CONFRONTO TRA LA GEOMETRIA EUCLIDEA E SFERICA

La geometria piana è nota a tutti gli studenti. Pertanto iniziamo con la geometria sferica e successivamente le confronteremo.

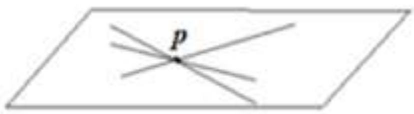
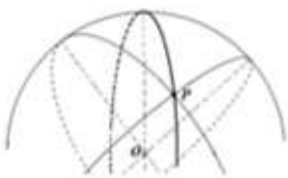
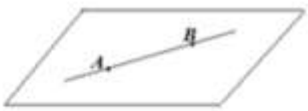
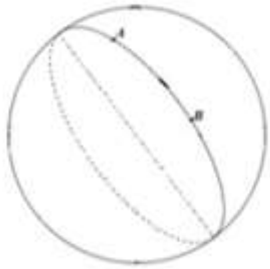
Una superficie sferica è determinata dal suo raggio: ***è l'insieme dei punti dello spazio tridimensionale equidistanti dal centro*** (è proprio questa distanza comune dal centro che si chiama **raggio**).

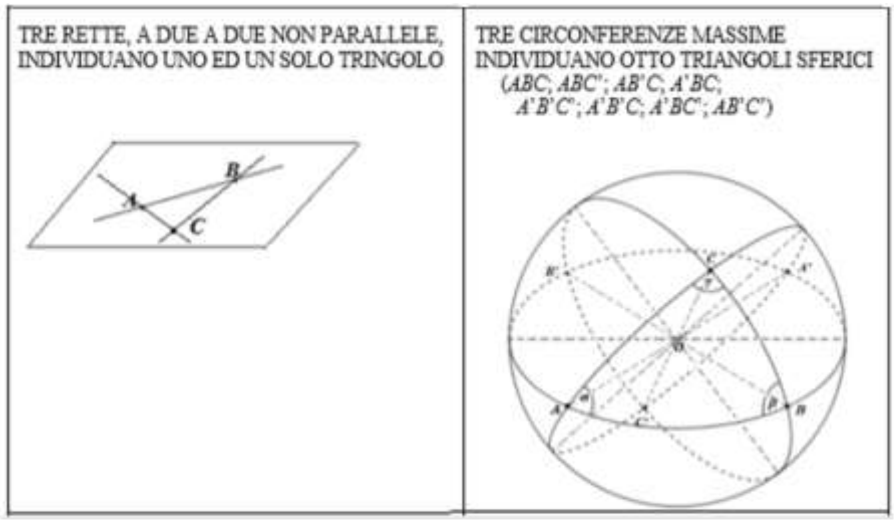
Si possono tracciare su di essa circonferenze:

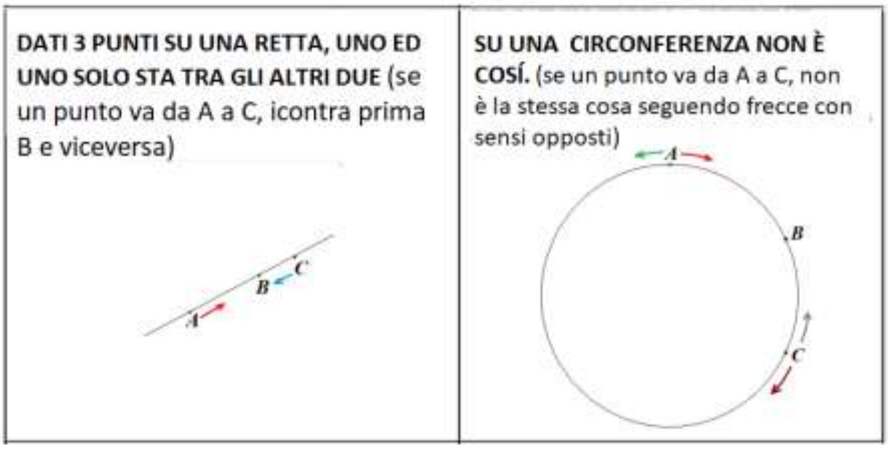
1. **minori** se il centro non coincide col centro della sfera.
2. **massime** se il centro coincide col centro della sfera (risulta chiaro che le circonferenze massime sono tutte uguali).

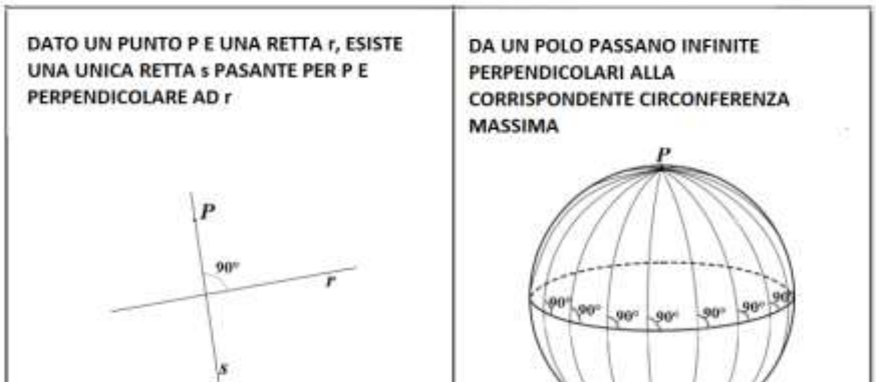
Osservazione. Le circonferenze massime, fra tutti i circoli, hanno le stesse caratteristiche delle rette sul piano; pertanto, come sul piano la distanza tra due punti è il segmento avente per estremi suddetti punti, così la distanza di due punti sulla superficie sferica è l'arco di circonferenza massima, minore di 180°, avente per estremi quei punti; la prima è detta **distanza euclidea**, la seconda **distanza sferica**.

Riportiamo analogie e diversità tra le due geometrie:

Geometria piana	Geometria sferica
PER UN PUNTO DEL PIANO PASSANO INFINITE RETTE 	PER UN PUNTO DELLA SUPERFICIE SFERICA PASSANO INFINITE CIRCONFERENZE MASSIME 
PER DUE PUNTI DEL PIANO PASSA UNA ED UNA SOLA RETTA 	PER DUE PUNTI DELLA SUPERFICIE SFERICA PASSA UNA ED UNA SOLA CIRCONFERENZA MASSIMA (tranne nel caso in cui i due punti siano diametralmente opposti: in questo caso le circonferenze sono infinite (vedi meridiani terrestri) 







Ma, attenzione perché anche in geometria sferica si può verificare ciò che si ha in geometria euclidea: “se il punto *P* non è polo della circonferenza massima *AB*”, come riportato in *fig*.1:

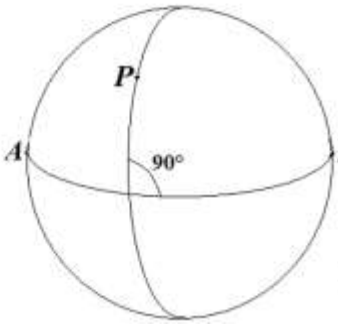


*fig.*1

la perpendicolare passante per *P* sulla circonferenza massima *AB* è unica.

►Ulteriori diversità tra le due geometrie:

- il piano euclideo è infinitamente esteso quindi ha area infinita, mentre la superficie sferica ha area finita pari a $4 \cdot \pi \cdot R^2$, dove *R* è il raggio della superficie sferica,
- le rette del piano euclideo sono infinitamente estese, mentre le circonferenze massime di una superficie sferica sono finite tutte di lunghezza $2 \cdot \pi \cdot R$.

Un'altra considerazione è che su una superficie sferica si possono tracciare circonferenze aventi raggio *r* tale che sia $0 \leq r \leq R$, dove, come già detto, *R* è il raggio della superficie sferica, contorno della sfera; nel caso di:

- *r* = 0, la circonferenza è degenere e si riduce al punto stesso,
- *r* = *R*, la circonferenza e massima; in quest'ultimo caso la circonferenza è una *geodetica* della superficie sferica ed è per questo che la distanza sferica di due punti *A* e *B* è l'arco di circonferenza massima passante per essi, minore od uguale a 180°.

Ora osserviamo bene la *fig*.2:

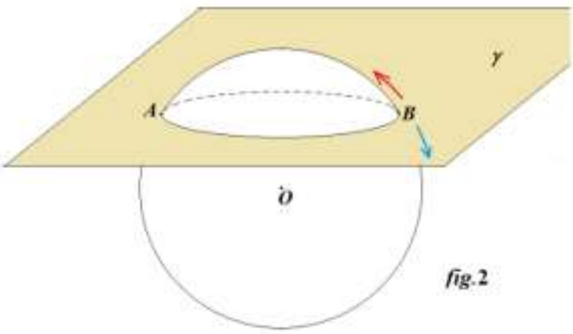


fig.2

Il piano γ interseca la superficie sferica Γ dando luogo a una circonferenza minore di diametro *AB*;

facciamo ruotare il piano γ attorno al punto *A* nella direzione del diametro *AB* della circonferenza minore:

- seguendo la rotazione indicata dalla freccia rossa, il piano γ interseca la superficie Γ in circonferenze minori con raggio in diminuzione sino a diventate nullo allor quando il piano γ risulta tangente alla superficie *G* (*B* coincidente con *A*); in questo caso la circonferenza è degenere e coincide col suo centro;

- seguendo la rotazione indicata dalla freccia verde, il piano γ interseca la superficie Γ in circonferenze minori con raggio in aumento sino a diventate massimo allor quando il piano γ passa per il centro *O* della sfera; continuando la rotazione si ricade nel caso precedente.

Nella stessa figura (fig. 3) facciamo ruotare il piano γ attorno alla retta contenente il diametro *AB*, secondo la freccia indicata:

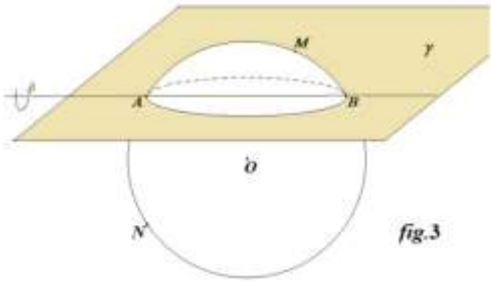


fig.3

Durante la rotazione il piano passa per il centro *O* della sfera e quindi interseca la superficie sferica nella circonferenza massima *ANBM*; l'arco *AMB* < 180° è la distanza sferica tra i punti *A* e *B*.

Ulteriore definizione di circonferenza: è una linea piana a curvatura costante il cui valore è il reciproco del raggio, ovvero $\frac{1}{r}$; la curvatura di dette linee diminuisce col tendere ad infinito del raggio. Osserviamo la *fig*.4:

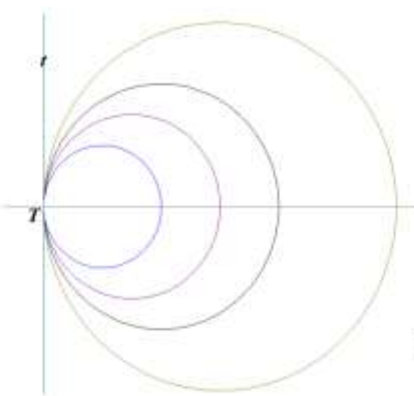


fig.4

in essa si rileva che aumentando il raggio delle circonferenze tangenti alla retta *t* nel punto *T*, le circonferenze tendono sempre più a rifilarsi sulla tangente, fino a coincidere con essa quando il raggio è infinito: caso di curva con curvatura nulla ovvero retta.

In *fig*.3. facendo ruotare il piano γ attorno ad *AB*, otteniamo una figura simile a *fig*.4, con la circonferenza di raggio massimo coincidente con la circonferenza massima *ANBM* della *fig*.3, che in *fig*.5 (piano euclideo) è segnata in colore rosso

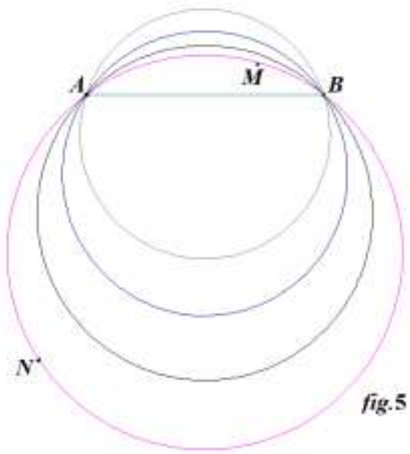


fig.5

La circonferenza di colore rosso è la copia della circonferenza massima sulla superficie sferica, quella tra tutte le circonferenze che si possono tracciare di minima curvatura e quindi l'equivalente di una retta sul piano, ovvero trattasi di una geodetica, come prima detto. L'arco *AB*, contenente il punto *B*, su questa circonferenza massima è la distanza sferica del punto *A* dal punto *B*, pertanto tra tutti i possibili cammini per andare da uno dei due punti all'altro, questo è il minimo.

Altre considerazioni:

- In *fig*.6 sono rappresentate due situazioni assimilabili; a sinistra, sul piano euclideo, un fascio di rette perpendicolari alla retta *r* che non si incontrano mai, infatti sono tutte tra loro parallele; a destra, sulla superficie sferica, un fascio di circonferenze, passanti per due punti *P* e *P'* antipodali, tutte perpendicolari alla circonferenza massima *HH'*, ma che non risultano assolutamente parallele tra loro, infatti sulla superficie sferica non esistono circonferenze massime (rette) tra loro parallele.

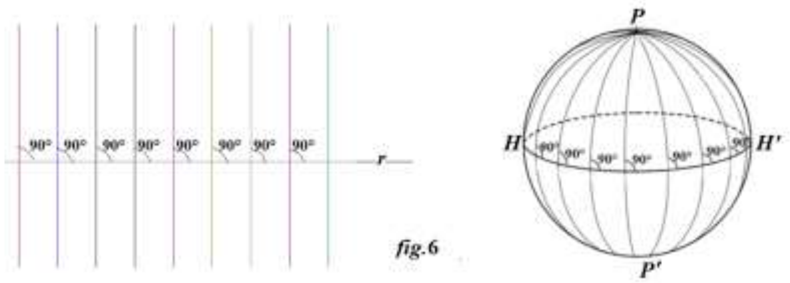


fig.6

- Confrontiamo la *fig*.3 con la *fig*.5:
  - in *fig*.3 il circolo *ANBM* è una circonferenza massima della superficie sferica *Γ*, pertanto (in quell'ambiente) non ha curvatura e si può chiamare "*retta*" dal significato "*corro- dritto*";
  - in *fig*.5 sono riportate sul piano euclideo, alcune delle varie circonferenze ottenute dall'intersezione del piano γ, che ruota attorno alla retta *AB*, con la superficie *Γ*; in questa circostanza la circonferenza *ANBM* (che forse sarebbe stato meglio scriverla *AN'BM'*), giacendo sul piano euclideo, ha curvatura pari al reciproco del raggio della superficie sferica.
- Confronto tra la somma degli angoli interni di un triangolo:

- in geometria euclidea è noto che tale somma è pari all'angolo piatto, in gradi sessagesimali è 180°;
- ricordiamo che in geometria sferica i lati di un triangolo sono archi di circonferenza massima; la somma degli angoli interni di tali triangoli è maggiore dell'angolo piatto ed in gradi sessagesimali, detti α, β, γ gli angoli, è $\alpha+\beta+\gamma=180°+\varepsilon$ in cui ε è detto eccesso sferico che è inversamente proporzionale al quadrato del raggio R della sfera. Allora, se due triangoli sferici, appartenenti rispettivamente a superfici sferiche di diverso raggio, sono simili, il triangolo giacente sulla superficie sferica di raggio maggiore ha eccesso sferico minore dell'altro triangolo. Possiamo dire che l'eccesso sferico di un triangolo sferico diminuisce man mano che il raggio della superficie sferica, a cui appartiene, aumenta. Solo se il triangolo è degenere (vertici appartenenti tutti ad una circonferenza massima) allora la somma è 180°, infatti due angoli sono nulli ed uno ha ampiezza 180°.

NOTA. In internet entra in "Simone Scuola" per leggere il mio trattato sulla trigonometria sferica.