Trattato di trigonometria sferica

a cura del Prof. Carlo Mortola

Cenni sulla geometria sferica

Si dice **superficie sferica** il luogo geometrico dei punti dello spazio tridimensionale aventi distanza costante (**raggio**) da un prefissato punto (**centro**).

Ogni piano, che interseca una superficie sferica, individua una circonferenza:

- ✓ se il piano passa per il centro (**piano diametrale**), la circonferenza intersezione ha raggio uguale a quello della superficie sferica che, essendo la più grande circonferenza che si possa tracciare su di essa, si chiama **circonferenza massima**; tutte le circonferenze massime di una superficie sferica sono uguali;
- ✓ se il piano di intersezione non passa per il centro, la circonferenza intersezione ha raggio minore del raggio della sfera e si dice **circonferenza minore**; il centro di questa è il piede della retta perpendicolare condotta dal centro *O* della sfera al piano secante.

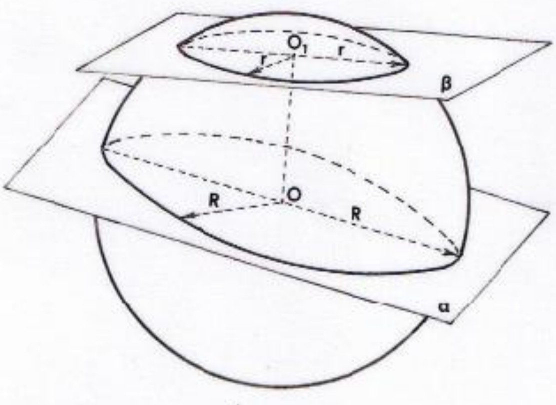


fig. 1

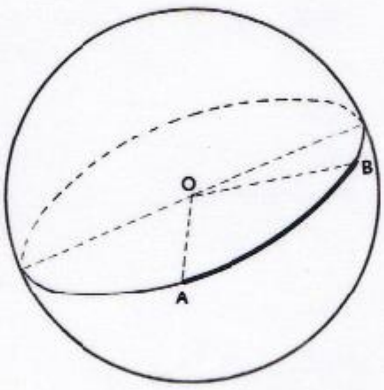


fig. 2

Indicati con *R* ed *r* i raggi rispettivamente del circolo massimo e dei circoli minori si ha:

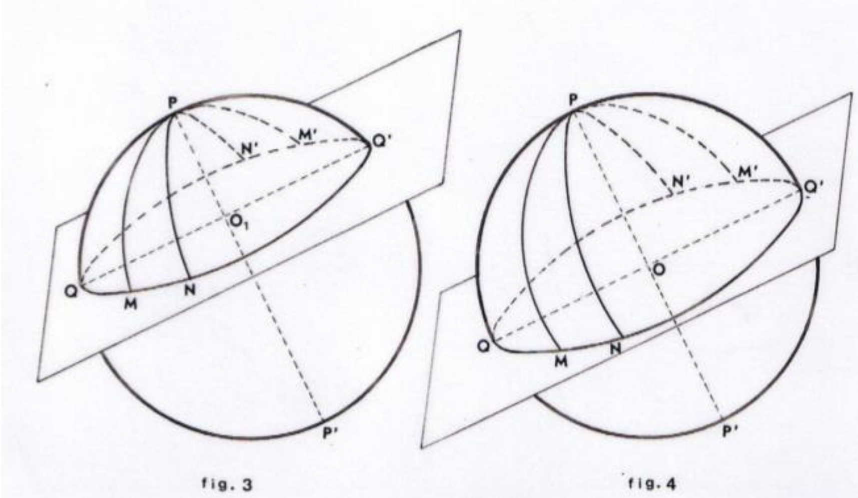
$$R > r \geq 0$$

dove la circostanza dell'uguale si ha quando il piano secante assume la posizione limite della tangenza alla superficie sferica (infatti in questo caso la circonferenza minore si riduce ad un punto).

In figura 1 la circonferenza di centro *O* è massima (piano di intersezione *α*) e quella di centro O_1 è minore (piano di intersezione *β*).

Due punti *A* e *B* della superficie sferica, non diametralmente opposti, ed il centro della sfera individuano un solo piano diametrale per cui per essi passa una ed una sola circonferenza massima; l'arco di circonferenza massima, minore di 180°, avente per estremi quei punti è detta **distanza sferica** dei due punti. Due punti della superficie sferica diametralmente opposti individuano infinite circonferenze massime.

Si dicono **poli** *P* e *P'* di una circonferenza qualsiasi, tracciata sopra una superficie sferica, gli estremi del diametro della superficie sferica perpendicolare al piano che contiene quella circonferenza.

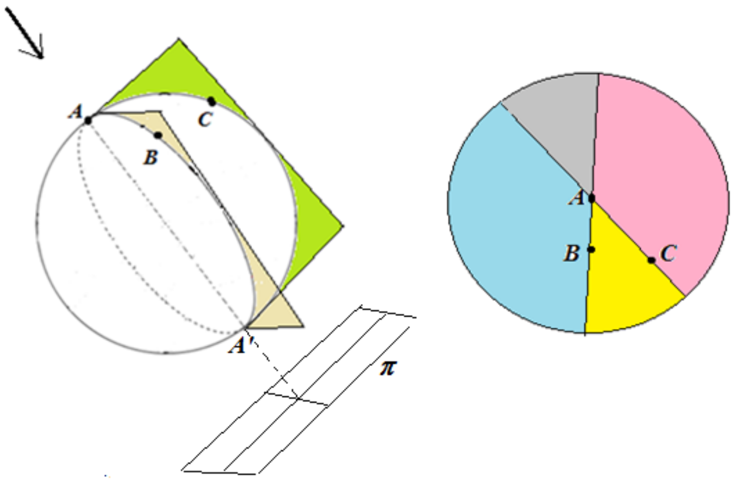


Gli archi di circonferenza massima che uniscono i punti di una circonferenza qualunque con uno qualunque dei due poli sono tutti uguali fra loro; nelle figure 3 e 4 si ha:

arco(PQ) = arco(PM) = arco(PN) = arco(PQ') = arco(PM') = arco(PN')

Angoli sferici o fusi

Due circonferenze massime dividono la superficie sferica in quattro regioni detti **fusi** o **angoli sferici**. Nella prima delle seguenti figure viene rappresentato l'angolo (o fuso) con vertice *A* formato dai semicircoli massimi *AB* e *AC* ; esso è l'angolo diedro formato dai piani che contengono i due semicircoli massimi AB e *AC.*



Nella seconda figura, sono riportati i quattro angoli prima citati; essa si ottiene mediante la proiezione della sfera su un piano π perpendicolare al diametro *AA*' con punto di vista all'infinito e direzione espressa dalla freccia presente nella prima figura.

Pertanto, si dice **angolo sferico** o **fuso** ciascuna delle due parti in cui una superficie sferica rimane divisa da due semicirconferenze massime aventi gli estremi comuni; le semicirconferenze si dicono **lati** ed i loro estremi **vertici** del fuso od angolo sferico.

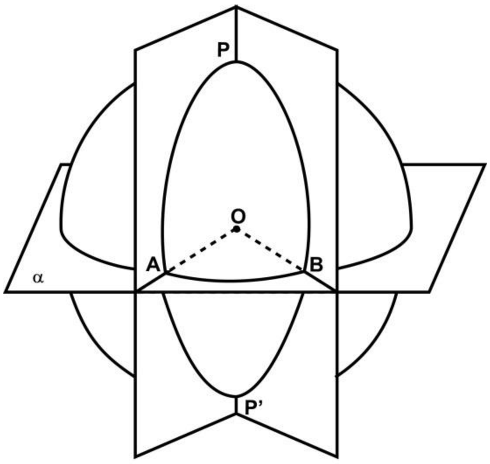


fig. 5

Il piano passante per il centro della sfera e perpendicolare al diametro avente per estremi i vertici del fuso taglia il fuso secondo un arco (*arco AB* in fig. 5) che si dice **sezione normale** di quel fuso (od angolo).

Un fuso (od angolo) si dice retto, acuto, ottuso a seconda che la sua sezione normale sia uguale, minore, maggiore di un quadrante.

Due fusi (od angoli) si dicono

- ✓ **complementari** se la loro somma è un **quarto** della superficie sferica (in gradi sessagesimali 90°)
- ✓ **supplementari** se la loro somma è **metà** della superficie sferica (in gradi sessagesimali 180°)
- ✓ **esplementari** (sarebbe più giusto dire **replementari,** ma poco usato) se la loro somma è **tutta** la superficie sferica (in gradi sessagesimali 360°)

E' consuetudine rappresentare l'angolo sferico (convesso) formato da due archi di circonferenza massima, con un archetto nelle vicinanze dell'estremo comune.

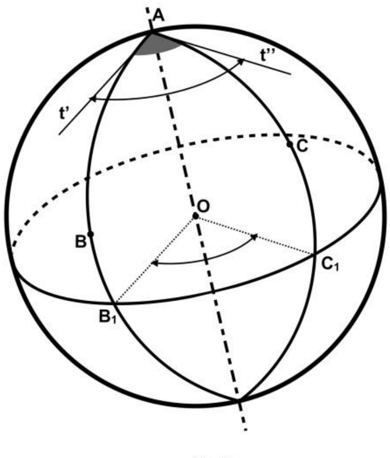


fig. 6a

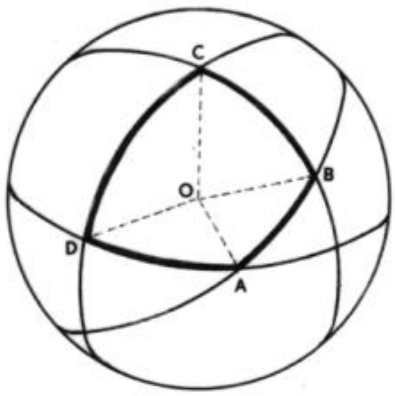


fig. 6 b

In fig.6a l'archetto grigio in prossimità del vertice *A* significa in realtà l'angolo convesso formato dalle semirette *t'* e *t''* tangenti in *A* agli archi *AB* e *AC*; infatti questo angolo è uguale alla sezione normale (B_1 O C_1) del fuso con vertice in *A* ed i cui lati contengono i due archi *AB* e *AC*.

Una spezzata sferica chiusa di archi di circonferenze massime ABCD divide la superficie sferica in due parti, ciascuna delle quali si chiama **poligono sferico**, e precisamente:

- ✓ poligono sferico **convesso** quello che non contiene il prolungamento dei lati
- ✓ poligono sferico **concavo** quello che contiene il prolungamento dei lati

I poligoni sferici, come nella geometria piana, prendono il nome dal numero dei lati che lo compongono.

Se si immagina di condurre i raggi che uniscono il centro *O* di una sfera con i vertici *ABCD* (fig.6b) di un qualunque poligono convesso, questi raggi sono spigoli di un angoloide convesso che ha tante facce quanti sono i lati del poligono. I diedri di questi angoloidi hanno per sezione normale gli angoli del poligono, e le loro facce sono misurate dagli archi di circonferenza massima che sono lati del poligono stesso, da cui emerge evidente come ad ogni relazione di uguaglianza e di disuguaglianza relativa ai diedri o alle facce dell'angoloide corrispondano relazioni analoghe degli angoli o dei lati del poligono sferico.

Triangolo Sferico

Il poligono sferico di tre lati (minimo numero di lati per formare un poligono) si dice **triangolo sferico**.

Nella fig.7a è rappresentato il triangolo sferico *ABC*, in cui i vertici non appartengono ad una stessa circonferenza massima (dunque avremmo un triangolo degenere, come vedremo successivamente) e in cui ciascun lato è minore di una semicirconferenza. I suoi elementi sono:

- ✓ i **lati** *a*, *b*, *c*
- ✓ gli **angoli** α, β, γ

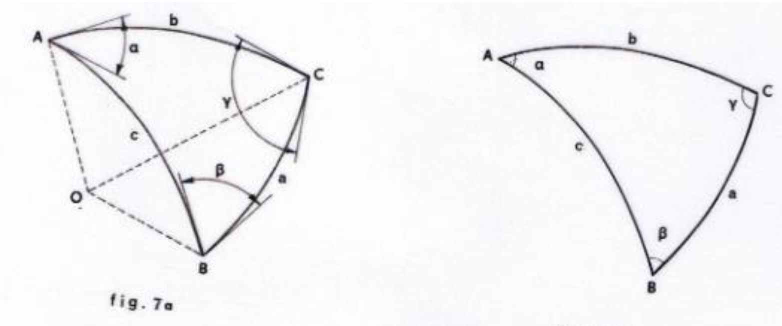


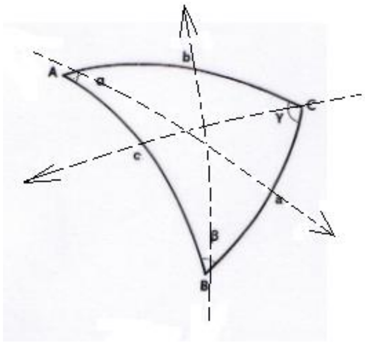
fig. 7a

fig. 7b

Osservazione 1*: per semplicità di disegno un triangolo sferico si disegna come nella fig.7b in cui gli angoli sono segnati con piccoli archetti tracciati nei pressi dei vertici (a volte sono indicati con i simboli* $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ *).*

Osservazione 2*: il triangolo a cui facciamo riferimento per le future formule è quello della fig.7b, in cui:*

- ✓ *i vertici hanno per nome la prime tre lettere maiuscole dell'alfabeto italiano,*
- ✓ *i lati hanno nome omonimo ai rispettivi vertici ad essi opposti, ma con caratteri minuscoli,*
- ✓ *gli angoli hanno per nome le prime tre lettere dell'alfabeto greco, in corrispondenza dell'ordine delle lettere dell'alfabeto italiano, così, dalla seguente figura è:*
  - *vertice A, di angolo α, e di lato opposto a*
  - *vertice B, di angolo β, e di lato opposto b*
  - *vertice C, di angolo γ , e di lato opposto c*



Ad ogni triangolo sferico *ABC* corrisponde un triedro avente per vertice il centro *O* della sfera e per spigoli le semirette passanti per i vertici del triangolo.

Essendo gli angoli del triangolo sferico sezioni rette dei diedri corrispondenti ed essendo i lati del triangolo sferico archi di circoli massimi aventi angoli al centro le facce del diedro, si ha:

"*le misure degli angoli e dei lati del triangolo sferico sono rispettivamente le misure dei diedri e delle facce del triedro corrispondente*"

E' manifesto quindi che da tutte le proprietà dei diedri si possono dedurre altrettante proprietà dei triangoli sferici corrispondenti, semplicemente scambiando:

- ✓ la parola **faccia** con la parola **lato**,
- ✓ la parola **diedro** con la parola **angolo**.

In fig. 8 si nota che un triedro determina su due (o più) superfici sferiche concentriche di centro *O* i triangoli sferici *ABC* e *A'B'C'*, nei quali gli elementi corrispondenti sono misurati da valori uguali, ovvero indipendenti dal raggio delle superfici sferiche, se si misurano gli elementi dei triangoli in ampiezza (radianti, gradi sessagesimali, gradi centesimali).

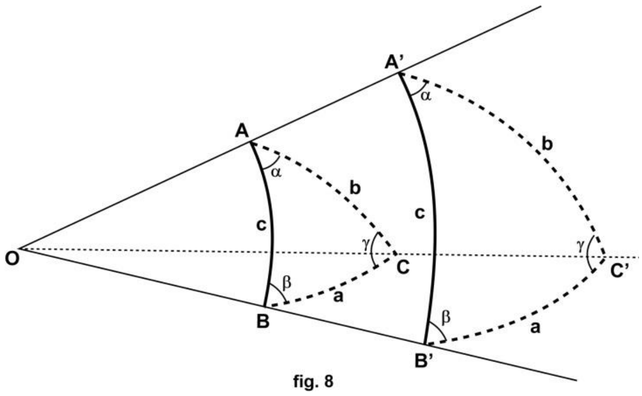
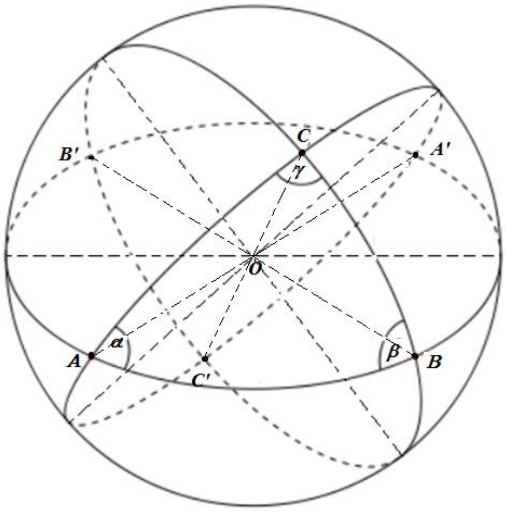


fig. 8

Si tenga perciò presente che, nella risoluzione di triangoli sferici, i lati (alla stessa stregua degli angoli) si misurano in ampiezza e, di solito, in gradi primi e secondi sessagesimali.

Triangoli opposti o simmetrici

Poniamo l'attenzione sul triangolo sferico *ABC* riportato nella seguente figura.



Gli archi di circolo massimo *AB*, *BC*, *CA* sono detti **lati** del triangolo sferico *ABC*; gli angoli formati dai lati nel loro punto comune sono gli **angoli** del triangolo sferico *ABC* e precisamente:

- ✓ l'angolo α con vertice in A formato dai lati AC e AB
- ✓ l'angolo β con vertice in B formato dai lati BA e BC
- ✓ l'angolo γ con vertice in C formato dai lati CA e CB

Osservazione 1*: i lati e gli angoli di un triangolo sferico si dicono* ***elementi*** *del triangolo stesso.*

Al triangolo sferico *ABC* corrisponde il triangolo **opposto** *A'B'C'* uguale al triangolo *ABC*, ma, tra loro, non sovrapponibili con alcun movimento rigido, sulla superficie sferica.

Il triangolo *ABC* confina con altri tre triangoli *ABC'*, *CAB'*, *BCA'* ciascuno dei quali:

- ✓ ha un lato ed un angolo uguali a quelli del triangolo *ABC*
- ✓ ha gli altri elementi supplementari rispettivamente agli altri elementi del triangolo *ABC*

Osservazione 2*: i triangoli ABC', CAB', BCA' hanno i loro opposti A'B'C, C'A'B, B'C'A che sono confinanti col triangolo A'B'C'.*

Relazioni fra "i lati" e fra gli "angoli" di un triangolo sferico

In un triangolo sferico si verifica che:

- ✓ ciascun lato è minore della somma degli altri due

$$a < b + c \; ; \; b < c + a \; ; \; c < a + b:$$

- ✓ la somma dei tre lati è minore di un circolo massimo

$$a + b + c < 360°$$

- ✓ la somma degli angoli (interni) è maggiore di 2 angoli retti e minore di 6 angoli retti

$$180° < \alpha+\beta+\gamma < 540°$$

***Osservazione 1**: la differenza fra la somma dei tre angoli di un triangolo sferico e l'angolo piatto, indicata con la lettera greca ε, si dice **eccesso sferico**:*

$$\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma - 180°$$

- ✓ la somma di due angoli è minore del terzo aumentato di due angoli retti

$$\alpha+\beta<\gamma + 180°; \ \alpha+\gamma <\beta + 180°; \beta+\gamma <\alpha+180°$$

- ✓ a lati uguali sono opposti angoli uguali e viceversa
- ✓ se due lati sono disuguali, al lato maggiore è opposto l'angolo maggiore
- ✓ se due angoli sono disuguali, all'angolo maggiore è opposto il lato maggiore
- ✓ la somma di due lati e quella dei due angoli ad essi opposti è contemporaneamente minore, uguale, maggiore di due angoli retti

Particolari triangoli sferici

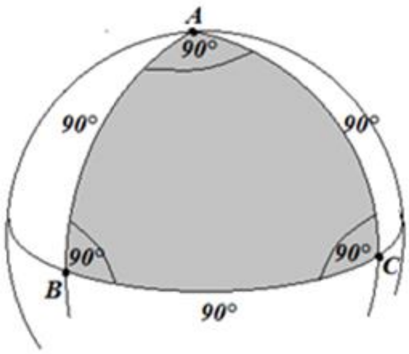
I triangoli, sulla superficie sferica, possono avere:

- ✓ due lati uguali (**triangoli isosceli**)
- ✓ tre lati uguali (**triangoli equilateri**)
- ✓ un angolo retto (**triangoli rettangoli)**

come in planimetria

- ✓ un lato retto (**triangoli rettilateri)**
- ✓ due angoli retti (e quindi due lati retti) ed allora si dicono **triangoli birettangoli** (**triangoli birettilateri**)
- ✓ tre angoli retti (e quindi tre lati retti) ed allora si dicono **triangoli trirettangoli** (**triangoli trirettilateri**).

Nella seguente figura è riportato un triangolo **trirettangolo:**



***Osservazioni**:*

- ✓ *nel triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali*
- ✓ *il triangolo sferico equiangolo è anche equilatero*
- ✓ *il triangolo birettilatero è pure birettangolo, e la misura del terzo angolo è uguale alla misura del terzo lato; segue che questo triangolo è la metà di un fuso sferico*
- ✓ *il triangolo trirettilatero è anche trirettangolo ed è quindi l'ottava parte della superficie sferica*

Eccesso sferico

*L'**eccesso sferico** di un triangolo sferico è uguale al rapporto dell'area del triangolo sferico ed il quadrato del raggio della superficie sferica.*

Per la dimostrazione escogitiamo la seguente strategia: indichiamo con $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ i fusi rispettivamente di angoli α, β, γ (non segnati in figura) e supponiamo di doverli dipingere.

Osservando attentamente la figura 11, rileviamo che occorrerebbe tanta pittura quanta ne occorrerebbe per dipingere mezza superficie sferica più due volte il triangolo sferico ABC di area S; pertanto possiamo scrivere:

$$\text{area } f(A) + \text{area } f(B) + \text{area } f(C) = 2S + 2\pi R^2 \quad (1)$$

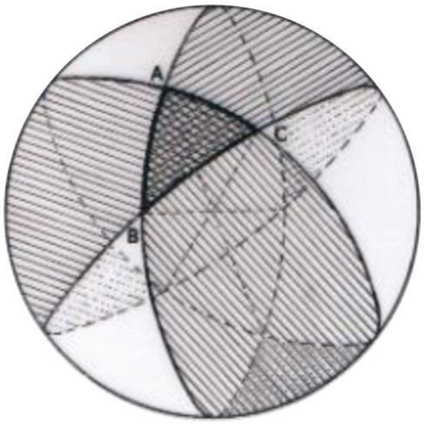


fig. 11

Ricordiamo che l'area di un fuso è legata all'ampiezza, espressa in radianti, della sua sezione normale; allora, dalla proporzione:

$$\frac{f(A)}{\alpha} = \frac{2\pi R^2}{\pi}$$

ricaviamo $f(A)$:

$$f(A) = \frac{2\pi R^2 \alpha}{\pi} = 2R^2\alpha \quad (2)$$

In modo analogo abbiamo

$$f(B) = \frac{2\pi R^2 \beta}{\pi} = 2R^2\beta \quad (3)$$

$$f(C) = \frac{2\pi R^2 \gamma}{\pi} = 2R^2\gamma \quad (4)$$

Sostituiamo le (2), (3), (4) nella (1):

$$2R^2\alpha + 2R^2\beta + 2R^2\gamma = 2S + 2\pi R^2$$

da cui, dividendo ambo i membri, per $2R^2$, otteniamo

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{S}{R^2} + \pi \qquad (5)$$

Il rapporto $\frac{S}{R^2}$ è ciò che chiamiamo eccesso sferico e che abbiamo indicato con la lettera ε, pertanto è:

$$\varepsilon = \frac{S}{R^2}$$

Osservazione*. In questa dimostrazione abbiamo considerato gli angoli espressi in radianti, e allora la (5) avrebbe dovuta essere scritta*

$$\alpha_{rad}+\beta_{rad}+\gamma_{rad} = \left(\frac{S}{R^2}\right)_{rad} + \pi$$

e quindi:

$$\alpha_{rad}+\beta_{rad}+\gamma_{rad} = \varepsilon_{rad} + \pi \qquad (6)$$

nelle applicazioni pratiche (astronomia, navigazione,…) gli angoli sono espressi in gradi sessagesimali, e quindi la (6) diventa

$$\alpha° + \beta° + \gamma° = \varepsilon° +180°$$

che viene, usualmente, scritta:

$$\alpha+\beta+\gamma = \varepsilon +180°$$

Abbiamo così dimostrato che l'eccesso sferico ε è inversamente proporzionale al quadrato del raggio R della sfera.

Allora, se due triangoli sferici, appartenenti rispettivamente a superfici sferiche di diverso raggio, sono simili, il triangolo giacente sulla superficie sferica di raggio maggiore ha eccesso sferico minore dell'altro triangolo.

Possiamo dire che l'eccesso sferico di un triangolo sferico diminuisce man mano che il raggio della superficie sferica, a cui appartiene, aumenta.

L'eccesso sferico è quindi nullo solo quando il raggio è infinito; in questa circostanza si parlerà di **piano** al posto di **superficie sferica** e di **rette** al posto di **circoli massimi**.

Nel triangolo sferico trirettangolo *ABC* (fig. 12) la somma degli angoli è tre angoli retti e quindi l'eccesso sferico è un angolo retto. Immaginiamo ora di ruotare il lato *AB* fino a che l'angolo α diventi due angoli retti; si ottiene così un triangolo sferico *AB'C* che è la quarta parte di una superficie sferica; la somma degli angoli di questo triangolo è quattro angoli retti e quindi l'eccesso sferico è due angoli retti.

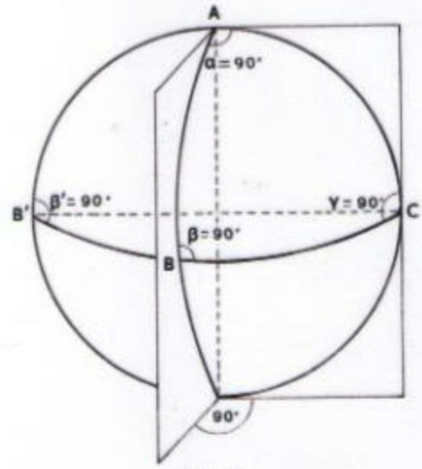


fig.12

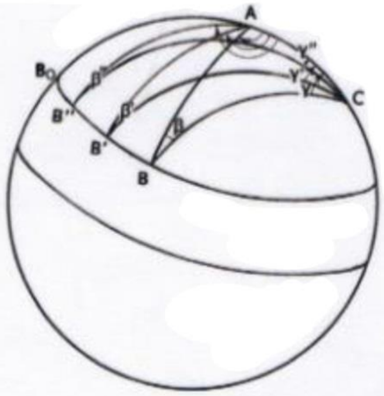
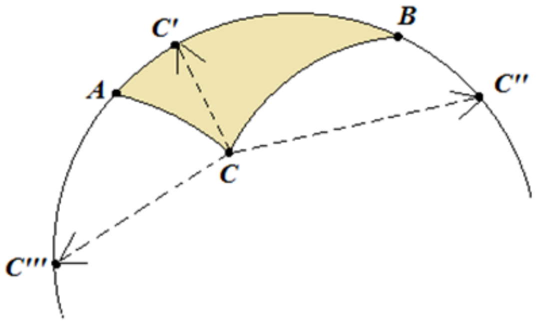


fig.13

Supponiamo ora di ruotare il lato *B'C* del triangolo *AB'C* fino a che gli angoli $\widehat{C}$ e $\widehat{B}'$ diventino, ciascuno di essi, due angoli retti; si ottiene così il triangolo i cui lati *AC*, *CB'*, *B'A* vengono a racchiudere una semisuperficie sferica (**emisfero**); in questo caso la somma degli angoli è sei angoli retti e quindi l'eccesso sferico è quattro angoli retti (massimo eccesso sferico).

Esaminiamo il triangolo sferico *ABC* della figura 13, nel quale il vertice *B* assume le successive posizioni *B'*, *B''*, …. fino a prendere la posizione B_0, appartenente allo stesso circolo massimo contenente il lato *AC*; si viene a determinare il triangolo AB_0C di superficie nulla (**triangolo degenere**) in cui gli angoli $\widehat{B}_0$ e $\widehat{C}$ sono nulli mentre l'angolo $\widehat{A}$ è uguale a due retti, in questo triangolo l'eccesso sferico è nullo (minimo eccesso sferico).

Pertanto, la somma degli angoli è 180° solo quando il triangolo è **degenere**, ovvero quando i vertici del triangolo sono situati sullo stesso circolo massimo.



Nella figura precedente, leggendo il nome dei vertici dei triangoli nell'ordine alfabetico, supposto che gli angoli del triangolo *ABC* siano rispettivamente 82°, 54°, 67°, la somma degli angoli interni del triangolo è 203° e quindi l'eccesso sferico è 23°.

Supponiamo ora, che in qualche modo il vertice *C* assuma le posizioni:

1. interno al lato *AB*; lo indichiamo con *C'*
2. esterno al lato *AB*, dalla parte di *B*; lo indichiamo con *C''*
3. esterno al lato *AB*, dalla parte di *A*; lo indichiamo con *C'''*

Allora nei suddetti triangoli i lati sono:

1. *AB*, *BC'*, *C'A* e gli angoli sono nulli in *A* e *B* e 180° in *C'*
2. *AB*, *BC''*, *C''A* e gli angoli sono nulli in *A* e *C''* e 180° in *B*
3. *AB*, *BC'''*, *C'''A* e gli angoli sono nulli in *C'''* e *B* e 180° in *A*

E, come si può facilmente provare, la somma degli angoli interni di questi triangoli sferici è 180°, infatti è: 0° + 0° + 180° = 180°.

Indicando con *α, β, γ,* gli angoli interni e con *ε* l'eccesso sferico di un triangolo sferico, concludiamo:

$$\pi \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 3\pi \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \varepsilon \leq 2\pi \,,$$

in cui:

- ✓ l'uguale di sinistra si ha nel caso di triangolo degenere
- ✓ l'uguale di destra si ha nel caso dell'emisfero

Relazioni fra gli elementi di un triangolo sferico rettangolo

Consideriamo:

- ✓ il triangolo sferico *ABC* avente i lati acuti e, per ipotesi, rettangolo in *C*
- ✓ il relativo triedro le cui facce sono misurate dai lati *a*, *b*, *c*

Conduciamo, sulla faccia *COB* la perpendicolare *B'C'* allo spigolo *OC*, condotta da un punto *B'*, preso a piacere sullo spigolo *OB*; successivamente conduciamo sulla faccia *COA* la perpendicolare *C'A'* allo spigolo *OA*; uniti, infine, *A'* con *B'*, otteniamo i quattro triangoli (fig. 14).

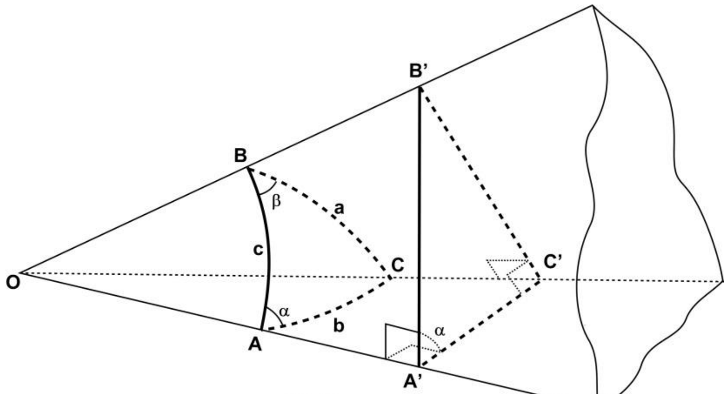


fig. 14

- ✓ *OA'C'* rettangolo in *A'* per costruzione
- ✓ *OC'B'* rettangolo in *C'* per costruzione
- ✓ *A'B'C'* rettangolo in *C'* per ipotesi
- ✓ *OA'B'* rettangolo in A' per il teorema delle tre perpendicolari (*se dal piede di una perpendicolare ad un piano si conduce la perpendicolare ad un'altra retta del piano, quest'ultima risulta perpendicolare al piano delle prime due*).

Per quanto detto, prendendo in considerazione il triangolo *A'B'C'*, abbiamo:

$$\sin\alpha = \frac{B'C'}{A'B'} \qquad \cos\alpha = \frac{A'C'}{A'B'} \qquad \tan\alpha = \frac{B'C'}{A'C'} \qquad \text{(a)}$$

Esse vengono trasformate considerando, per ognuna, i due triangoli rettangoli aventi in comune la semiretta passante per il centro *O* della sfera ed il vertice che figura sia a numeratore che a denominatore (per esempio a secondo membro della prima delle (a), il vertice comune è *B'* e quindi i due triangoli interessati alla trasformazione sono *OA'B'* e *OC'B'*):

$$\sin\alpha = \frac{OB'\sin a}{OB'\sin c} = \frac{\sin a}{\sin c} \quad \Rightarrow \quad \sin a = \sin c \sin\alpha \qquad (1)$$

$$\cos\alpha = \frac{OA'\tan b}{OA'\tan c} = \frac{\tan b}{\tan c} \quad \Rightarrow \quad \tan b = \tan c \cos\alpha \qquad (2)$$

$$\tan\alpha = \frac{OC'\tan a}{OC'\sin b} = \frac{\tan a}{\sin b} \quad \Rightarrow \quad \tan a = \sin b \tan\alpha \qquad (3)$$

In modo analogo si dimostrano:

$$\sin b = \sin c \sin\beta \qquad (4)$$

$$\tan a = \tan c \cos\beta \qquad (5)$$

$$\tan b = \sin a \tan\beta \qquad (6)$$

Dal triangolo OA'B' abbiamo:

$$\cos c = \frac{OA'}{OB'} = \frac{OC'}{OB'} \cdot \frac{OA'}{OC'} \quad \Rightarrow \quad \cos c = \cos a \cos b \qquad (7)$$

La (2) può essere scritta:

$$\cos\alpha = \frac{\tan b}{\tan c} = \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\cos c}{\sin c} = \frac{\sin b}{\sin c} \cdot \frac{\cos c}{\cos b}$$

nella quale sostituiamo la (4) e la (7):

$$\cos\alpha = \frac{\sin c \sin\beta \cos a \cos b}{\sin b \cos b} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \sin\beta \cos a \qquad (8)$$

In modo analogo dimostriamo:

$$\cos\beta = \sin\alpha \cos b \qquad (9)$$

Moltiplichiamo ora, membro a membro, la (8) con la (9):

$$\cos\alpha \cos\beta = \sin\alpha \sin\beta \cos a \cos b$$

da cui:

$$\cos a \cos b = \cot\alpha \cot\beta$$

e, tenendo presente la (7), abbiamo:

$$\cos c = \cot\alpha \cot\beta \qquad (10)$$

Le dieci formule (equazioni) ora dimostrate costituiscono i cinque seguenti teoremi riguardanti i triangoli sferici rettangoli.

Teorema 1. *Il seno di un cateto è uguale al prodotto del seno dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto:* (1) e (4)

Teorema 2. *La tangente di un cateto è uguale al prodotto della tangente dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo compreso:* (2) e (5)

Teorema 3. *La tangente di un cateto è uguale al prodotto della tangente dell'angolo ad esso opposto per il seno dell'altro cateto*: (3) e (6)

Teorema 4. *Il coseno dell'ipotenusa è uguale*:

a) *al prodotto dei coseni dei due cateti*: (7)

b) *al prodotto delle cotangenti degli angoli adiacenti*: (10)

Teorema 5. *Il coseno di un angolo non retto è uguale al prodotto del coseno del lato opposto per il seno dell'altro angolo non retto*: (8) e (9)

I precedenti teoremi possono essere facilmente dedotti dalle seguenti "regole mnemoniche" di **Nepero**:

in ogni triangolo sferico rettangolo, se si sopprime l'angolo retto e si sostituiscono ai cateti i loro complementi, con i cinque elementi così modificati, abbiamo:

1. il **coseno** di uno qualunque dei cinque elementi è uguale al prodotto dei **seni** dei due elementi lontani
2. il **coseno** di uno qualunque dei cinque elementi è uguale al prodotto delle **cotangenti** dei due elementi adiacenti

***Osservazione**. L'applicazione di questa regola diventa più agevole se si utilizza un cerchio suddiviso in cinque settori in cui si scrivono, nell'ordine in cui si trovano, i cinque elementi suddetti*

Esempio

Noti i cateti *a* e *b* del triangolo *ABC*, rettangolo in *C*, si determinino gli altri elementi (fig.15).

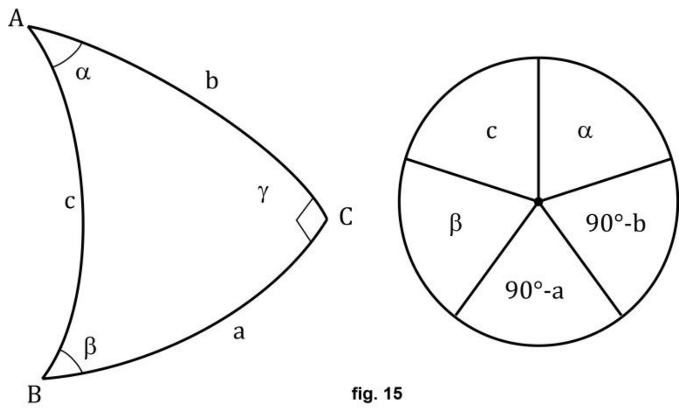
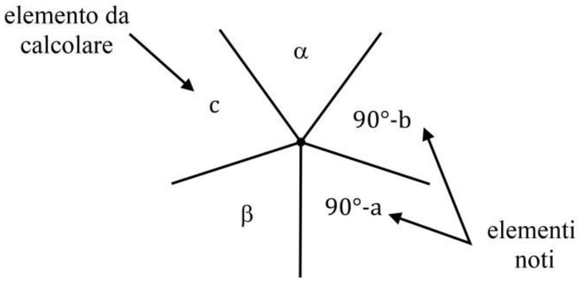


fig. 15

Soluzione:

Serviamoci della seconda parte della figura 15, eliminando (per semplicità) la circonferenza.

Determiniamo l'ipotenusa c:



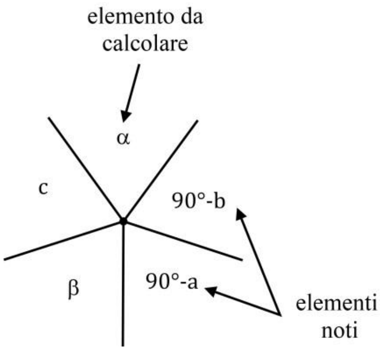
Dalla figura notiamo che *c* ha gli elementi lontani $90° - b$ e $90° - a$, quindi in base alla prima regola mnemonica di Nepero, scriviamo.

$$\cos c = \sin(90° - b)\sin(90° - a)$$

cioè:

$$\cos c = \cos a \cos b\text{, che è la (7)}$$

Per l'angolo α, in modo analogo, abbiamo:



dove si nota che $90° - b$ ha adiacenti gli elementi α e $90° - a$, quindi per la seconda regola mnemonica, scriviamo.

$$\cos(90° - b) = \cot\alpha \cot(90° - a)$$

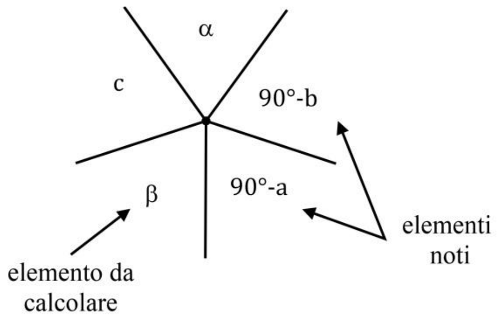
ovvero

$$\sin b = \cot\alpha \tan a\text{, che è la (3)}$$

da cui, è:

$$\tan\alpha = \frac{\tan a}{\sin b}$$

Per l'angolo β, in modo analogo, abbiamo:



dove si nota che l'elemento 90° − *a* ha adiacenti gli elementi β e 90° −*b* , quindi, per la seconda regola mnemonica, scriviamo:

$$\cos(90° - a) = \cot(90° - b)\cot\beta$$

ovvero:

$$\sin a = \tan b \cot\beta$$, che è la (6)

da cui

$$\tan\beta = \frac{\tan b}{\sin a}$$

Osservazione*: i cinque teoremi dei triangoli sferici rettangoli, e quindi l'uso delle regole mnemoniche di Nepero, valgono anche per i triangoli con cateti ottusi.*

Proprietà del triangolo sferico rettangolo

Dalle 10 formule dimostrate emergono le proprietà del triangolo sferico rettangolo.

(Premettiamo che due elementi di un triangolo sferico si dicono della stessa specie se sono entrambi acuti o entrambi ottusi)

1) ***La somma degli angoli è compresa tra* 180° *e* 360°**

   Infatti dalla (8) segue:

$$\cos\alpha < \sin\beta$$

   che si verifica per

$$45° < \alpha < 135° \qquad (*)$$

   e

$$45° < \beta < 135° \qquad (**)$$

   addizioniamo, membro a membro, la (*) con la (**):

$$90° < \alpha+\beta < 270°$$

   ed essendo $\alpha = 90°$, è:

$$180° < \alpha+\beta+\gamma < 360°$$

   Osservazione*. Alla stessa conclusione si giunge partendo dalla (9).*

2) *La differenza degli angoli acuti è minore di 90°.*

Infatti fra il valore massimo di α (β) ed il valore minimo di β(α) la differenza è minore di 135° − 45° = 90°.

3) *Ogni cateto è della stessa specie dell'angolo opposto.*

Infatti dalla (3) segue che, essendo $\sin b$ sempre positivo, $\tan a$ e $\tan\alpha$ sono dello stesso segno, per cui a ed α sono della stessa specie.

Parimenti dalla (6) per b e β.

4) *Il cateto ottuso è maggiore dell'angolo opposto ed il cateto acuto è minore dell'angolo opposto.*

Anch'esse si verificano dalla (3) e dalla (6).

5) *l'ipotenusa è:*

- **a.** ***acuta se i cateti (angoli) sono acuti oppure ottusi***
- **b.** ***retta se i cateti (angoli) sono l'uno retto e l'altro no***
- **c.** ***ottusa se i cateti (angoli) sono l'uno acuto e l'altro ottuso.***

Le proprietà **a) , b) , c)** provengono dalla (7) per quanto riguarda i cateti, dalla (10) per quanto riguarda gli angoli.

6) *L'ipotenusa è compresa fra un cateto e il suo supplemento.*

Proprietà proveniente dalla (1) e dalla (2).

Relazioni fra gli elementi di un triangolo sferico qualunque

Teorema dei seni

Sia *ABC* un triangolo sferico qualunque (fig. 16); conduciamo per il vertice *C* l'arco di circonferenza massima che cade perpendicolarmente sul lato *AB* nel punto *D*.

- ✓ l'angolo γ rimane diviso in $\hat{C}_1$ e $\hat{C}_2$
- ✓ il lato *AB* rimane diviso in q e $c - q$

Applichiamo ai due triangoli rettangoli *ADC* e *BDC* le regole mnemoniche di Nepero.

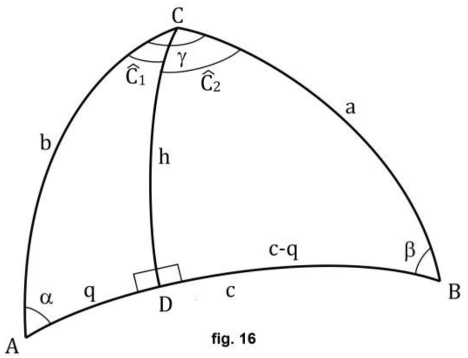
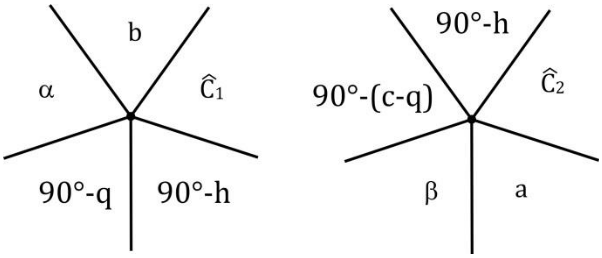


fig. 16



Dalla prima "*stella a 5 punte*" otteniamo:

$$\cos(90° - h) = \sin b \sin\alpha \qquad (*)$$

dalla seconda "*stella a 5 punte*" otteniamo:

$$\cos(90° - h) = \sin a \sin\beta \qquad (**)$$

Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, dalle (*) e (**), otteniamo

$$\sin b \sin\alpha = \sin a \sin\beta$$

da cui

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta}$$

in modo analogo si dimostrano:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}\,;\quad \frac{\sin c}{\sin\gamma} = \frac{\sin b}{\sin\beta}$$

per cui abbiamo:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$$

Da cui il teorema: ***in ogni triangolo sferici i seni dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.***

Teorema di Eulero

Nel triangolo rettangolo *BDC* della figura 16, abbiamo:

$$\cos a = \sin(90° - h)\sin[90° - (c - q)]$$

ovvero

$$\cos a = \cos h \cos(c - q) \qquad (12)$$

Nel triangolo rettangolo sferico *ADC* abbiamo:

$$\cos b = \sin(90° - q)\sin(90° - h)$$

ovvero

$$\cos b = \cos q \cosh \;\Rightarrow\; \cosh = \frac{\cos b}{\cos q}$$

che sostituiamo nella (12)

$$\cos a = \frac{\cos b}{\cos q}(\cos c \cos q + \sin c \sin q)$$

da cui

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin c \cos b \tan q \qquad (13)$$

Dal triangolo sferico rettangolo *ADC*, abbiamo:

$$\cos\alpha = \cot b \tan q \;\Rightarrow\; \tan q = \cos\alpha \tan b$$

che sostituiamo nella (13):

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin c \cos b \cos\alpha \tan b$$

da cui, in definitiva:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha \qquad (14)$$

Con sostituzioni circolari, ricaviamo le altre formule (equazioni):

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos\beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$$

che, con la (14) costituiscono il **teorema del coseno o di Eulero**; queste formule forniscono le relazioni fra i **tre lati** ed **un angolo**.

Teorema delle cotangenti

Nella (14) eliminiamo l'elemento *b* mediante:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos\beta \quad \text{(teorema Eulero)}$$

$$\sin b = \frac{\sin a \sin\beta}{\sin\alpha} \qquad \text{(teorema dei seni)}$$

ed otteniamo:

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \sin a \sin c \cos c \cos\beta + \sin a \sin c \sin\beta \cot\alpha$$

ed essendo:

$$\cos^2 c = 1 - \sin^2 c$$

è:

$$\cos a \sin^2 c = \sin a \sin c \cos c \cos\beta + \sin a \sin c \sin\beta \cot\alpha$$

dividiamo ambo i membri per $\sin a \sin c$

$$\cot a \sin c = \cos c \cos\beta + \sin\beta \cot\alpha \qquad (20)$$

Con sostituzioni circolari, ricaviamo le altre formule (equazioni):

$$\cot b \sin a = \cos a \cos\gamma + \sin\gamma \cot\beta \qquad (21)$$

$$\cot c \sin b = \cos b \cos\alpha + \sin\alpha \cot\gamma \qquad (22)$$

In modo analogo, eliminando l'elemento *c* (invece dell'elemento *b*). otteniamo le altre tre formule:

$$\cot a \sin b = \cos b \cos\gamma + \sin\gamma \cot\alpha \qquad (23)$$

$$\cot b \sin c = \cos c \cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta \qquad (24)$$

$$\cot c \sin a = \cos a \cos\beta + \sin\beta \cot\gamma \qquad (25)$$

Le formule dalla (20) alla (25) costituiscono il **teorema delle cotangenti**; queste equazioni legano **quattro elementi consecutivi** di un triangolo sferico.

I precedenti teoremi possono essere facilmente dedotti con una comoda regola mnemonica: supponiamo di dover calcolare l'angolo *α*, noti gli elementi *a*, *b*, *γ*. Ci comportiamo come segue:

- ✓ scriviamo le seguenti funzioni nell' ordine cot sin cos cos sin cot
- ✓ posizioniamo il simbolo "uguale" dopo la prime due funzioni
- ✓ posizioniamo il segno "+" dopo le altre due funzioni

cot sin = cos cos + sin cot

- ✓ successivamente tracciamo (fig.17) internamente al triangolo una "*spezzata curvilinea*", partendo dal lato opposto all'angolo da determinare, diretta verso il lato noto, indi verso l'angolo noto ed infine verso l'angolo da determinare

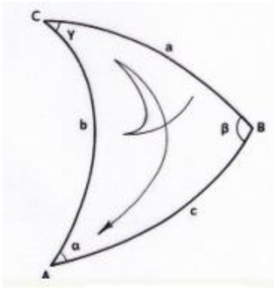


fig.17

- ✓ Nell'ordine dato dalla "*spezzata curvilinea*", riportiamo gli argomenti nell'ultima uguaglianza, con l'avvertenza di scrivere due volte gli elementi in corrispondenza delle cuspidi della suddetta spezzata:

$$\cot a \sin b = \cos b \cos \gamma + \sin \gamma \cot \alpha$$

- ✓ successivamente risolviamo rispetto all'elemento α.

Osservazione. *Se fosse stato incognito il lato a, avremmo operato allo stesso modo, risolvendo l'ultima equazione rispetto all'elemento a.*

Triangoli rettilateri

Per la risoluzione dei triangoli rettilateri si può usare la stessa strategia usata per quelli rettangoli, con l'avvertenza di sopprimere il lati retto, sostituire agli angoli adiacenti al lato retto i loro complementi, sostituire all'angolo opposto al lato retto il suo supplemento,

Esempio.

Noti i lati *a* e *c* del triangolo *ABC*, in cui sia retto il lato *b*, determinare gli altri elementi (fig.18).

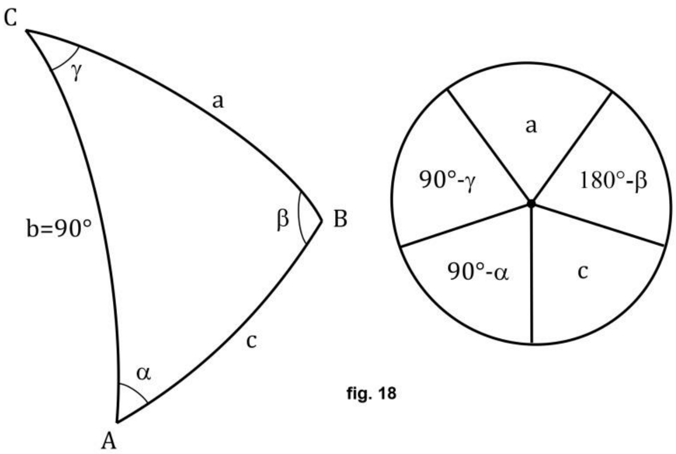
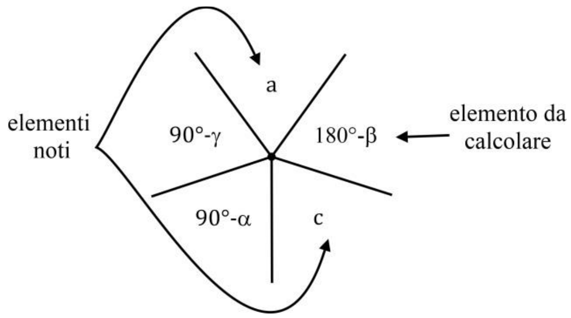


fig. 18

Soluzione:

Serviamoci della seconda parte della figura 18.

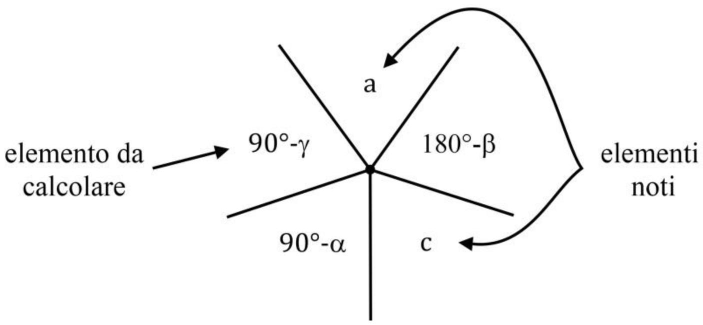
per calcolare *β*, applichiamo la regola mnemonica di Nepero:



Gli elementi sono vicini, quindi si parte dall'elemento centrale.

$$\cos(180° - \beta) = \cot a \cot c \Rightarrow \cos\beta = -\cot a \cot c$$

Per calcolare γ, applichiamo la regola mnemonica di Nepero:



Si parte dall'elemento lontano, cioè dal lato c:

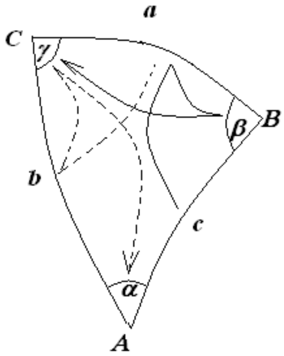
$$\cos c = \sin(90° - \gamma)\sin a \Rightarrow \cos\gamma = \frac{\cos c}{\sin a}$$

NOTA.

*Al fine di ricordare agevolmente le regole mnemoniche di Nepero (sia per la risoluzione dei triangoli sferici rettangoli che per quelli rettilateri) possiamo ricorrere alla regola del "**COCASO**", cioè **"**il **CO**seno di un elemento è uguale al prodotto delle **C**otangenti degli elementi **A**diacenti o al prodotto dei **S**eni degli elementi **O**pposti".*

Esercizi

1) Di un triangolo sferico *ABC* sono noti $a = 43° \, 08' \, 30''$, $c = 65° \, 04' \, 45''$, $\beta = 91° \, 52' \, 30''$.
Determinare gli elementi incogniti.



Calcolo di *b* attraverso il teorema di Eulero:

$$\cos b = \underbrace{\cos a \cos c}_{A} + \underbrace{\sin a \sin c \cos \beta}_{B}$$

in cui:

A è + se ***c*** ed ***a*** sono della stessa specie (entrambi minori di 90° o entrambi maggiori di 90°)

A è − se ***c*** ed ***a*** sono di specie diversa ($c < 90°$ e $a > 90°$ o viceversa)

B è + se $\boldsymbol{\beta} < 90°$
B è − se $\boldsymbol{\beta} > 90°$ } il segno di B dipende solo dal coseno di $\boldsymbol{\beta}$, perché i lati dei triangoli sferici sono compresi tra 0° e 180°, per cui i loro seni sono sempre positivi

Da cui:

$\cos b = A + B$ (addizione algebrica)

Mediante una calcolatrice tascabile, tenendo debitamente conto dei segni, otteniamo:

$b = 73° \, 18' \, 42''$

Calcolo di *γ* attraverso il teorema delle cotangenti (in figura consideriamo la spezzata curvilinea continua):

$$\cot c \sin a = \cos a \cos \beta + \sin \beta \cot \gamma$$

che risolviamo rispetto a *γ* :

$$\cot \gamma = \underbrace{\frac{\sin a}{\tan c \sin \beta}} - \underbrace{\frac{\cos a}{\tan \beta}}$$

M N

in cui:

M è + se c < 90°

M è − se c > 90°

N è + se *α* e *β* sono della stessa specie

N è − se *α* e *β* sono di specie diversa.

Da cui:

cot *γ* = M − N (sottrazione algebrica)

Mediante una calcolatrice tascabile, tenendo debitamente conto dei segni, otteniamo:

γ = 71° 07′ 52′′

Calcolo di *α* attraverso il teorema delle cotangenti (in figura consideriamo la spezzata curvilinea tratteggiata):

$$\cot a \sin b = \cos b \cos\gamma + \sin\gamma \cot\alpha$$

che risolviamo rispetto a *α*:

$$\cot\alpha = \frac{\sin b}{\tan a \sin\gamma} - \frac{\cos b}{\tan\gamma}$$

Con gli stessi accorgimenti usati precedentemente, otteniamo:

α = 45° 31′ 10′′

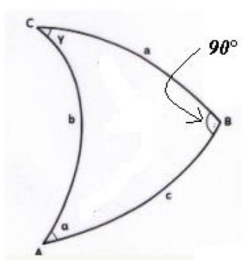
Osservazione*. Possiamo procedere ad una verifica, per esempio ricavando, dagli elementi calcolati, un elemento noto (usiamo il teorema dei seni):*

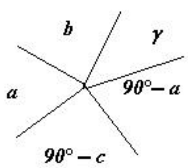
dalla $\sin a = \dfrac{\sin\alpha \sin b}{\sin\beta}$ *otteniamo a = 43° 08′ 30′′*

dalla $\sin a = \dfrac{\sin\alpha \sin c}{\sin\gamma}$ *otteniamo a = 43° 08′ 30′′*

2) Di un triangolo sferico rettangolo ABC, rettangolo in *B*, sono noti *a* = 51° 32′ 15′′ , *c* = 54° 26′ 40′′.

Calcolare gli elementi incogniti.





Calcolo di *b* mediante la regola mnemonica di Nepero (quella dei seni):

$$\cos b = \sin(90° - c)\sin(90° - a)$$

da cui:

$$\cos b = \cos c \cos a$$

nella quale:

cos *c* è + o − a seconda che sia $c < 90°$ o $c > 90°$;

cos *a* è + o − a seconda che sia $a < 90°$ o $a > 90°$.

Tenendo debitamente conto dei segni, eseguiamo i calcoli:

b = 68° 47’ 46’’

Calcolo di *γ* mediante la regola mnemonica di Nepero (quella delle cotangenti):

$$\cos(90° - a) = \cot\gamma \cot(90° - c)$$

e, risolvendo rispetto a *γ*, abbiamo:

$$\tan\gamma = \frac{\tan c}{\sin a}$$

nella quale:

sin *a* è sempre +,

tan *c* è + o − a seconda che sia $c < 90°$ o $c > 90°$.

Tenuto conto dei segni otteniamo:

γ = 60° 45’ 57’’

Calcolo di *α* mediante la regola mnemonica di Nepero (quella delle cotangenti):

$$\cos(90° - c) = \cot\alpha \cot(90° - a)$$

e, risolvendo rispetto a *α* , abbiamo:

$$\tan\alpha = \frac{\tan a}{\sin c}$$

nella quale:

sin *c* è sempre +,

tan *a* è + o − a seconda che sia $a < 90°$ o $a > 90°$.

Tenuto conto dei segni otteniamo:

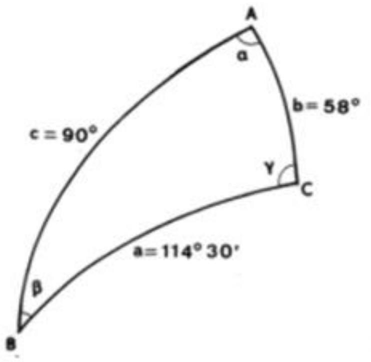
a = 57° 07' 37''

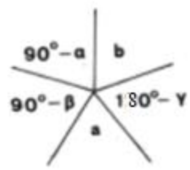
Osservazione*. Possiamo procedere ad una verifica ricavando, dagli elementi calcolati, gli elementi dati :*

dall'equazione $\sin a = \sin b \sin \alpha$*, otteniamo* *a = 51° 32' 15''*

dall'equazione $\sin c = \sin b \sin \gamma$*, otteniamo* *c = 54° 26' 40''*

3) Di un triangolo sferico rettilatero *ABC*, di lato retto *AB*, sono noti *a* = 114° 30' , *b* = 58°.
Calcolare gli elementi incogniti.





Calcolo di *α* mediante la regola mnemonica di Nepero (quella dei seni):

$$\cos a = \sin(90° - \alpha)\sin b$$

che risolviamo rispetto ad *α* :

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin b}$$

nella quale:

cos *a* è + o − a seconda che sia *a* < 90° o *a* > 90°,

sin *b* è sempre +

Tenuto conto dei segni otteniamo:

α = 119° 16' 30''

Calcolo di *β* mediante la regola mnemonica di Nepero (quella dei seni):

$$\cos b = \sin(90° - \beta)\sin a$$

che risolviamo rispetto ad *β*:

$$\cos\beta = \frac{\cos b}{\sin a}$$

nella quale:

cos *b* è + o − a seconda che sia *b* < 90° o *b* > 90°,

sin *a* è sempre +.

Tenuto conto dei segni otteniamo:

$$\beta = 54°\ 23'\ 02''$$

Calcolo di *γ* mediante la regola mnemonica di Nepero (quella delle cotangenti):

$$\cos(180° - \gamma) = \cot b \cot a$$

e, risolvendo rispetto a *γ*, abbiamo:

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\tan b \tan a}$$

nella quale:

tan *b* è + o − a seconda che sia *b* < 90° o *b*> 90°.

tan *a* è + o − a seconda che sia *a* < 90° o *a*> 90°.

Tenuto conto dei segni otteniamo:

$$\alpha = 73°\ 27'\ 18''$$

Osservazione. *Possiamo procedere ad una verifica ricavando, dagli elementi calcolati, gli elementi dati :*

dall'equazione $\cos b = \cot(90° - \alpha)\cot(180° - \gamma)$, *da cui è:*

$\cos b = -\dfrac{\tan\alpha}{\tan\gamma}$ *, otteniamo b = 58°*

dall'equazione $\cos a = \cot(90° - \beta)\cot(180° - \gamma)$, *da cui è:*

$\cos a = -\dfrac{\tan\beta}{\tan\gamma}$ *, otteniamo a = 114° 30'* .