# Anno 2025: Sfide e Opportunità

Il numero 2025 presenta alcune interessanti particolarità matematiche. Vediamole insieme:

- **È fattorizzabile:** $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ quindi può essere diviso esattamente per 3 quattro volte e per 5 due volte; inoltre, essendo $3^4 = 9^2$, 2025 è il prodotto di 2 quadrati: $2025 = 9^2 \cdot 5^2$.
- **È la somma dei cubi delle cifre del sistema decimale**:

$$0^2 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 =$$

$$= 0 + 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 + 512 + 729 = 2\,025$$

- **È un quadrato perfetto:**

  infatti, per note proprietà delle potenze, è:

$$2025 = 3^4 \cdot 5^2 = \left(3^2\right)^2 \cdot 5^2 = 9^2 \cdot 5^2 = (9 \cdot 5)^2 = 45^2$$

**Effettuiamo ora l'operazione inversa, ovvero calcoliamo il quadrato di 45, senza moltiplicare la sua base per sé stessa; il metodo è il seguente:**

**si moltiplica il numero 4 per il suo successivo 5 e si scrive il risultato 20, seguito dal numero 25, ovvero 2025.**

Questa regola non è un trucco apparentemente magico, ma ha una solida base matematica; vediamola:

prendiamo un numero qualsiasi di 2 cifre che termina con 5. Possiamo rappresentarlo algebricamente come:

$$10 \cdot a + 5, \qquad (1)$$

dove $a$ è il numero che esprime le decine.

Per esempio, 35 può essere scritto come $10 \cdot 3 + 5$.

Calcoliamo il quadrato della (1)

$$(10 \cdot a + 5)^2 = 100 \cdot a^2 + 100 \cdot a + 25;$$

raccogliere a fattore comune 100:

$$100 \cdot \left(a^2 + a\right) + 25; \qquad (2)$$

notiamo che:

- $100 \cdot (a^2 + a)$ rappresenta un numero che termina con due zeri,
- 25 costituisce la coppia delle ultime due cifre dello sviluppo del quadrato.

## Interpretazione pratica del risultato

- $a^2 + a$ corrisponde a moltiplicare il numero delle decine ($a$) per il suo successivo ($a$+1), infatti è $a^2 + a = a \cdot (a+1)$
- 25 è sempre aggiunto alla fine del numero $a \cdot (a+1)$.

Quindi, per calcolare il quadrato di un numero che termina per 5 si opera come segue:

> si moltiplica il numero formato dalle cifre che precedono il 5 per il suo successivo e al risultato ottenuto si aggiunge, in coda, il numero 25.

**Esempio 1.** Calcolare il quadrato di 85:

> si moltiplica 8 per il suo successivo ovvero per 9 e si ottiene 72: il quadrato cercato si ottiene aggiungendo, in coda, a questo prodotto il numero 25, ovvero:

$$7225,$$

infatti dalla (2), è: $100 \cdot (8^2 + 8) + 25 = 7200 + 25 = 7225$.

**Esempio 2.** Calcolare il quadrato di 105:

> si moltiplica 10 per il suo successivo ovvero per 11 e si ottiene 110: il quadrato cercato si ottiene aggiungendo, in coda, a questo prodotto il numero 25, ovvero:

$$11025,$$

infatti dalla (2), è: $100 \cdot (10^2 + 10) + 25 = 100 \cdot 110 + 25 = 11000 + 25 = 11025$

**In sintesi:** questo metodo sfrutta la struttura particolare dei numeri che terminano con 5 e le proprietà algebriche che consentono di velocizzare il calcolo del loro quadrato.

**Analizziamo ancora il numero 2025**

- i divisori sono 15: 1; 3; 5; 9; 15; 25; 27; 45; 75; 81; 135; 225; 405; 675; 2025
- somma dei divisori: 3751,
- intero precedente: 2024,
- intero successivo: 2026,
- non è numero primo ovvero è un numero composto,
- precedente primo: 2017,
- successivo primo: 2027,
- non è un numero di Fibonacci, né di Catalan, né di Bell,

- non è un fattoriale,
- non è né perfetto, né amicabile con altro numero,
- in numerazione binaria è: 11111101001
  infatti è: $1\cdot 2^{10}+1\cdot 2^{9}+1\cdot 2^{8}+1\cdot 2^{7}+1\cdot 2^{6}+1\cdot 2^{5}+0\cdot 2^{4}+1\cdot 2^{3}+0\cdot 2^{2}+0\cdot 2^{1}+1\cdot 2^{0}$=2025
- in numerazione ottale è 3751 infatti è: $3\cdot 8^{3}+7\cdot 8^{2}+5\cdot 8^{1}+1\cdot 8^{0}=1536+448+40+1=2025$
- in numerazione esadecimale è 7E9 infatti è: $7\cdot 16^{2}+14\cdot 16^{1}+9\cdot 16^{0}=2025$.

Verifichiamo che 2025 è un numero in base 10:

$$2\cdot 10^{3}+0\cdot 10^{2}+2\cdot 10^{1}+5\cdot 10^{0}=2025.$$

►Ricordiamo che i simboli utilizzati nei sistemi di numerazione posizionale sono chiamati "**cifre**"

**OSSERVAZIONE**. Le cifre sono fondamentali per rappresentare qualsiasi numero, grande o piccolo che sia, all'interno di un sistema di numerazione. La scelta della base e quindi delle cifre determina le caratteristiche di un sistema di numerazione e la sua applicabilità in diversi contesti, come l'informatica, l'ingegneria e la matematica. In un sistema di numerazione posizionale, il valore di una cifra dipende sia dal simbolo stesso sia dalla posizione che occupa all'interno del numero. Ogni posizione corrisponde a una potenza della base del sistema.

Nel sistema decimale le cifre sono 10 corrispondenti ai primi 10 elementi dell'insieme dei numeri naturali: 0:1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Nel sistema binario le cifre sono 2 corrispondenti ai primi 2 elementi dell'insieme dei numeri naturali: 0:1.

Nel sistema ottale le cifre sono 8 corrispondenti ai primi 8 elementi dell'insieme dei numeri naturali: 0:1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

- Nel sistema esadecimale le cifre sono 16 corrispondenti ai primi 16 elementi dell'insieme dei numeri naturali: 0:1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15. Ma in questo caso i simboli da 10 a 15 non sono cifre nel senso stretto di cifra ed allora è consuetudine scrivere che le cifre del sistema esadecimale sono:

  0:1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A; B; C; D; E; F. (È per questo che la seconda cifra del numero esadecimale

  precedente è la lettera E)

►Analizziamo ora il numero 2025 mediante la **numerologia** che è la disciplina che attribuisce ai numeri un significato ben oltre il loro valore matematico. Essa cerca di interpretare le vibrazioni e le energie che i numeri emanano, collegandole agli aspetti della vita umana, del carattere e del destino.

Potremmo analizzare cifra per cifra, ma preferiamo riferirci alla somma delle cifre che lo compongono: 2+0+2+5 = 9.

Ed ecco il 9 in numerologia:

esprime completezza, illuminazione, umanitarismo e il servizio agli altri.

**Pertanto chi è influenzato dal numero 9 spesso ha una missione di vita legata all'aiutare gli altri e a creare un mondo migliore ed è proprio con la speranza che siano molte le persone legate al numero 9 che auguro a tutti un buon nuovo anno.**

►Infine pongo la seguente domanda:

**perché 2025 è un quadrato perfetto?**

Il perché è da attribuirsi alla sua scomposizione in fattori primi $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, infatti tutti gli esponenti sono pari e ciò significa che 2025 è il quadrato di un numero intero $2025 = 45^2$.

**OSSERVAZIONE**. Gli anni quadrati perfetti sono piuttosto rari.

- L'ultimo prima del 2025 è stato il 1936, infatti è $1936 = 44^2 = 4^2 \cdot 11^2$;
- il prossimo sarà il 2116, infatti è $2116 = 46^2 = 2^2 \cdot 23^2$.

La ragione di questa rarità è che per ottenere un quadrato perfetto, **tutti gli esponenti nella scomposizione in fattori primi devono essere pari**.

►Ancora una caratteristica del numero 2025: è un numero di Kaprekar.

Un **numero di Kaprekar** è un numero intero, non negativo, che possiede una proprietà molto particolare: il suo quadrato può essere diviso in due parti, tali che la somma di queste due parti dia nuovamente il numero di partenza; esempio classico è il numero 9:

$$9^2 = 81 \quad \Rightarrow \quad 8 + 1 = 9;$$

e così è anche per 2025:

$$45^2 = 2025 \quad \Rightarrow \quad 20 + 25 = 45.$$

**IN CONCLUSIONE**

L'anno 2025, essendo un quadrato perfetto, può essere visto come un'opportunità per dare un tocco di originalità e significato alla nostra vita. Non esistono regole precise su come comportarsi in un anno così speciale, ma possiamo trarre ispirazione da questa particolarità numerica per introdurre alcune novità piacevoli nel nostro quotidiano … e non dimentichiamo: è l'unico anno quadrato perfetto della nostra generazione.

►**Ulteriore proprietà del numero 2025**: "*è uguale alla somma dei primi* 45 *numeri dispari dell'insieme N.*

**Mediante il potente strumento di calcolo simbolico e numerico** che consente di lavorare con una vasta gamma di oggetti matematici: **DERIVE6.1**, usiamo il programma:

**VECTOR (espressione, dichiarazione della variabile, valore-iniziale, valore-finale, passo)**

Nel nostro caso:

- l'espressione è una matrice a tre colonne, in cui il numero delle righe dipende dai valori scelti dei valori iniziale e finale,
- la variabile d'azione è la lettera *n*,
- il valore-iniziale è 0,
- il valore-finale è 44,
- il passo è 1, non scritto ed allora preso per default dal programma stesso.

$$\text{VECTOR}\left(\left[n,\ 2\cdot n+1,\ \sum_{n=0}^{n}(2\cdot n+1)\right],\ n,\ 0,\ 44\right)$$

In esecuzione porge:

| $n$ | $2\cdot n + 1$ | $\sum_{n=0}^{n}(2\cdot n+1)$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 4 |
| 2 | 5 | 9 |
| 3 | 7 | 16 |
| 4 | 9 | 25 |
| 5 | 11 | 36 |
| 6 | 13 | 49 |
| 7 | 15 | 64 |
| 8 | 17 | 81 |
| 9 | 19 | 100 |
| 10 | 21 | 121 |
| 11 | 23 | 144 |
| 12 | 25 | 169 |
| 13 | 27 | 196 |
| 14 | 29 | 225 |
| 15 | 31 | 256 |
| 16 | 33 | 289 |
| 17 | 35 | 324 |
| 18 | 37 | 361 |
| 19 | 39 | 400 |
| 20 | 41 | 441 |
| 21 | 43 | 484 |
| 22 | 45 | 529 |
| 23 | 47 | 576 |
| 24 | 49 | 625 |
| 25 | 51 | 676 |
| 26 | 53 | 729 |
| 27 | 55 | 784 |
| 28 | 57 | 841 |
| 29 | 59 | 900 |
| 30 | 61 | 961 |
| 31 | 63 | 1024 |
| 32 | 65 | 1089 |
| 33 | 67 | 1156 |
| 34 | 69 | 1225 |
| 35 | 71 | 1296 |
| 36 | 73 | 1369 |
| 37 | 75 | 1444 |
| 38 | 77 | 1521 |
| 39 | 79 | 1600 |
| 40 | 81 | 1681 |
| 41 | 83 | 1764 |
| 42 | 85 | 1849 |
| 43 | 87 | 1936 |
| 44 | 89 | $\boxed{2025}$ |

che ne comprova la proprietà.

NOTA. Avendo scelto *n-iniziale* = 0 e *n-finale* = 44, i numeri dispari sono proprio 45, ovvero è:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 85 + 87 + 89 = 2025.$$

►E ancora, il 2025 è anche un **numero di Harshad**, ovvero è un numero intero positivo che è divisibile per la somma delle sue cifre:

- somma delle cifre … 2 + 0 + 2 + 5 = 9
- 2025 è divisibile per 9 … 2025: 9 = 225.

Il termine "Harshad" deriva dal sanscrito "harṣa" che significa "*grande gioia*". Questo nome è stato scelto dal matematico indiano Dattatreya Ramachandra Kaprekar, che ha studiato a fondo questi numeri.

► Come già detto, è: $2025 = 45^2$ e 45, base del quadrato, gode di una grande proprietà: è un numero triangolare; infatti 45 fa parte della sequenza dei numeri triangolari: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, **45**, 55, ...

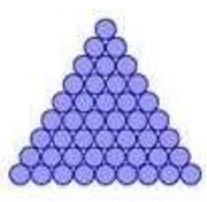
Calcolo dell'$n$-esimo numero triangolare $T_n$

$$T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \qquad (1)$$

Imponiamo nella (1) $\quad T_n = 45$

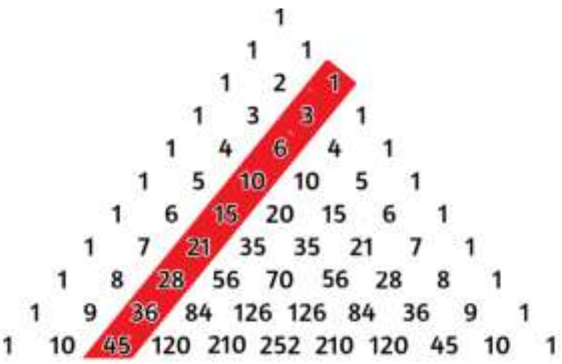
$$45 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad n^2 + n - 90 = 0 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2} = \left| \begin{array}{l} -10 \\ 9 \end{array} \right.$$

ed ecco il triangolo equilatero avente per lati 9 "*palline*"



**OSSERVAZIONE.**

I numeri triangolari appaiono anche nella terza diagonale del triangolo di tartaglia




►Un **operatore** in matematica è un simbolo o una parola che indica un'azione da compiere su uno o più oggetti matematici (come numeri, funzioni, vettori, insiemi, ecc.).

Anche il fattoriale di un numero $n \in N$ è un operatore, infatti l'azione consiste nel moltiplicare tutti i numeri interi positivi da 1 fino al numero dato *n* ed il suo simbolo è "**!**", che si legge "*fattoriale*".

**Perché il fattoriale è un operatore?**

- **Agisce su un numero:** il fattoriale prende in input un numero naturale (ad esempio 7) e restituisce un altro numero 5040, infatti è $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.
- **Indica un'operazione:** il simbolo "!" è una notazione specifica che indica l'operazione di fattoriale.
- **Segue le regole di un'operazione:** il fattoriale ha delle regole ben precise su come viene calcolato.

Il fattoriale è un operatore piuttosto potente; vediamo applicato sul nuovo anno

$$2025!$$

sviluppato porge:

approssimato è

$$1.308203347 \cdot 10^{5818}$$

# Quanto vale il fattoriale di 0? Cioè 0! Che risultato porge?

Ricordiamo il significato del coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$: esso rappresenta tutte le combinazioni di $k$ elementi che si possono formare a partire da un insieme di $n$ elementi.

**ESEMPIO**.

Abbiamo un insieme di 8 palline tutte di diverso colore e vogliamo sapere quanti sottoinsiemi di 2 elementi possiamo formare.

**SOLUZIONE**

- Per la prima pallina abbiamo 8 scelte.
- Per la seconda pallina, dopo aver scelto la prima, abbiamo 7 scelte.

Quindi, possiamo pensare di avere 8 · 7 = 56 coppie.

Ma, non è così perché in questo modo abbiamo contato ogni coppia due volte (ad esempio la coppia {verde, gialla} e la coppia {gialla, verde}).

Pertanto correggiamo il risultato dividendolo per 2: $\frac{56}{2} = 28$.

Ora diamo l'espressione del coefficiente binomiale tramite l'operatore fattoriale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

## ►Ora verifico l'uguaglianza 0! =1:

**PRIMO METODO**

Per la legge di ricorrenza è:

$$1! = 1 \cdot 0!\,; \qquad (*)$$

ma è

$$1! = 1 \qquad (**)$$

e dal confronto della (*) con la (**) si ottiene l'asserto.

**SECONDO METODO**

Dopo aver definito le combinazioni semplici $C_{n,k} = \binom{n}{k}$, le scrivo tramite rapporti di fattoriali, come segue

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}. \qquad \text{(a)}$$

Per $k = n$,

- il primo membro della (a) è

$$C_{n,n} = 1 \qquad \text{(b)}$$

- il secondo membro è:

$$\frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{1}{0!} \qquad \text{(c)}$$

dal confronto della (c) con la (b), è:

$$\frac{1}{0!} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{0! = 1}.$$