

UNA LEGGENDA

Sono stato due volte in Tunisia, sulle rovine dell'antica città che, secondo la leggenda di Timeo e Giustino, fu fondata da Didone. Questa esperienza mi ha ispirato a scrivere la sua storia, svelandone le sorprendenti connessioni geometriche

- 1) Nell'Eneide di Publio Virgilio Marone** (poeta latino ,70 a.C. - 19 a.C., grazie alla sua grande fama e all'influsso esercitato sulla cultura latina ed occidentale, è considerato il principe dei poeti di Roma)



nel “Libro Primo” si leggono i versi **586 - 591**:

*Giunsero in questi luoghi, ov'or vedrai
sorger la grande cittade e l'alta rocca
de la nuova Cartago, che dal fatto
Birsa nomossi, per l'astuta merce
che, per fondarla, fer di tanto sito
quanto cerciar di bue potesse un tergo.*

Commento: Birsa, che in fenicio ha il significato di **rocca**, fu dai greci interpretata come “**pelle**”, da cui la leggenda di Cartagine, città fondata nell'anno 814 a.C. da Didone (figlia di Belo, re di Tiro) in Tunisia. Si racconta che Didone, obbligata a fuggire dalla sua patria, approdò in Tunisia, ed al re del posto (Iarba) chiese il permesso di fondare una città. Il re, ingannandola, acconsentì purché il terreno su cui doveva nascere la “nuova città” (significato di Cartago nel senso di nuova Tiro) fosse contenuta nella pelle di un bue. Ma, molto furbamente, Didone tagliò la pelle in strisce sottilissime che, poste a formare un cerchio, diedero luogo al perimetro di Cartagine.



Con quella strategia Didone ottenne la città di massima estensione, infatti è stato dimostrato che tra tutte le figure piane chiuse, di ugual perimetro, quella che racchiude la massima area è la circonferenza.

Per esempio, è facile dimostrare che tra un quadrato ed un cerchio isoperimetrici, il cerchio è la figura di maggior area.

DIMOSTRAZIONE.

Detto $2p$ il perimetro delle due figure:

- per il quadrato di lato l , si ha: $l = \frac{p}{2}$ e quindi $Area = \frac{p^2}{4}$,
- per il cerchio di raggio r , si ha $r = \frac{p}{\pi}$ e quindi $Area = \frac{p^2}{\pi}$;

si rileva che le due frazioni ottenute hanno uguale numeratore, ed allora è maggiore quella che ha denominatore minore, ovvero la seconda per cui risulta dimostrato l'asserto.

In particolare il cerchio ha area più grande di circa il 27% del quadrato ad esso isoperimetrico.

► Ma la questione è molto più ampia di quanto fino ad ora scritto e precisamente la leggenda contiene il seguente grande problema matematico: ***“tra tutte le linee chiuse isoperimetriche (ovvero aventi ugual perimetro), quella che racchiude la massima area è la circonferenza”***

Una dimostrazione rigorosa del teorema isoperimetrico richiede strumenti matematici avanzati, non alla portata di uno studente di scuola media.

NOTA. La prima dimostrazione razionale di questo teorema fu fornita dal matematico svizzero Jakob Steiner nel 1838. Steiner utilizzò una serie di argomenti geometrici ingegnosi, tra cui la nozione di "*simmetrizzazione di Steiner*", per dimostrare che qualsiasi curva che non sia un cerchio può essere trasformata in una curva con la stessa lunghezza ma con un'area maggiore.

Tuttavia riportiamo (senza dimostrazione) la **disuguaglianza isoperimetrica** che recita:

per qualsiasi curva chiusa piana di lunghezza L e area A , vale la seguente relazione:

$$4 \cdot \pi \cdot A \leq L^2 . (*) \quad (1)$$

Nella (1) scegliamo il segno “=”:

$$4 \cdot \pi \cdot A = L^2$$

e risolviamo l'equazione rispetto alla variabile A :

$$A = \frac{L^2}{4 \cdot \pi} \quad (2)$$

La (2) è l'area di un cerchio avente circonferenza L ; infatti, essendo $L = 2 \cdot \pi \cdot r$, dove r è il raggio della circonferenza, la (2) diventa:

$$A = \frac{L^2}{4 \cdot \pi} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{4 \cdot \pi} = \pi \cdot r^2$$

che è la nota espressione dell'area del cerchio in funzione del raggio, pertanto ripeto:

“tra tutte le linee chiuse piane quella che contiene la massima area è la circonferenza”.

► Ora penso come avrebbe potuto agire uno studente di media superiore. Sarebbe partito dall'espressione

$$Area = \frac{n \cdot l^2}{4 \cdot \tan \frac{\pi}{n}} \quad (2')$$

che porge l'area di poligoni regolari in funzione del proprio lato l , nella quale n è il numero dei lati.

Così, la applico ai seguenti poligoni regolari:

- **Triangolo (3 lati):** $Area = \frac{3 \cdot l^2}{4 \cdot \tan \frac{\pi}{3}}$, usata più comunemente con l'espressione

$$Area = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} \quad (3)$$

- **Quadrato (4 lati):** $Area = \frac{4 \cdot l^2}{4 \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{l^2}{\tan \frac{\pi}{4}}$, ma essendo $\tan \frac{\pi}{4} = 1$,

viene usata l'espressione $Area = l^2$ (4)

- **Pentagono regolare (5 lati):** $Area = \frac{5 \cdot l^2}{4 \cdot \tan \frac{\pi}{5}}$, che viene anche scritta

$$Area = \frac{\sqrt{25 + 10 \cdot \sqrt{5}} \cdot l^2}{4} \quad (5)$$

- **Esagono regolare (6 lati):** $Area = \frac{3 \cdot l^2}{2 \cdot \tan \frac{\pi}{6}}$, che viene anche scritta

$$Area = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot l^2}{2} \quad (6)$$

- **Ettagono regolare (7 lati):** $Area = \frac{7 \cdot l^2}{4 \cdot \tan \frac{\pi}{7}}$ (7)

- **Ottagono regolare (8 lati):** $Area = \frac{8 \cdot l^2}{4 \cdot \tan \frac{\pi}{8}} = \frac{2 \cdot l^2}{\tan \frac{\pi}{8}}$, che viene anche scritta

$$2 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot l^2 \quad (8)$$

•

- **Icosagono regolare (20 lati):** $Area = \frac{20 \cdot l^2}{4 \cdot \tan \frac{\pi}{20}} = \frac{5 \cdot l^2}{\tan \frac{\pi}{20}}$ (9)

•

► Semplifico i calcoli ponendo per la circonferenza il raggio unitario: $r = 1$ unità di misura lineare; allora il perimetro $C = 2 \cdot \pi \cdot r$ e l'area $A = \pi \cdot r^2$ diventano rispettivamente

- $C = 2 \cdot \pi$ (*)
- $A = \pi$ (**)

1. Inizio dal triangolo equilatero avente lato l ; imponiamo ugual perimetro con la circonferenza:

$$3 \cdot l = 2 \cdot \pi \Rightarrow l = \frac{2 \cdot \pi}{3}$$

allora dalla (3) ottengo:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right)^2}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \pi^2}{9 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot \pi^2 \approx 1.899406253,$$

ampiamente minore dell'area racchiusa dalla circonferenza: ≈ 3.141592654 .

2. Quadrato

$$4 \cdot l = 2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\pi}{2}$$

allora dalla (4) è:

$$l^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \approx 2.4674011$$

che è più prossimo a π .

3. Pentagono

$$5 \cdot l = 2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2 \cdot \pi}{5}$$

allora dalla (5) è:

$$\frac{\sqrt{25+10 \cdot \sqrt{5}} \cdot l^2}{4} = \frac{\sqrt{25+10 \cdot \sqrt{5}} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{5}\right)^2}{4} \approx 2.716869012$$

che è ancora più prossimo a π .

4. Esagono

$$6 \cdot l = 2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2 \cdot \pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

allora dalla (6) è:

$$\frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot l^2}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{2} \approx 2.849109379,$$

ancora più prossimo a π .

5. ettagono

$$7 \cdot l = 2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2 \cdot \pi}{7}$$

allora dalla (7) è:

$$3.633912422 \cdot l^2 = 3.633912422 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{7}\right)^2 \approx 2.92777798,$$

ancora più vicino a π .

6. Ottagono

$$8 \cdot l = 2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\pi}{4}$$

allora dalla (8) è:

$$2 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot l^2 = 2 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \approx 2.9784166.$$

ancora più prossimo a π .

.....

.....

7. Icosagono

$$20 \cdot l = 2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\pi}{10}$$

allora dalla (9) è:

$$\frac{5 \cdot l^2}{\tan \frac{\pi}{20}} = \frac{5 \cdot \left(\frac{\pi}{10}\right)^2}{\tan \frac{\pi}{20}} = \frac{5 \cdot \frac{\pi^2}{100}}{\tan \frac{\pi}{20}} \approx \frac{\frac{\pi^2}{20}}{0.15838444} \approx 3.115711487,$$

sempre più vicino, per difetto, a π .

Con un software matematico posso usare la (2') per un numero a piacere di n ; provo, per esempio, con $n = 1000$:

$$1000 \cdot l = 2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\pi}{500} \quad \Rightarrow \quad Area = \frac{1000 \cdot \left(\frac{\pi}{500}\right)^2}{4 \cdot \tan \frac{\pi}{1000}} \approx 3.141582318$$

Confronto il risultato ottenuto con π :

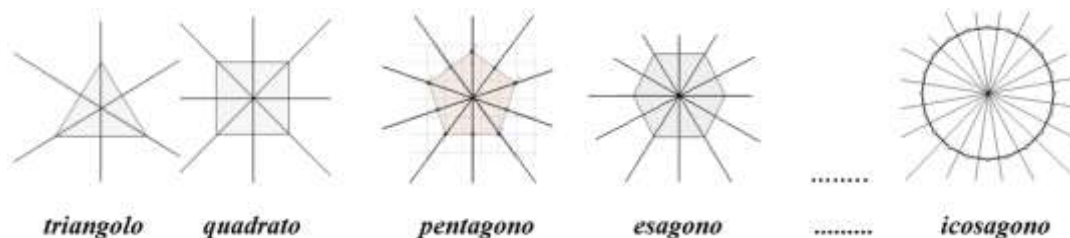
$$\begin{array}{l} \pi = 3.1415926535897932384 \dots \\ Area = 3.141582318 \end{array}$$

Si rileva che *Area* combacia con π sino alla quarta cifra decimale, mentre la quinta cifra decimale risulta minore della quinta cifra decimale di π .

Intuizione geometrica.

Gli assi di simmetria di un poligono regolare sono pari al numero di lati:

- il triangolo ha 3 assi di simmetria,
- il quadrato ha 4 assi di simmetria,
- ...
- l'icosagono ha 20 assi di simmetria
-



Come si vede, più aumenta il numero di assi di simmetria del poligono e più la sua area si avvicina inesorabilmente all'area racchiusa dalla circonferenza isoperimetrica; si può dire che la circonferenza è la curva chiusa regolare "più simmetrica possibile": ha infatti infiniti assi di simmetria (ogni retta che contiene un suo diametro) e questa simmetria, distribuendo uniformemente la lunghezza della curva conduce al fatto che la circonferenza massimizzi lo spazio racchiuso.

Questo risultato ha importanti implicazioni in diversi campi, dalla geometria all'ingegneria, e trova applicazioni anche in natura, ad esempio nello spazio tridimensionale, infatti questa proprietà delle figure bidimensionali vale anche nello spazio euclideo tridimensionale, cioè **la sfera è il solido che, a parità di volume, possiede la superficie minima.**

Così che possiamo comprendere la forma sferica delle gocce d'acqua, delle bolle di sapone (gioco che appassiona grandi e piccini), delle palline di mercurio, ecc. perché la tensione superficiale tende sempre a minimizzare la superficie, e come abbiamo detto questa superficie non può che essere sferica.



► Ora torno alla leggenda.

La leggenda di Didone è una delle storie più affascinanti e tristi della mitologia classica. La sua storia è intrecciata con la fondazione di Cartagine e le sue avventure sono state narrate da autori come appunto Virgilio nell'Eneide.

Chi era Didone? Secondo la leggenda era figlia di Muttone, re di Tiro; sposò lo zio Sicheo, sacerdote di Eracle. Dopo la morte del padre, il trono passò nelle mani del fratello Pigmalione che,

per avidità di potere e ricchezze, uccise Sicheo. Didone, per paura del proprio fratello, fuggì da Tiro e giunse in Africa (l'attuale Tunisia) dove fondò la sua città chiamata, appunto, Cartagine.

Secondo la leggenda più tarda, elaborata dalla poesia latina, Didone si sarebbe innamorata di Enea, giunto a Cartagine e, abbandonata successivamente da questi, si sarebbe data la morte, gettandosi su una pira funeraria.

È proprio nel poema epico di Virgilio che si racconta la storia di Enea: eroe troiano in fuga dopo la caduta di Troia, naufraga sulle coste di Cartagine e viene accolto da Didone; tra i due nasce un amore appassionato, ma il destino di Enea è segnato: egli deve ripartire per fondare una nuova Troia in Italia (Roma), lasciando Didone nella disperazione, da cui l'epilogo già raccontato.

Ai miei tempi la scuola media inferiore aveva programmi molto diversi dagli attuali; non sto a fare un confronto con quelli odierni, ma mi limito a ricordare a grandi linee i miei.

I miei ricordi sono indelebili: italiano, latino, storia, geografia, matematica, lingua straniera, disegno, educazione fisica, religione ... tutte materie seguite con interesse.

Mi soffermo, in particolare per l'argomento trattato, sull'italiano e precisamente sui due poemi epici trattati: l'Iliade e l'Odissea.

È la professoressa Francia-Zerega che mi fa apprezzare l'Iliade e l'Odissea che sono i due grandi poemi epici greci costituenti un caposaldo della letteratura greca, opere attribuite al poeta Omero. A riguardo i ricordi sorgono in folla nella mia memoria, tal che posso ancora oggi trattare, a grandi linee, le vicende di questi due poemi.

Il primo dei due narra gli avvenimenti degli ultimi 51 giorni della guerra di Troia (pare che la guerra sia durata 10 anni) in cui l'argomento preminente è l'ira di Achille.

Dopo la morte di Ettore anche il destino di Achille è segnato. Il dio Apollo dirige la freccia di Paride proprio nel suo tallone, unico suo punto vulnerabile. Le armi divine di Achille vengono assegnate ad Ulisse, furbo e scaltro re di Itaca. È lui che con l'inganno (il famoso cavallo di Troia) permette ai greci di entrare in città per distruggerla. Mentre la professoressa legge alcuni passi del poema commentandone i contenuti, io sono così coinvolto tal che mi sembra, in certi momenti, di essere presente e di partecipare alle gesta più suggestive degli eroi; tra l'altro, nel mio intimo, desidero che nessuno dei due allineamenti perda la guerra anche perché i miei idoli sono i due eroi dei due opposti schieramenti: Ettore ed Achille; forse prediligivo il primo, perché il secondo era un semidio e quindi avvantaggiato in quanto invulnerabile, ad esclusione del suo tallone. Per contro, mi era sgradito Ulisse perché vinse la guerra con l'inganno, anche se in un secondo tempo capii che nella vita è importante, per migliorare sempre di più, avere idee originali.

L'antipatia nei riguardi di Ulisse, gradatamente si trasforma in ammirazione per come riesce a superare tutte le difficoltà incontrate, dopo la distruzione di Troia, nell'avventuroso viaggio di ritorno in patria; questa è la trama del secondo poema epico: l'Odissea.

L'eroe riesce a rientrare a Itaca, superando tutte le avversità creatagli dal dio Poseidone che, parteggiando per i Troiani, lo osteggiava in ogni modo (molto avvincente è il famoso passo di Polifemo

La fine del poema è il trionfo di Ulisse che, rientrato in patria, riesce a sterminare i Proci, pretendenti del trono di Ulisse (stratagemma della tela di Penelope... *oggi giorno si cita tale tela per riferirsi ad un lavoro che non avrà mai termine*), creduto morto, potendo quindi riabbracciare la moglie Penelope ed il figlio Telemaco, nonché il vecchio padre Laerte.

Questa fine è generalmente sperata e successivamente gradita dallo studente perché rappresenta l'epilogo del buono che vince sul cattivo, come può pensare ingenuamente un giovane che ciò si debba verificare sempre in tutte le vicende della nostra vita.

OSSERVAZIONE. L'Iliade e l'Odissea erano la base dell'insegnamento elementare: i bambini greci si avvicinavano alla lettura attraverso i poemi di Omero; molto probabilmente i maestri facilitavano i poemi stessi affinché fossero di più accessibile lettura per i bambini.

La mia memoria continua e mi porta alla frequenza del primo anno di Nautico Cristoforo Colombo di Camogli, dove la Professoressa Pellegrini ci presenta l'Eneide con un approccio coinvolgente rendendo l'epica un'esperienza entusiasmante.

Desidero riportare un confronto tra le tre precedenti opere epiche che mi hanno lasciato una impronta piacevole e duratura.

- **L'Iliade** narra la storia della guerra di Troia, un conflitto tra Achei (Greci) e Troiani, scatenato dal rapimento di Elena, moglie del re di Sparta Menelao, da parte del principe troiano Paride. Il poema si concentra sull'ira di Achille, il più grande guerriero acheo, e sulle sue conseguenze.
- **L'Odissea** racconta il lungo e avventuroso viaggio di ritorno a casa di Ulisse (Odisseo), re di Itaca, dopo la caduta di Troia. Durante il suo viaggio, Ulisse affronta numerosi pericoli e insidie, tra cui il ciclope Polifemo, la maga Circe e le sirene.
- **L'Eneide** narra la storia di Enea, un principe troiano che fugge dalla città distrutta e, dopo un lungo viaggio, giunge in Italia, dove fonderà la città di Roma. L'Eneide è un'opera celebrativa della grandezza di Roma e del suo destino di dominio sul mondo.

NOTA.

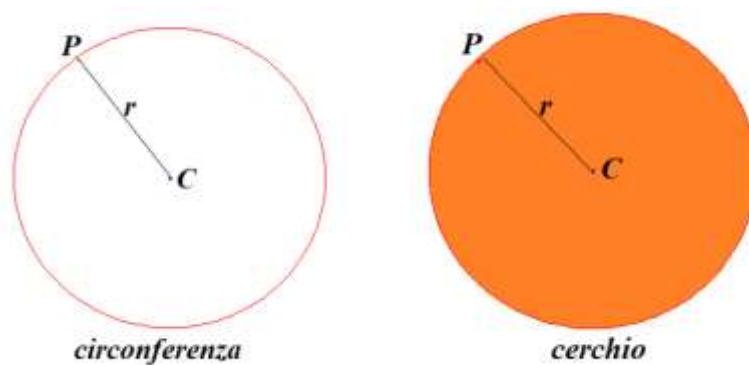
Anche Dante si interessò di “circonferenza”: **CERCHIO O CIRCONFERENZA?**

DEFINIZIONI.

1. **circonferenza**: il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto, detto centro della circonferenza; il segmento che congiunge un qualunque punto della circonferenza col centro si dice *raggio* della circonferenza;
2. **cerchio**: la parte di piano delimitata dalla circonferenza, contorno incluso.

Pertanto la circonferenza fa parte del cerchio.

Do l'idea di quanto definito mediante due disegni nei quali ho indicato con C il centro, con P il generico punto della circonferenza, con r il raggio



Ho disegnato la circonferenza con colore rosso e così pure il cerchio così che viene evidenziato che il primo disegno fa parte integrante del secondo.

I ricordi scolastici si affollano nella mia mente tale che mi sembra che certi miei professori non facessero distinzione tra circonferenza e cerchio ... ma da una certa epoca in poi si cominciò a farla ed attualmente è ricorrente.

Pertanto dico che la circonferenza è il perimetro del cerchio.

Nelle altre figure piane non esistono nomi diversi tra la figura stessa ed il proprio perimetro; per esempio il *quadrato* si definisce:

“poligono convesso formato da 4 lati congruenti e 4 angoli retti” oppure *“quadrilatero convesso equilatero e equiangolo”* oppure *“poligono regolare avente 4 lati”*.

Perciò detto l il lato del quadrato, è:

- $perimetro = 4 \cdot l$,
- $area = l^2$,

Per il cerchio, detto r il suo raggio, è:

- $perimetro = 2 \cdot \pi \cdot r$ che si chiama *circonferenza*,
- $area = \pi \cdot r^2$

Anche Dante Alighieri ha scritto versi che riguardano il cerchio:

*“Dal centro del cerchio, e sì dal cerchio al centro,
moversi l’acqua in ritondo vaso,
secondo ch’è percossa fuori o dentro”*

Versi tratti dal “Paradiso XIV, 1-3” dai quali si evince che il Padre della lingua italiana indica con cerchio la linea i cui punti sono equidistanti dal centro e quindi si riferisce in realtà alla circonferenza.

OSSERVAZIONE.

Avrei potuto dare diversi titoli a questo “scritto”: *“Dall’epica alla geometria”*, *“La geometria nei pilastri della letteratura occidentale”*, *“Capolavori classici e geometria”*, ...

Nell’ intrinseca bellezza di queste opere si inserisce la scienza perfetta: la matematica; è proprio per questo che desidero riportare un ricordo indelebile che mi ha lasciato il mio professore Callini nella terza media. Tra i tanti argomenti trattati vi erano i così detti *“prodotti notevoli”*.

Ne voglio riportare 2:

1. lo sviluppo del quadrato di un binomio:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2;$$

2. la scomposizione della differenza di 2 cubi:

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2).$$

In generale la lezione, dopo aver verificato l'identità dei due membri delle due uguaglianze, finiva e si passava alla fase delle esercitazioni.

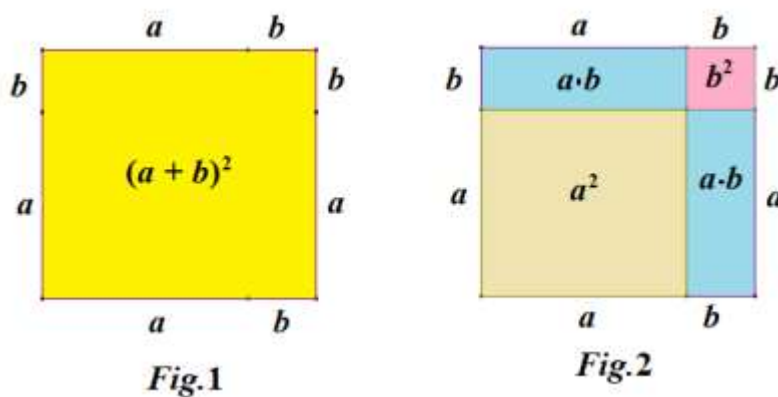
Ma, il mio professore è andato avanti dicendo:

“se a e b sono numeri positivi (e, nel secondo caso con $a > b$) esprimenti, in una certa unità di misura lineare, dei segmenti, allora:

- nella 1. i due membri dell'identità esprimono aree,
- nella 2. i due membri dell'identità esprimono volumi.

Ed è proprio quello che il docente ci ha fatto vedere disegnando il caso 1. alla lavagna con gessi a colori.

► Molto semplice nel caso 1.



infatti la Fig. 1 riporta il quadrato di area $(a+b)^2$ e la Fig. 2 lo stesso quadrato composto dai quadrati di a^2 e b^2 e da due rettangoli di area $a \cdot b$, che insieme porgono $2 \cdot a \cdot b$.

► Meno semplice nel caso 2. che prendo da “La Matematica” di Lancelot Hogben (1895 – 1975) statistico britannico.

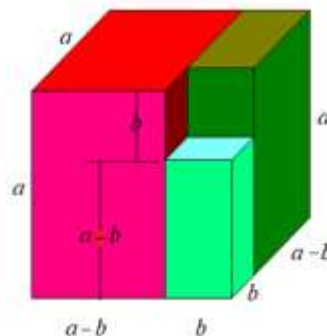
Sviluppo il secondo membro dell'identità

$$(a-b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) = a^3 + a^2 \cdot b + a \cdot b^2 - a^2 \cdot b - a \cdot b^2 - b^3$$

e, nello sviluppo ottenuto eseguo opportuni raccoglimenti

$$a^3 + a^2 \cdot b + a \cdot b^2 - a^2 \cdot b - a \cdot b^2 - b^3$$

$$\begin{array}{l} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{a^2 \cdot (a-b)} \\ \underbrace{\hspace{2.5cm}}_{a \cdot b \cdot (a-b)} \\ \underbrace{\hspace{3.5cm}}_{b^2 \cdot (a-b)} \end{array}$$



ottenendo la figura che, nello spazio tridimensionale, rappresenta il caso 2.

(*) La dimostrazione di questa disuguaglianza non è assolutamente elementare.

Le prime intuizioni su questo problema risalgono all'antica Grecia con Zenodoro, matematico greco antico della seconda metà del II secolo *a.C.* Purtroppo non si hanno notizie della sua vita.

Molto tempo dopo ci furono:

- **Jakob Steiner** (1796-1863), matematico svizzero che nel 1838 fornì diverse dimostrazioni, ma nessuna completa, aprendo però la strada a nuove idee e approcci.
- **Karl Hermann Amandus Schwarz** (1843-1921), matematico tedesco che ottenne, nel 1890, risultati efficaci e la sua dimostrazione completa fu pubblicata postuma.
- **Adolf Hurwitz** (1859-1919), matematico tedesco che nel 1901 pubblicò una dimostrazione rigorosa utilizzando le serie di Fourier.
- **Erhard Schmidt** (1876-1959), matematico tedesco che nel 1938 produsse una dimostrazione più semplice ed elegante, basata su argomenti geometrici.

OSSERVAZIONE. L'insegnamento della matematica e delle scienze nella scuola si concentra principalmente sull'apprendimento di concetti e abilità operative e quasi mai sulla comprensione del loro sviluppo storico; sono però pienamente convinto che la conoscenza del loro sviluppo possa aiutare a comprendere meglio i concetti e le teorie attuali, nonché a stimolare la curiosità e l'interesse degli studenti verso queste materie.