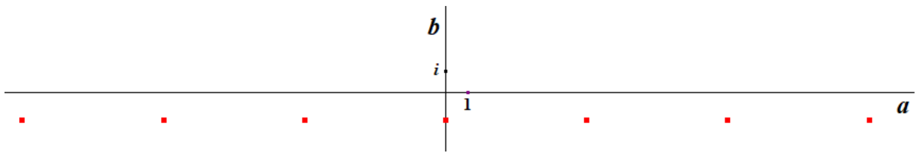
che è un'equazione algebrica di secondo grado nella variabile $e^{z\cdot i}$:

$$e^{z\cdot i}=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt{3}=\left|\begin{matrix}2+\sqrt{3}\\ 2-\sqrt{3}\end{matrix}\right.;$$

1. $e^{z\cdot i}=\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\cos 0+i\cdot\sin 0\right)$
   due espressioni positive uguali hanno uguali logaritmi; mediante il logaritmo in base *e*, è
   $$z\cdot i=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+2\cdot k\cdot\pi\cdot i \quad\Rightarrow\quad z=\frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{i}+2\cdot k\cdot\pi \quad\Rightarrow$$
   $$z=\frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot i}{i^2}+2\cdot k\cdot\pi= \ z=2\cdot k\cdot\pi-i\cdot\ln\left(2+\sqrt{3}\right);$$
   analogamente:
2. $z=2\cdot k\cdot\pi-i\cdot\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$

Riportiamo sul piano di Argand-Gauss le immagini delle radici al punto (1.) per *k* variabile da –3 a +3, inclusi gli estremi

k	*a*	*b*
–3	$-6\cdot\pi$	$-\mathrm{LN}(\sqrt{3}+2)$
–2	$-4\cdot\pi$	$-\mathrm{LN}(\sqrt{3}+2)$
–1	$-2\cdot\pi$	$-\mathrm{LN}(\sqrt{3}+2)$
0	0	$-\mathrm{LN}(\sqrt{3}+2)$
1	$2\cdot\pi$	$-\mathrm{LN}(\sqrt{3}+2)$
2	$4\cdot\pi$	$-\mathrm{LN}(\sqrt{3}+2)$
3	$6\cdot\pi$	$-\mathrm{LN}(\sqrt{3}+2)$



le radici al unto (1.) appartengono alla retta di equazione $b=-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

((*R*)) Risolvere l'equazione $z^2+2(1-\sin\alpha)\cdot z+2\cdot(1-\sin\alpha)=0$ e verificare che le radici hanno immagine, sul piano di Argand-Gauss, appartenenti ad una circonferenza.

———————— • ————————

$$\frac{\Delta}{4}=(1-\sin\alpha)^2-2(1-\sin\alpha)=1-2\cdot\sin\alpha+\sin^2\alpha-2+2\cdot\sin\alpha=\sin^2\alpha-1=$$

$$= \sin^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -\cos^2\alpha = (i\cdot\cos\alpha)^2,$$

pertanto le radici sono:

$$z_1 = -(1-\sin\alpha) + i\cdot\cos\alpha; \quad z_2 = -(1-\sin\alpha) - i\cdot\cos\alpha.$$

Assegniamo, per esempio nell'espressione z_1 tre valori, a piacere, ad α per ottenere tre radici a cui corrispondono tre punti della circonferenza; per esempio:

- $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1' = -1 - 1\cdot i$
- $\alpha = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad z_1'' = 0 + 0\cdot i$
- $\alpha = \dfrac{3\cdot\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad z_1''' = -2 + 0\cdot i$;

l'equazione della circonferenza, passando per il centro del sistema di assi (punto z_1'' è del tipo $a^2 + b^2 + m\cdot a + n\cdot b = 0$ e, per la condizione di appartenenza di un punto ad una curva, è:

$$\begin{vmatrix} \alpha = 0 \Rightarrow -m - n + 2 = 0 \\ \alpha = \dfrac{3\cdot\pi}{2} \Rightarrow 4 - 2m = 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} m = 2 \\ n = 0 \end{vmatrix}$$

quindi l'equazione della circonferenza è

$$a^2 + b^2 + 2\cdot a = 0. \qquad (*)$$

Verifichiamo che questa equazione è veramente il luogo geometrico delle radici dell'equazione assegnata; basta verificare che la (*) è soddisfatta dalle coordinate del punto generico $P_1 = (-1+\sin\alpha; \cos\alpha)$ o $P_2 = (-1+\sin\alpha; -\cos\alpha)$:

$$1 - 2\cdot\sin\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\cdot(-(1-\sin\alpha)) = 0 \Rightarrow$$

$$1 - 2\cdot\sin\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\cdot\sin\alpha - 2 = 0 \Rightarrow 1 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Mediante il seguente programma in DERIVE.6

$$\text{VECTOR}\left([\alpha, -(1-\text{SIN}(\alpha)) + i\cdot\text{COS}(\alpha) \vee -(1-\text{SIN}(\alpha)) - i\cdot\text{COS}(\alpha)], \alpha, 0, \frac{4\cdot\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right)$$

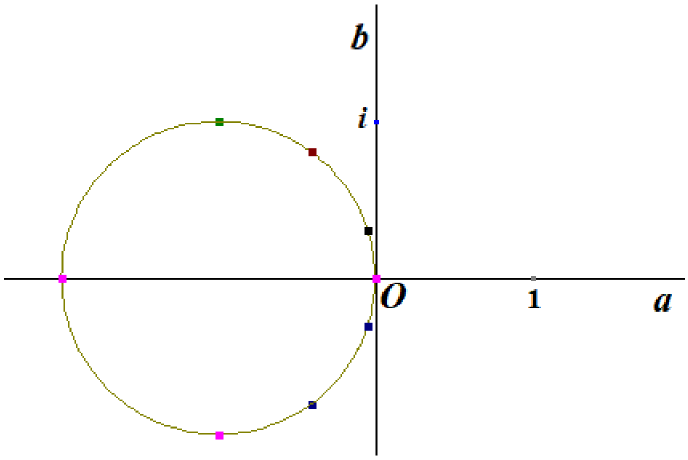
in esecuzione otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 - i \vee -1 + i \\ \dfrac{\pi}{5} & \dfrac{\sqrt{(10-2\cdot\sqrt{5})}}{4} - 1 - i\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{4}\right) \vee \dfrac{\sqrt{(10-2\cdot\sqrt{5})}}{4} - 1 + i\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{4}\right) \\ \dfrac{2\cdot\pi}{5} & \dfrac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5}+10)}}{4} - 1 + i\cdot\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{5}}{4}\right) \vee \dfrac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5}+10)}}{4} - 1 + i\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4} - \dfrac{1}{4}\right) \\ \dfrac{3\cdot\pi}{5} & \dfrac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5}+10)}}{4} - 1 + i\cdot\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{5}}{4}\right) \vee \dfrac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5}+10)}}{4} - 1 + i\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4} - \dfrac{1}{4}\right) \\ \dfrac{4\cdot\pi}{5} & \dfrac{\sqrt{(10-2\cdot\sqrt{5})}}{4} - 1 - i\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{4}\right) \vee \dfrac{\sqrt{(10-2\cdot\sqrt{5})}}{4} - 1 + i\cdot\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{4}\right) \end{bmatrix}$$

ovvero i punti

$$\begin{bmatrix} 0 & -1;-1 \;\vee\; -1;+1 \\ \frac{\pi}{5} & \frac{\sqrt{(10-2\cdot\sqrt{5})}}{4}-1\;;\;-\left(\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{4}\right) \;\vee\; \frac{\sqrt{(10-2\cdot\sqrt{5})}}{4}-1\;;\;\left(\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{4}\right) \\ \frac{2\cdot\pi}{5} & \frac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5}+10)}}{4}-1\;;\;\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}\right) \;\vee\; \frac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5}+10)}}{4}-1\;;\;\left(\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{4}\right) \\ \frac{3\cdot\pi}{5} & \frac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5}+10)}}{4}-1\;;\;\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}\right) \;\vee\; \frac{\sqrt{(2\cdot\sqrt{5}+10)}}{4}-1\;;\;\left(\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{4}\right) \\ \frac{4\cdot\pi}{5} & \frac{\sqrt{(10-2\cdot\sqrt{5})}}{4}-1\;;\;-\left(\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{4}\right) \;\vee\; \frac{\sqrt{(10-2\cdot\sqrt{5})}}{4}-1\;;\;\left(\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{4}\right) \end{bmatrix}$$

Riportiamo, sul piano di A.G., i sei punti distinti nella matrice e i punti (di colore rosso) che ci hanno permesso di determinare l’equazione della circonferenza



((*S*)) Determinare l'insieme delle immagini dei numeri complessi *z* in modo tale che il numero complesso

$$w=(1+z)\cdot(1+i\cdot z) \qquad (*)$$

sia:
I) immaginario puro,
II) reale.

____________ • ____________

Poniamo $z=a+b\cdot i$; allora la (*) diventa:

$$w=(1+(a+b\cdot i))\cdot(1+i\cdot(a+b\cdot i))$$

ovvero

$$w=a\cdot(1-2\cdot b)-b+1+i\cdot\left(a^2+a-b\cdot(b-1)\right)$$

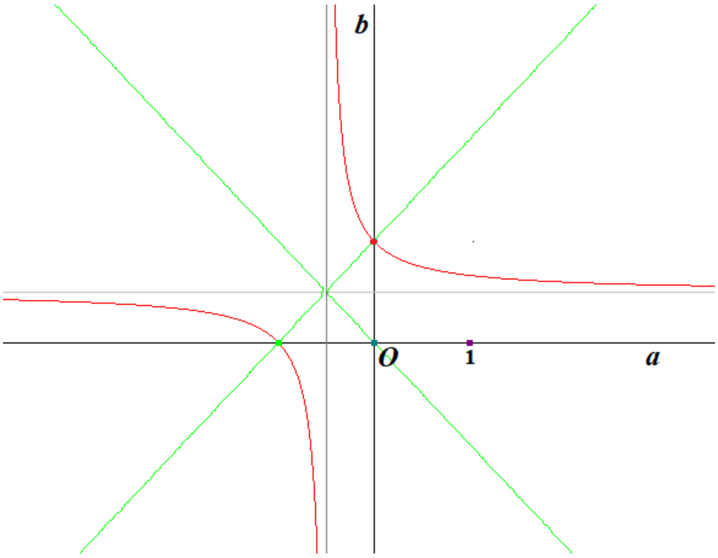
I) w è immaginario puro se $a\cdot(1-2\cdot b)-b+1=0$ che esplicitata rispetto a *b*, diventa

$$b=\frac{a+1}{2\cdot a+1} \qquad (**)$$

II) w è reale se $a^2+a-b\cdot(b-1)=0$ ovvero

$$(a+b)\cdot(a-b+1)=0 \qquad (***)$$

La (**) è l'equazione di una iperbole con asintoto verticale di equazione $a=-\frac{1}{2}$ ed orizzontale $b=\frac{1}{2}$; la (***) è l'intersezione della seconda bisettrice con la parallela alla prima bisettrice passante per il punto $(-1;0)$



I) Tutte le immagini dei numeri *w*, immaginari puri, appartengono all'iperbole escluso il vertice (– 1; 0) che è immagine del numero reale $-1+0\cdot i=-1\in R$;

II) tutte le immagini dei numeri *w*, reali, appartengono all'iperbole degenere escluso il vertice (0; 1) che è immagine del numero immaginario puro $0+1\cdot i=i\in\Im$.

((*T*)) Analizzare, per $k\in Z$, i numeri complessi $z_1=a+b\cdot i^{2\cdot k}$ e $z_2=a+b\cdot i^{2\cdot k+1}$.

____________ • ____________

$$z_1=\begin{cases} a+b & se\ k\ è\ potenza\ di\ \pm 2 \\ a-b & altrimenti \end{cases}$$

$$z_2=\begin{cases} a+b\cdot i & se\ k\ è\ potenza\ di\ \pm 2 \\ a-b\cdot i & altrimenti \end{cases}$$

Interessanti risultano le seguenti sommatorie che inducono il lettore a determinane le "espressioni generali":

$$\sum_{k=-4}^{2}\left(a+b\cdot i^{2\cdot k}\right)=7\cdot a+b$$

$$\sum_{k=-3}^{1}\left(a+b\cdot i^{2\cdot k}\right)=5\cdot a-b \qquad \sum_{k=-3}^{3}\left(a+b\cdot i^{2\cdot k+1}\right)=7\cdot a-i\cdot b$$

$$\sum_{k=-4}^{3}\left(a+b\cdot i^{2\cdot k}\right)=8\cdot a \qquad \sum_{k=-2}^{3}\left(a+b\cdot i^{2\cdot k+1}\right)=6\cdot a$$

((*U*)) **PREMESSA.** Il numero complesso z ha un coniugato indicato con $\bar{z}$ perciò, essendo $z = a + i \cdot b$, è $\bar{z} = a - i \cdot b$, segue ; $\bar{z} + z = 2 \cdot a$; si può anche scrivere $\overline{a + i \cdot b} = a - i \cdot b$.

Allora è: $\overline{\overline{\overline{\overline{a+i\cdot b}}}} = \overline{\overline{\overline{a-i\cdot b}}} = \overline{\overline{a+i\cdot b}} = \overline{a-i\cdot b} = a+i\cdot b$.

► Dati i numeri complessi $z_1 = a + b \cdot i$ e $z_2 = c + d \cdot i$, verificare:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

———————— · ————————

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+b\cdot i) + (c+d\cdot i)} = \overline{(a+c)+(b+d)\cdot i} = (a+c)-(b+d)\cdot i =$

$= (a-b\cdot i)+(c-d\cdot i) = \overline{(a+b\cdot i)} + \overline{(c+d\cdot i)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i)} = \overline{(a\cdot c - b\cdot d)+(a\cdot d + c\cdot b)\cdot i} =$

$= (a\cdot c - b\cdot d)-(a\cdot d + c\cdot b)\cdot i = (a-b\cdot i)\cdot(c-d\cdot i) = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

((*V*)) Le immagini, sul piano di Gauss, dei tre numeri complessi

$$u = 1 + 6 \cdot i, \quad v = 6 + i, \quad w = \frac{5\cdot\sqrt{3}+7}{2} + \frac{5\cdot\sqrt{3}+7}{2}\cdot i$$

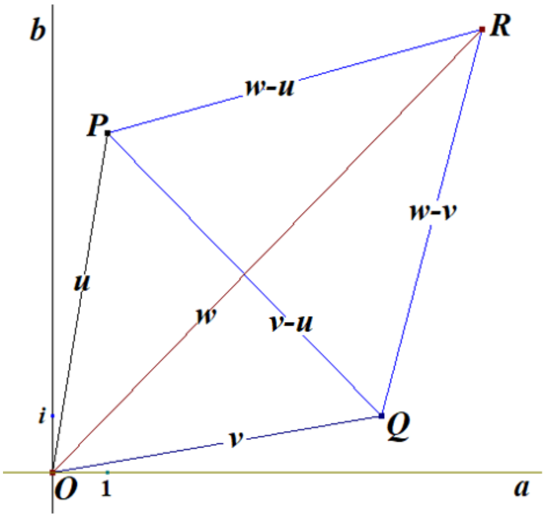
sono i vertici di un triangolo rettangolo; per essi è:

$$\left|\begin{array}{l} u^2 + v^2 + w^2 = \left(35\cdot\sqrt{3}+86\right)\cdot i \\ \\ u\cdot v + u\cdot w + v\cdot w = \left(35\cdot\sqrt{3}+86\right)\cdot i \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad u^2 + v^2 + w^2 = u\cdot v + u\cdot w + v\cdot w;$$

► Verificare che ciò avviene per qualunque terna di numeri complessi le cui immagini siano i vertici di un triangolo equilatero.

———————— · ————————

Dalla seguente figura



possiamo dedurre quanto segue.

I lati del triangolo PQR sono $\overline{PQ} = |v-u|$ $\overline{QR} = |w-v|$ $\overline{RP} = |w-u|$, ed essendo il triangolo equilatero, è: $|v-u| = |w-v| = |w-u|$; estraendo le due uguaglianze (I ; II) e (I;III), otteniamo:

$$\left.\begin{array}{l} |v-u| = |w-u| \\ \\ anomalia(w-u) = anomalia(v-u) + \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{w-u}{v-u} = \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3} \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} |v-u| = |u-v| = |w-v| \\ \\ anomalia(u-v) = anomalia(w-v) + \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{u-v}{w-v} = \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3} \qquad (**)$$

allora per (*) e (**), si ha:

$$\frac{w-u}{v-u} = \frac{u-v}{w-v} \quad \Rightarrow \quad w^2 - v \cdot w - u \cdot w + u \cdot v = u \cdot v - u^2 - v^2 + u \cdot v \quad \Rightarrow$$

$$u^2 + v^2 + w^2 = u \cdot v + u \cdot w + v \cdot w$$

((*W*)) Determinare il luogo dei punti immagine di $z = a + b \cdot i$ tale che $w = \dfrac{z - 2 \cdot i}{z + i}$ abbia:

A) modulo = 2,

B) anomalia = $\dfrac{\pi}{2}$.

C) Successivamente determinare gli *z* che verificano simultaneamente le condizioni A) e B).

__________________ . __________________

Sostituiamo *z* in *w*:

$$w = \frac{a + (b-2) \cdot i}{a + (b+1) \cdot i} \qquad (*)$$

Determiniamo il modulo do *w*:

$$|a + (b-2) \cdot i| = \sqrt{a^2 + (b-2)^2}$$

$$|a + (b+1) \cdot i| = \sqrt{a^2 + (b+1)^2}$$

$$\left| \frac{a + (b-2) \cdot i}{a + (b+1) \cdot i} \right| = \frac{|a + (b-2) \cdot i|}{a + (b+1) \cdot i} = \frac{\sqrt{a^2 + (b-2)^2}}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} .$$

►Imponiamo il modulo di *w* uguale a 2:

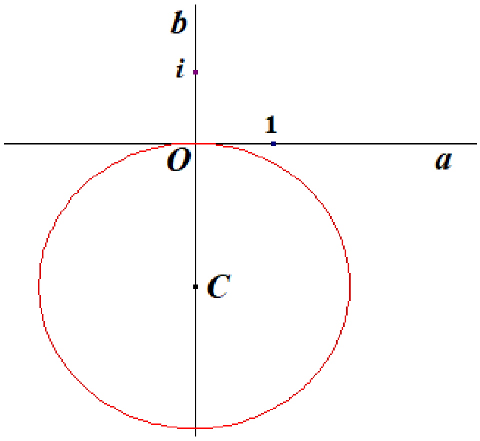
$$\frac{\sqrt{a^2 + (b-2)^2}}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} = 2$$

$$a^2 + b^2 - 4 \cdot b + 4 = 4 \cdot (a^2 + b^2 + 2 \cdot b + 1)$$

da cui, semplificando, otteniamo

$$a^2 + b^2 + 4 \cdot b = 0 \qquad (**)$$

che è il luogo delle immagini di *z*, richiesto al punto A), in particolare è l'equazione della circonferenza avente centro *C*(0 ; – 2) e raggio 2.



► Moltiplichiamo numeratore e denominatore della (*) per $a-(b+1)\cdot i$, e sviluppando otteniamo

$$w=\frac{a^2+(b+1)\cdot(b-2)}{a^2+(b+1)^2}-\frac{3\cdot a}{a^2+(b+1)^2}\cdot i$$

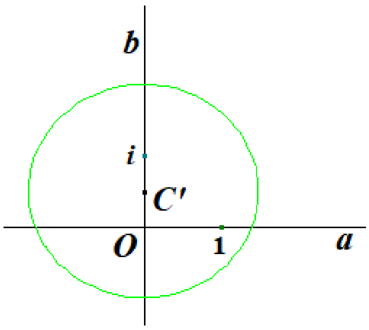
l'anomalia deve essere $\frac{\pi}{2}$ quindi la parte reale è nulla :

$$a^2+(b+1)\cdot(b-2)=0$$

da cui, semplificando otteniamo l'equazione

$$a^2+b^2-b-2=0 \qquad (***)$$

che è il luogo delle immagini di *z*, richiesto al punto B), in particolare è l'equazione della circonferenza avente centro $C'\left(0;\frac{1}{2}\right)$ e raggio $\frac{3}{2}$.



►Determiniamo i punti immagini dei numeri complessi *z* che soddisfano simultaneamente le condizioni A) e B); metto a sistema le equazioni (**) e (***):

$$a^2+b^2+4\cdot b=0 \wedge a^2+b^2-b-2=0$$

le cui soluzioni sono:

$$\left(a=-\frac{6}{5}\wedge b=-\frac{2}{5}\right)\vee\left(a=\frac{6}{5}\wedge b=-\frac{2}{5}\right)$$

otteniamo quindi due numeri z:

$$z_1 = -\frac{6}{5} - \frac{2}{5} \cdot i \qquad \text{e} \qquad z_2 = \frac{6}{5} - \frac{2}{5} \cdot i \ .$$

►Vediamo se entrambi verificano le condizioni A) e B) richieste per il numero w.

- per z_1:

$$w_1 = \frac{-\frac{6}{5} + \left(-\frac{2}{5} - 2\right) \cdot i}{-\frac{6}{5} + \left(-\frac{2}{5} + 1\right) \cdot i} = ... = 2 \cdot i$$

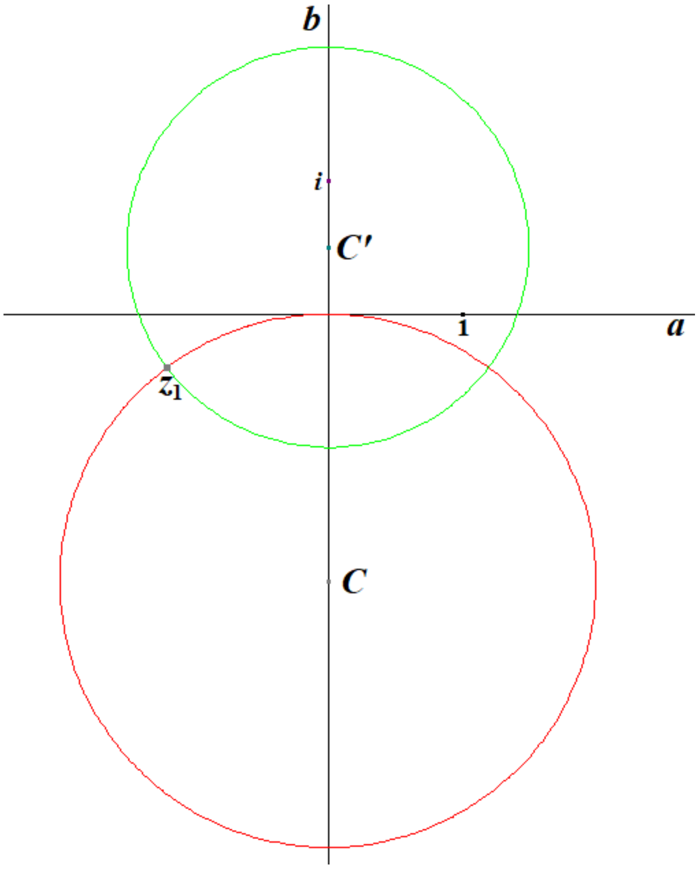
modulo (z_1) = 2 e *anomalia* (z_1) = $\frac{\pi}{2}$.

- per z_2:

$$w_1 = \frac{\frac{6}{5} + \left(-\frac{2}{5} - 2\right) \cdot i}{\frac{6}{5} + \left(-\frac{2}{5} + 1\right) \cdot i} = ... = -2 \cdot i$$

modulo (z_2) = 2 e *anomalia* (z_2) = $-\frac{\pi}{2}$.

Quindi un solo numero complesso z verifica simultaneamente le due condizioni A) e B): il numero z_1.



((X)) Sono dati $u=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot i$ e $v=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$, aventi entrambi modulo unitario: $|v|=|u|=1$; per essi, nella condizione $u+v\neq 0$, si verifica:

$$w=\frac{1+u\cdot v}{u+v}=\frac{1+\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)}{\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot i\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)}=\frac{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)}{\frac{7}{6}+i\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\ldots=$$

$$=\frac{8-\sqrt{15}}{7}\in R.$$

►Dimostrare che ciò si verifica per qualunque coppia di numeri complessi $u=a+i\cdot b$ e $v=c+i\cdot d$ aventi modulo unitario e tale che *u* e *v* non siano opposti.

____________ . ____________

Dobbiamo dimostrare $w=\frac{1+u\cdot v}{u+v}\in R$; in base alle uguaglianze dimostrate nell'esercizio ((U)), scriviamo:

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{1+u\cdot v}{u+v}\right)} = \frac{\overline{1+u\cdot v}}{\overline{u+v}} = \frac{1+\overline{u}\cdot\overline{v}}{\overline{u}+\overline{v}}$$

Dall'ipotesi ipotesi è $|u| = 1$, è:

$$|u| = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{u\cdot\overline{u}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{u} = \frac{1}{u};$$

analogamente per *v*, da cui:

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{1+u\cdot v}{u+v}\right)} = \frac{\overline{1+u\cdot v}}{\overline{u+v}} = \frac{1+\overline{u}\cdot\overline{v}}{\overline{u}+\overline{v}}$$

$$\overline{w} = \frac{1+\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{v}}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}} = \frac{\frac{u\cdot v+1}{u\cdot v}}{\frac{u+v}{u\cdot v}} = \frac{1+u\cdot v}{u+v}$$

segue

$$\overline{w} = w \qquad \Rightarrow \qquad w = \frac{1+u\cdot v}{u+v} \in R \qquad \text{c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE. Nell'esempio è:

$$w = \frac{8-\sqrt{15}}{7} + 0\cdot i \quad \text{e} \quad \overline{w} = \frac{8-\sqrt{15}}{7} - 0\cdot i\,.$$

((*Y*)) PREMESSA. *VARIE ESPRESSIONI CHE PRODUCONO π*

Pi greco (π) è un numero costante **irrazionale** (non esprimibile come rapporto di interi, dimostrato dal matematico Johann Heinrich Lambert nel 1761) e **trascendente** (non può essere soluzione di nessuna equazione algebrica, dimostrato, nel 1882, dal matematico Ferddinand Von Lindmann)

Esso viene definito:

1. **in geometria**:
   - come il rapporto tra le lunghezze della circonferenza ed il diametro di un cerchio, oppure,
   - come l'area di un cerchio avente raggio unitario;
2. **in goniometria** (analisi matematica)
   - come il minimo numero positivo (non nullo) che annulla il seno, oppure
   - come la metà del minimo numero positivo che annulla il coseno.

Il simbolo che lo esprime è forse dovuto alla prima lettera della parola *perimetro* (misura intorno) che in greco è $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\zeta$, oppure anche della iniziale del nome del grande matematico di Samo: Pitagora, che in greco è *Πυθαγόρας*.

Osservazione. Forse è più plausibile la prima ipotesi, perché se fosse la seconda a dare il simbolo a questo numero costante, sarebbe, con tutta probabilità, espresso con carattere maiuscolo, contrariamente alla tradizione che lo vuole espresso con carattere minuscolo.

Pare che il simbolo π, per la prima volta, compaia nell' opera del 1706 "*A New introduction to mathematics*" del matematico Willliam Jones, universalizzato successivamente da Eulero.

Spigolatura. Il matematico neozelandese Alexander Aitken (1895-1967), che aveva una memoria fenomenale, conosceva le prime 1000 cifre decimali (pare che avesse memorizzato addirittura le prime 2000 cifre decimali).

►RIPORTIAMO ALCUNI ALGORITMI

- $$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \cdot \left(\frac{4}{8 \cdot k + 1} - \frac{2}{8 \cdot k + 4} - \frac{1}{8 \cdot k + 5} - \frac{1}{8 \cdot k + 6} \right),$$

  ideato, nel1995, dal matematico canadese Simon Plouffe (nato a Saint-Jounvite nel 1956).

Consideriamo la somma dei primi 11 termini della serie, ovvero calcoliamo il valore di questa serie per k compreso tra 0 e 10 (estremi inclusi), approssimata alla 19ma cifra decimale e confrontiamola col valore esatto di π fino alla stessa cifra decimale

valore della serie fino alla 19macifra decimale	3.1415926532563107098
valore di π fino alla 19macifra decimale	3.1415926535897932384

,

rileviamo che i due valori numerici coincidono sino alla nona cifra decimale.

- $$\pi = 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1};$$

  vediamone la convergenza:

$$\pi \cong 4 \cdot \sum_{n=0}^{20} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} = 3.189184782 \qquad \pi \cong 4 \cdot \sum_{n=0}^{100} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} = 3.151493401$$

$$\pi \cong 4 \cdot \sum_{n=0}^{1000} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} = 3.142591654 \qquad \pi \cong 4 \cdot \sum_{n=0}^{10000} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n + 1} = 3.141692643$$

$$\pi \cong 4 \cdot \sum_{n=0}^{100000} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n+1} = 3.141602653 \qquad \pi \cong 4 \cdot \sum_{n=0}^{1000000} \frac{(-1)^n}{2 \cdot n+1} = 3.141593653$$

- $\pi \cong 3 + \frac{\sqrt{2}}{10} \cong 3.141421356$ che coincide col valore di π fino alla terza cifra decimale.

- Algoritmo di Adrien-Marie Legendre (1752-1833) matematico francese, discepolo di Eulero e di Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813) matematico italiano.

  Il calcolo del valore di π, approssimato a meno di $\frac{1}{10^n}$, ha il seguente procedimento:

  si costruisce una successione numerica che abbia primo termine 0, secondo termine $\frac{1}{2}$, e nella quale i termini successivi sono ottenuti, alternativamente, calcolando la media aritmetica e la media geometrica dei due immediatamente precedenti. Si procede fino a che due termini consecutivi della successione hanno le prime n + 1 cifre decimali uguali; il valore di π è uguale al reciproco del numero formato con le cifre uguali degli ultimi due numeri della successione. Tale algoritmo converge abbastanza velocemente tanto da potere determinare un valore esatto di π, spingendo la successione a 60 termini, fino alla quattordicesima cifra decimale.

  ►Altrettanto π può essere espresso mediante i numeri complessi: verificare l'uguaglianza

$$\pi = 2 \cdot \frac{\ln i}{i}.$$

———————— . ————————

Il numero complesso

$$i = 0 + 1 \cdot i \qquad (*)$$

ha:

- modulo: $r = 1$;
- anomalia: $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Passiamo, nella (*), ai logaritmi neperiani:

$$\ln i = \ln 1 + \frac{\pi}{2} \cdot i \quad \Rightarrow \quad \ln i = 0 + \frac{\pi}{2} \cdot i \quad \Rightarrow \quad \ln i = \frac{\pi}{2} \cdot i$$

divido per i e moltiplico per 2 ambo i membri:

$$2 \cdot \frac{\ln i}{i} = 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cdot i}{i} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot i}{2} \cdot \frac{1}{i} = \pi.$$

((Z)) Partiamo da un esempio.

Le soluzioni, nel campo dei complessi, dell'equazione:

$$z^3 = 1$$

sono

$$z_0 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \quad ; \qquad z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \quad ; \qquad z_2 = 1 .$$

Ciascuna di esse, elevata al cubo, porge l'unità positiva: diciamo quindi che le tre soluzioni dell'equazione sono le tre radici dell'unità positiva.

Verifichiamo quanto detto, per esempio, con z_0:

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right)^3 = 1 ;$$

ora eleviamo quest'ultima, per esempio, al quadrato

$$\left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right)^3 \right)^2 = 1 ;$$

rileviamo, come è ovvio, l'uguaglianza all'unità: ma, per una proprietà delle potenze, è.

$$\left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right)^2 \right)^3 = 1 ;$$

consegue che è radice terza di 1 anche

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)^2,$$

perché il suo cubo porge 1.

►In generale, detta *z* una radice *m*-esima dell'unità positiva, risulta

$$z^m = 1;$$

e così è anche

$$\left(z^m\right)^h = 1$$

ma, per una nota proprietà delle potenze, è:

$$\left(z^m\right)^h = \left(z^h\right)^m = 1 \qquad (*)$$

e quindi. per qualunque $h \in Z$, anche z^h è una radice *m*-esima dell'unità positiva.

Sorge una domanda:

"esiste una radice *m*-esima *z* dell'unità positiva tale che le sue potenze

$$z^0, z^1, z^3, z^4, \ldots\ldots, z^{m-2}, z^{m-1}$$

generino tutte le radici *m*-esime dell'unità positiva?**"**

Se si, una qualunque di esse che goda di questa proprietà si dice *radice primitiva*.

►Verificare che tali radici primitive esistono.

______________ . _______________

La dimostrazione consiste nel verificare che tutte e sole radici primitive dell'unità positiva conseguono (essendo il modulo uguale a uno e l'anomalia uguale a zero) dalla relazione:

$$z = \cos\frac{2\cdot k\cdot\pi}{m} + i\cdot\sin\frac{2\cdot k\cdot\pi}{m},$$

nella quale k è un numero intero compreso tra 1 e n – 1, tale che k e m siano primi tra loro.

Allora, presi due numeri interi positivi p e q, entrambi minori di m, non si può certamente verificare

$$z^p = z^q$$

perché allora, per numero intero g, si verificherebbe:

$$p\cdot\frac{2\cdot k\cdot\pi}{m} - q\cdot\frac{2\cdot k\cdot\pi}{m} = 2\cdot g\cdot\pi$$

ovvero

$$k\cdot(p-q) = g\cdot m,$$

e tale uguaglianza è assurda perché, per l'ipotesi k e m primi tra loro, i divisori di m risulterebbero divisori di $|p-q|$ che è minore di m; consegue che $z^0, z^1, z^3, z^4, ..., z^{m-2}, z^{m-1}$ sono le m radici m-esime dell'unità positiva.

OSSERVAZIONE1.

Per qualunque m esistono sempre almeno due radici primitive dell'unità, tra loro coniugate ottenute per k = 1 e k = m – 1; tutte le altre coppie di radici primitive tra loro coniugate si ottengono per k = 2 e k = m – 2, per k = 3 e k = m – 3, e così di seguito.

Per esempio per m =7, operando con DERIVE.6, otteniamo le radici settime dell'unità positiva, contenute nella seguente matrice

k	radici primitive
0	1
1	$-(-1)^{-5/7}$
2	$(-1)^{4/7}$
3	$-(-1)^{-1/7}$
4	$-(-1)^{1/7}$
5	$(-1)^{-4/7}$
6	$-(-1)^{5/7}$

e per esse è:

$$\textit{per } k=1 \textit{ e } k=6 \qquad -(-1)^{-5/7} + -(-1)^{5/7} = 2\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{3\cdot\pi}{14}\right)$$

$$\textit{per } k=2 \textit{ e } k=5 \qquad (-1)^{4/7} + (-1)^{-4/7} = -2\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{\pi}{14}\right)$$

$$\textit{per } k=3 \textit{ e } k=4 \qquad -(-1)^{-1/7} + -(-1)^{1/7} = -2\cdot \mathrm{COS}\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

OSSERVAZIONE2. Dalla (*)

Se z una radice *m*-esima primitiva dell'unità positiva, è radice non primitiva anche z^h con $h \in Z$, quindi ogni radice primitiva genera infinite radici non primitive.