1. LA METÀ DELL’ANNO.

“*In quale giorno scocca l’ora che divide l’anno in due parti uguali*?”

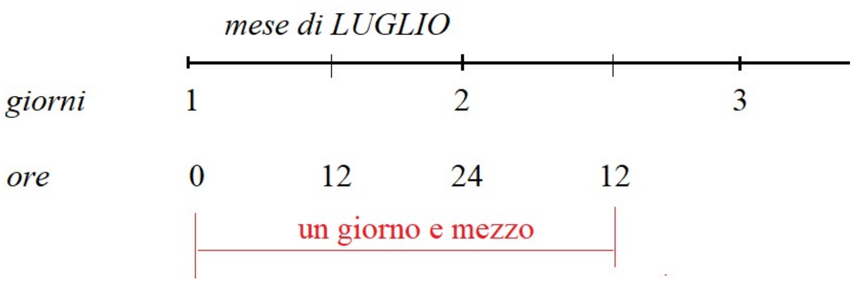
RISPOSTA.

Intanto bisogna distinguere tra l’anno non bisestile e quello bisestile.

Cominciamo dal non bisestile e contiamo i giorni di ogni mese:

GEN	31	
FEB	28	
MAR	31	
APR	30	181 *giorni*
MAG	31	
GIU	30	
LUG	31	
AGO	31	
SET	30	184 *giorni*
OTT	31	
NOV	30	
DIC	31	

Si rileva che il secondo semestre ha 3 giorni in più del primo, pertanto lo scoccare dell’ora del mezzo anno cade in un giorno del mese di luglio. È sufficiente trasferire un giorno e mezzo dal secondo al primo semestre (181 +1.5 = 184 – 1.5 = 182.5 e il doppio di quest’ultimo è proprio 365)



Pertanto quando scoccano le 12 (mezzogiorno) del secondo giorno di luglio siamo perfettamente alla metà dell’anno.

Nell’anno bisestile il primo semestre aumenta di un giorno, pertanto il divario di ore tra i giorni del primo semestre col secondo sono due ed allora il secondo ne regala uno al primo (182 + 1 = 184 – 1 =183 e il doppio di quest’ultimo è proprio 366); allora allo scoccare della mezza notte del primo luglio siamo perfettamente a metà anno.

OSSERVAZIONE. Questo è un calcolo che riesce a farlo anche uno studente della scuola primaria.

2. PECULIARITÀ DI KEPLERO

Keplero, pur essendo principalmente noto per i suoi rivoluzionari contributi all'astronomia, manifestava un'intelligenza e una curiosità che lo portavano ad esplorare una vasta gamma di discipline.

È uso ricordare Keplero esclusivamente per le sue tre leggi che governano le traiettorie dei pianeti intorno al Sole, ma in realtà era molto versatile e spaziava in tanti settori, per esempio:

- in matematica, mezzo indispensabile per verificare le sue tre leggi,
- in fisica ed in particolare in ottica che gli è servita per capire meglio le immagini che riceveva dai telescopi, riuscendo così a formulare la legge della rifrazione della luce,
- in musica, credendo che esistesse una correlazione tra la musica ed i movimenti dei corpi celesti, tanto da pubblicare un libro che spiegasse questa relazione, dal titolo "*Harmonices Mundi*"; come si rileva, il latino (*) era la lingua usata dagli scienziati, in modo che tutti potessero leggere facilmente testi di qualunque autore.

Andando a ricercare qualche altro suo interesse, si ricorda che nell'anno 1611 durante una forte nevicata a Praga, rimase affascinato dalla perfetta simmetria esagonale dei fiocchi di neve. Ed ecco la differenza tra un uomo comune e uno scienziato, la sua meraviglia consisteva soprattutto nell'aver constatato che i fiocchi di neve, pur essendo dimensionalmente uno diverso dall'atro, tutti godevano della stessa sopradetta proprietà. Questo suo nuovo interesse lo condusse a scrivere un altro libro dal titolo "*Strena seu De Nive Sexangula*" che riporta una indagine scientifica sulla struttura dei cristalli di ghiaccio.

Lo studio che Keplero condusse sui fiocchi di neve ha aperto la strada a un nuovo campo di ricerca, la cristallografia.

Ora è noto che la forma dei cristalli di neve è determinata da una combinazione di fattori, tra cui la temperatura, l'umidità e la velocità di raffreddamento dell'acqua.

È nota la congettura che Keplero fece sui fiocchi di neve: "la forma esagonale dei fiocchi di neve è la più adeguata in assoluto per fare entrare il massimo numero di fiocchi in un contenitore". Questa congettura ha condotto Keplero a scriverne un'altra riguardante l'impacchettamento di sfere nello spazio euclideo tridimensionale; ipotizzò che le disposizioni più efficienti fossero quelle dell'**impacchettamento cubico a facce centrate** e dell'**impacchettamento esagonale**. In termini matematici, la congettura afferma che nessun altro modo di disporre le sfere può portare a una densità maggiore. La densità di questi due modi di sistemare le sfere è leggermente maggiore del 74%. Questa congettura è stata dimostrata dal matematico statunitense Thomas Callister Hales nel 1998.

(*) L'uso della lingua latina usata dagli gli scienziati per comunicare tra loro mi fa ricordare il seguente grande matematico italiano Peano Giuseppe, nato a Cuneo nel 1858 e morto a Torino nel 1932, è stato matematico, docente di analisi matematica all'Università di Torino.
Ha dato, soprattutto, notevoli contributi in logica (fondamenti di aritmetica) e in analisi matematica. Fra le sue pubblicazioni spiccano: "Principi di logica matematica" e "Formulario matematico".
Cercò di introdurre una lingua scientifica artificiale internazionale che ha battezzato "l*atino sine flexione*" detta anche "*interlingua*". Inventò questa lingua nel 1903: essa è una versione "semplificata" del latino classico in cui eliminò le declinazioni. Purtroppo non ebbe l'approvazione da parte del mondo matematico. Credo che fu un grave errore perché si sarebbe tornati ai tempi in cui la lingua scientifica era proprio il latino classico. Non dimentichiamo che i matematici comunicavano con quella lingua e con la stessa pubblicavano libri; per esempio Niccolò Fontana (Tartaglia) pubblicò il libro di "geometria euclidea" che fu usato in tutta l'Europa per circa due secoli. Peano credeva nella sua "invenzione" (ed aveva pienamente ragione) tanto da pubblicare alcuni testi in quella lingua e tenere lezioni, nella stessa lingua, nell'Ateneo Torinese.
Dettò gli "assiomi sui numeri interi":

i) zero è un numero;

ii) il successivo di un numero è un numero;

iii) due numeri non possono avere lo stesso successivo;

iv) lo zero non è successivo di alcun numero;

v) ogni proprietà dello zero, come anche del successivo di ogni numero che abbia quella proprietà. è di tutti i numeri (principio di induzione).
Il sistema assiomatico di Peano si adatta, come dimostrato da Russel, oltre ai numeri interi, anche a qualunque progressione: basta dare il nome "zero" al primo termine della progressione.
È stato un "Grande" peccato che il mondo scientifico non abbia abbracciato la sua idea di lingua internazionale; potrei leggere libri di autori tedeschi. russi, portoghesi, indiani, ecc. ....

NOTA. Avrei potuto leggere, per esempio, le opere di **Carl David Tolmé Runge** (1856-1927) e di **Martin Wilhelm Kutta** e, soprattutto, i metodi che vanno sotto il nome di entrambi "**metodi di Runge-Kutta",** e non attingendo da traduzioni spesso non conformi all'originale. Dal 1970 (periodo della mia frequenza alle lezioni di calcolo numerico) ho capito (grazie anche ai testi di cui prima) che l'analisi moderna era la matematica più attuale e del futuro. I metodi iterativi di soluzione dei problemi sono mirabilmente affiancati ai software informatici.

3. DUE PIONIERI

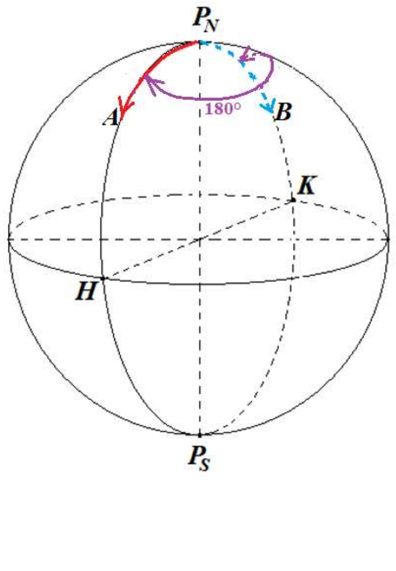
Due ricercatori decisero di fare una grande impresa; partiti, dopo tanti giorni di marcia, pensarono di avere raggiunto la meta stabilita. Invece cominciarono ad avere dubbi sulla posizione raggiunta e avendo perso la bussola in una precedente caduta, non avevano modo di orientarsi. Discussero molto per decidere quale via percorrere per tornare alla base. Non raggiunsero nessun accordo ed ognuno di loro prese una via diversa: uno dei due scelse una direzione in un senso e l'altro paradossalmente scelse la stessa direzione, ma nel senso opposto. Non se ne resero conto, ma entrambi si dirigevano verso lo stesso punto. Come è possibile?

RISPOSTA.

I due pionieri si trovavano in uno dei due poli della Terra. La direzione comune era un circolo meridiano e uno di essi percorreva uno dei due semicircoli in un verso e il secondo avventore percorreva il secondo semicircolo nel verso opposto. Entrambi se erano:

- al polo nord, si dirigevano verso il polo sud,
- al polo sud, si dirigevano verso il polo nord.

Nella seguente figura è rappresentata la Terra dove $P_N\ H\ P_S\ K$ è il meridiano di cui uno dei due pionieri percorre un semimeridiano e il secondo pioniere percorre l'altro semimeridiano. Entrambi hanno la stessa direzione (il circolo meridiano) e ciascuno dei due avventori percorre uno dei due semimeridiani (sensi opposti).



Ammettendo che i cammini fossero possibili i due esploratori, continuando a camminare, si incontrerebbero al polo sud dove arriverebbero simultaneamente se avessero la stessa velocità.

L'angolo formato tra i due semimeridiani ha ampiezza pari a 180°, infatti ogni meridiano appartiene ad un piano passante per l'asse polare.

OSSEVAZIONE 1.

Anche se non avessero perso la bussola, quando erano al polo nord, non avrebbero potuto orientarsi perché la bussola, nei poli (e vicinanze), si comporta in modo diverso dal comportamento che ha nelle medie latitudini. Infatti, ai poli magnetici terrestri, non lontani dagli omonimi poli geografici, l'ago della bussola, che si allinea con le linee del campo magnetico, non ha una direzione preferenziale verso cui puntare e si comporta ruotando liberamente in una qualunque direzione per cui non è per nulla affidabile.

Ai poli l'orientamento avviene col *GPS* che è indipendente dal campo magnetico terrestre.

OSSEVAZIONE 2.

La **direzione** indica lo spostamento di un oggetto lungo una linea e il **verso** ne indica l'orientamento.

Sul piano, un punto che percorre una retta, è su una direzione, però può percorrerla in un senso o nell'atro: questi costituiscono il verso ovvero l'orientamento.

Sulla superficie sferica una direzione è un circolo massimo che può essere percorso sia in un senso oppure nel senso opposto.

Vi è una notevole differenza tra i due universi: il piano e la superficie sferica.

- Se una persona percorre una retta in un senso e continua imperterrito a camminare in quel senso non si fermerà mai senza ancor mai ritornare sui suoi passi (Euclide definì la retta in modo sublime: "è una lunghezza senza larghezza").
- Se uno percorre un circolo massimo, dopo aver fatto un giro completo torna a punto di partenza.

4. MISURA DELLA CIRCONFERENZA MASSIMA TERRESTRE

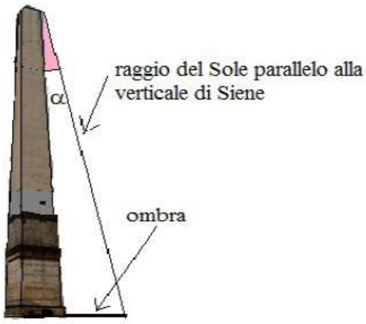
Alcuni attribuiscono ad Archimede l'avere escogitato una teoria per misurare la circonferenza massima della superficie terrestre, ma non è così; può comunque dichiararsi pioniere di questo calcolo per i contributi essenziali che ha dato alla geometria i quali hanno consentito ad altri di portare a termine questo problema.

Il primo ad avere misurato, anche se con una certa approssimazione, la circonferenza massima della Terra è stato **Eratostene di Cirene.**

Eratostene (contemporaneo di Archimede), matematico ed astronomo greco, nasce a Cirene nel 275 (o 276) a.C. (pare che si sia ucciso a causa della cecità che lo colpì).

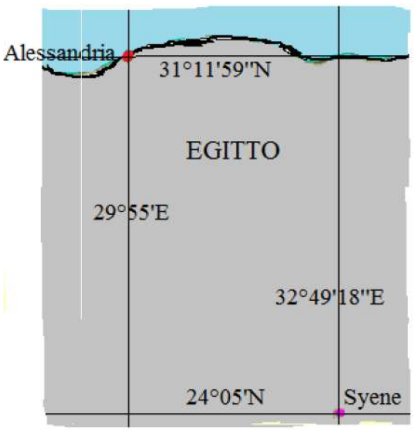
La sua celebrità è dovuta maggiormente al calcolo, con buona approssimazione, della lunghezza fella circonferenza massima della Terra, diciamo del circolo meridiano terrestre.

Nel giorno del solstizio d'estate misurò l'angolo α che la parallela alla verticale di Syene, passante per il punto più alto dell'obelisco di Alessandria d'Egitto, formava con l'obelisco stesso, ovviamente servendosi delle ombre (vedi figura)



L'obelisco, alto 25.5 metri, trasportato da Alessandria nel 37 e collocato sulla spina (muro di mattoni che divideva, a forma di spina dorsale, il circo romano, alle estremità delle quali vi erano tre colonne a conformazione di cono attorno cui giravano i carri) del circo di Nerone, è oggi l'unico obelisco antico di Roma che non sia mai caduto ed è posto al centro della piazza di San Pietro, in Vaticano, dal 19 settembre 1586.

Eratostene aveva dimora a Syene (attuale Aswan) che è situata a circa 800 *Km* a sud, e leggermente spostata verso est, da Alessandria, dove lavorava come bibliotecario.



Un giorno, in riposo nella sua proprietà, come di consueto lasciava cadere dei sassolini nel pozzo del cortile della sua casa e si divertiva ad ascoltare il tonfo nell'acqua che, sia per la profondità del pozzo stesso che per la mancanza di luce non aveva mai visto.

Ma, "quel giorno", affacciandosi al bordo del pozzo, per la prima volta vide l'acqua.

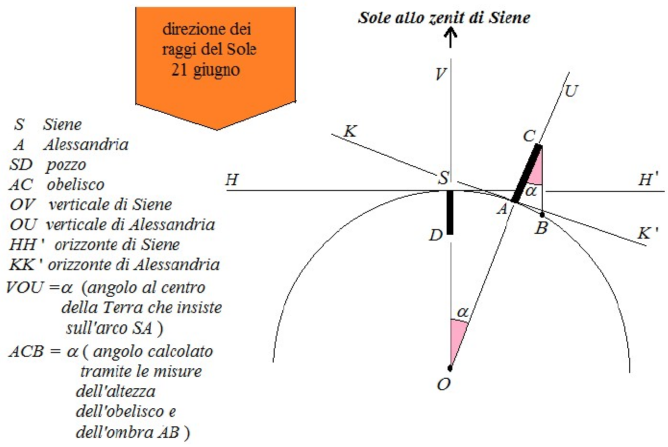
Ciò avveniva perché era mezzogiorno del 21 luglio (declinazione del Sole = 23° 27’ *N*), ed essendo Syene posizionata pressoché sul Tropico del Cancro (latitudine di Syene = 24° 05’ *N*) i raggi del Sole, a mezzogiorno di “quel giorno” cadono perpendicolarmente sul suo piano orizzontale.

Ma, la nostra stella è molto lontana dalla Terra (circa centocinquanta milioni di chilometri),

allora i suoi raggi arrivano sul nostro pianeta in formazione di fasci paralleli.

Eratostene decise, nel ritorno ad Alessandria, di misurare (a giorni di Cammello) la distanza Syene-Alessandria ed il 21 luglio dell’anno successivo, a mezzogiorno in punto, misurò l’angolo α.

Dalla seguente figura, tenuto conto della proprietà degli angoli alterni interni formati da due rette parallele tagliate da una trasversale, risulterà facile il procedimento seguito da Eratostene, riportato subito di seguito alla figura, per il calcolo della lunghezza del meridiano terrestre



lunghezza circolo meridiano : angolo giro = distanza Siene-Alessandria : $\frac{1}{50}$ angolo giro

lunghezza circolo meridiano = 50 volte la distanza Siene-Alessandria ovvero

lunghezza circolo meridiano = ($50 \cdot 5000$) stadi = 250000 stadi

lunghezza circolo meridiano = ($250000 \cdot 157.5$) metri = 39375 chilometri

Alcune doverose precisazioni:

- Pare che non vi fosse una misura unica, ben stabilita, dello stadio (unità di misura di lunghezza di quei tempi), e che questa, espressa in metri variasse tra i 155 *m* e i 210 *m*. Si suppone che Eratostene usò uno stadio equivalente a 157.5 *m*, e, tra Syene ed Alessandria (a giorni di cammello) ne misurò ben 5000.

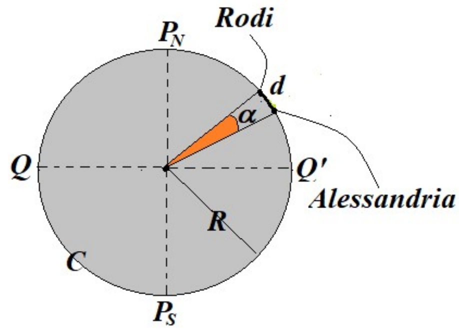
  L’anno successivo, nello stesso giorno 21 luglio, a mezzogiorno, misurava l’angolo α che

  risultò pari ad un cinquantesimo dell’angolo giro.

Tutto ciò giustifica il calcolo precedentemente riportato.

- Spesso accade che i geni, nelle loro scoperte, godano di alcune fortunate coincidenze, ed Eratostene non ne fu neppure lui immune, infatti ne usufruì almeno di tre:
    1. le due città coinvolte nel calcolo sono pressoché sullo stesso meridiano,
    2. ad Alessandria vi era un obelisco piuttosto alto che consentì di effettuare una sufficiente accurata misura dell'angolo α,
    3. era in riposo dagli impegni lavorativi nel giorno del solstizio e proprio a mezzogiorno era sul bordo del pozzo di casa sua da cui lascava cadere alcuni sassolini.

►Anche Posidonio di Apnea, detto di Rodi (135 a.C. circa-50 a.C.), filosofo, geografo e storico si impegnò a determinare una distanza sferica, ma non la misura della lunghezza del meridiano terrestre come qualcuno pensa, ma proprio in base al sopradetto calcolo di Eratostene riuscì a misurare la distanza sferica Rodi-Alessandria d'Egitto. Egli prese in considerazione le stelle ed in particolare la scelta cadde su Canopo, una delle stelle più brillanti. Misurò l'altezza angolare di Canopo rispetto all'orizzonte nelle due città (le misure degli angoli, da entrambe le città, li fece al passaggio di Canopo al meridiano superiore dell'osservatore ovvero nell'istante in cui la stella è più alta nel cielo); sottrasse l'angolo misurato a Rodi da quello misurato ad Alessandria e ottenne la differenza angolare tra le due città che gli permise di determinare l'angolo α al centro della Terra sotteso dall'arco di circonferenza che congiunge le due città. Il gioco era fatto: bastava una proporzione.



In figura la Terra in cui è: P_NP_S l'asse polare, QQ' la traccia dell'equatore, d la distanza sferica tra le due città, α l'angolo con cui un ipotetico osservatore vedrebbe l'arco d di meridiano, R il raggio della superficie terrestre e C la lunghezza del meridiano $P_N QP_SQ'$, da cui la proporzione:

$$C: 360° = d: \alpha°$$

nella quale l'unica incognita è d.

Pertanto, Posidonio ha stimato la distanza Rodi-Alessandria avvalendosi del valore noto, se pur approssimativo, della lunghezza del meridiano terrestre, determinato da precedentemente da Eratostene

OSSERVAZIONE.

Le distanze, in quell'epoca, come già detto, venivano effettuate con l'unità di misura lineare "stadio", mentre le ampiezze degli angoli venivano misurate in gradi sessagesimali come si fa ancora oggi … **Perché 360?** Si ritiene che questa suddivisione derivi dalle antiche civiltà mesopotamiche, che avevano notato che il Sole impiegava circa 360 giorni per compiere un giro completo dell'eclittica (il percorso apparente del Sole sulla sfera celeste).

NOTA.

La misura della circonferenza massima terrestre è stata una questione che ha affascinato gli scienziati di tutti i tempi. Attualmente siamo in grado, con i moderni sistemi satellitari, di determinare le dimensioni della Terra con una precisione impensabile in passato e non solo, è possibile determinare con estrema precisione la posizione di punti sulla superficie terrestre e quindi calcolare le distanze tra essi.

SULLE APPROSSIMAZIONI DELLE MISURE

I metodi utilizzati da Eratostene e Posidonio, ingegnosi per quei tempi, tuttavia affetti da errori, dovuti principalmente a:

- poca precisione degli strumenti per le misure angolari,
- sconoscenza della rifrazione atmosferica che influenza le misure angolari,
- la non disposizione sullo stesso meridiano delle coppie di citta prese in considerazione dai due studiosi.

NOTA.

Alcuni testi parlano misurando il tempo impiegato da un cammello per raggiungere le due località, altri parlano della durata della navigazione lungo il Nilo sempre tra le due località.

Riporto la carta geografica del luogo:

non conosco la proiezione con cui è stata costruita.

La distanza in linea d'aria tra le due città è 327 *NM*; calcolare la distanza tra Assuan e Alessandria seguendo il corso del Nilo è un po' complesso rispetto al calcolo della distanza in linea d'aria (calcolata più presumibilmente a giorni di cammello). Questo perché il fiume non segue una linea retta, ma si snoda attraverso il paesaggio egiziano attraversando diverse regioni.

Provo a scrivere alcune motivazioni:

- il fiume segue un percorso più lungo rispetto alla linea d'aria, aumentando la distanza totale da percorrere;
- i meandri del Nilo, creando anse e curve, allungano ulteriormente il percorso,

- lungo il corso del fiume si incontrano diverse tipologie di ostacoli, come rapide, cascate o zone con acque poco profonde, che possono influenzare la navigabilità e allungare i tempi di percorrenza.

Tenendo conto di quanto sopra, il percorso fluviale raddoppia quello in linea d'aria che può essere non molto diverso dal percorso ortodromico.

Quindi, una stima ragionevole della distanza percorrendo il Nilo potrebbe essere compresa tra 647 *NM* e 810 *NM*. (così un sito internet).

Credo quindi che Eratostene non abbia misurato quella distanza per via fluviale

Ora riporto lo stesso luogo su una carta di Mercatore costruita con DERIVE

- ASSUAN

latitudine crescente (N) e longitudine (E)

#1: $$\mathrm{LN}\left(\mathrm{TAN}\left(\left(45+\frac{24+\frac{5}{60}}{2}\right)°\right)\right)\cdot\frac{10800}{\pi} = 1489.532109$$

#2: $32.9\cdot 60 = 1974$

Cambio unità di misura nelle due precedenti coordinate in modo da vederle bene sul piano cartesiano, indicando con x la longitudine e con y la latitudine crescente

#5: $x = 1.974$

#6: $y = 1.489532109$

quindi le coordinate di Assuan sono:

#9: $[1.974,\ 1.489532109]$

- ALESSANDRIA

latitudine crescente (N) e longitudine (E)

#3: $$\mathrm{LN}\left(\mathrm{TAN}\left(\left(45+\frac{31+\frac{12}{60}}{2}\right)°\right)\right)\cdot\frac{10800}{\pi} = 1972.026778$$

#4: $29.89\cdot 60 = 1793.4$

Trasformo le due precedenti coordinate nello stesso modo come ho proceduto per le coordinate di Assuan

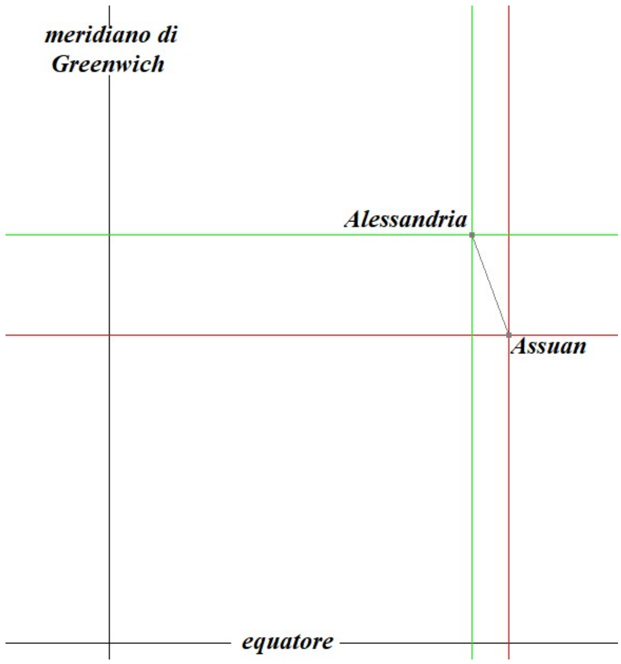
#7: $x = 1.7934$

#8: $y = 1.972026778$

quindi le coordinate di Alessandria sono:

#10: [1.7934, 1.972026778]

Riporto sul piano cartesiano i due punti #9 e #10



La differenza di longitudine è in valore assoluto di 3°2.5'che non è poco su un percorso di 327 *NM*, comunque è più presumibile il calcolo della distanza a giorni di cammello che per via fluviale.

5. PROBLEMA DEL VOLUME

Un capitano di veliero, intorno al 1800, diede al nostromo una bottiglia, a sezione circolare, chiedendogli di misurarne la capacità ovvero **il volume** interno per conoscerne quanto liquido era capace, approssimativamente, di contenere.

Il nostromo, non possedendo nessun tipo di bilancia, usò un metodo antico:

- calcolò l'area s della superficie di appoggio dopo averne misurato il diametro d;
- riempì la bottiglia di liquido fino ad un certo livello a piacere (altezza h_1), la posò su un tavolo e ne misurò il volume V_1; trattandosi di un cilindro, è: $V_1 = s \cdot h_1$ (vedi successiva figura)

- successivamente ruotò la bottiglia di 180° poggiandola sul tavolo dalla parte del tappo (ovviamente a superficie piana); misurò l'altezza dello spazio vuoto (altezza h_2); questa parte vuota della bottiglia ha volume $V_2 = s \cdot h_2$;
- il volume V della bottiglia risultò pertanto $V = V_1 + V_2 = s \cdot h_1 + s \cdot h_2 = s \cdot (h_1 + h_2)$

►Ora passiamo ai numeri.

La bottiglia aveva una sezione con diametro 10 *cm*, quindi la sezione s aveva area

$$s \approx 3.14 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 3.14 \cdot 5^2 = 3.14 \cdot 25 = 78.5cm^2 = 0.785dm^2,$$

ma lo spessore del vetro era di 3*mm* = 0.3*cm*, per cui il diametro del cilindro acqueo era 9.4 *cm*, per cui era:

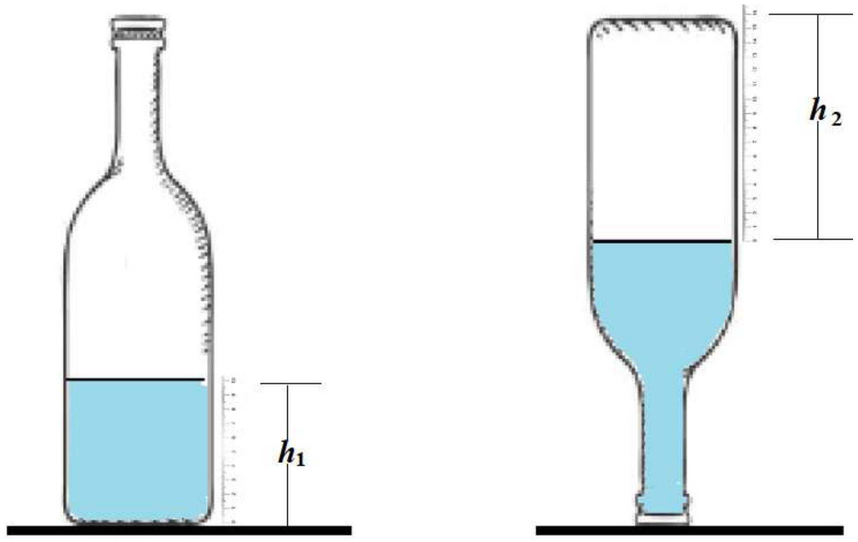
$$s' \approx 3.14 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 3.14 \cdot 4.7^2 = 3.14 \cdot 22.09 = 69.3626cm^2 \approx 0.69dm^2$$

NOTA. Il nostromo usò indubbiamente 3.14 al posto di π del quale, con tutta probabilità, non ne era neppure conoscenza; del resto il numero 3.14 (se ben ricordo) era quello che usavamo nella scuola elementare per determinare perimetro e area di un cerchio.

Il nostromo misurò h_1 = 10 *cm* e h_2 = 16 *cm* ma dovette considerare, per lo spessore del vetro, $h_1' = 9.7cm$ e $h_2' = 15.7cm$, quindi $h_1' + h_2' = 25.4cm = 2.54dm$

Pertanto la capacità della bottiglia è $V \approx 0.69 \cdot 2.54 = 1.7526dm^3 \approx 1.76 litri$.

In figura il procedimento operato dal nostromo



È bello conoscere la storia

Il metro, così come lo conosciamo oggi, ha avuto una storia evolutiva piuttosto intensa: