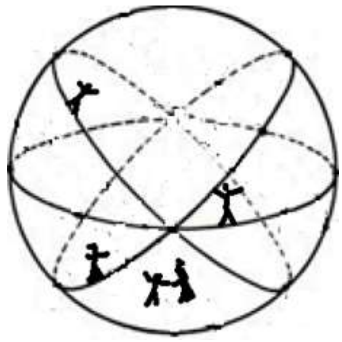
GEOMETRIA E NAVIGAZIONE

Generalmente in geometria si parla di “spazio”: spazio a una, due, tre, quattro, cinque, … dimensioni (nella consueta geometria della scuola media ci fermiamo al numero tre). Forse il termine spazio (andando a vedere i suoi sinonimi) non è il più appropriato, anche se lo usiamo senza porci domande. Che dire se usassimo il termine “ambiente”? Tra i suoi sinonimi vi è il termine “habitat” che potrebbe suonare benissimo. A questo punto porto ad esempio un mondo immaginato di **Jules Henri Poincaré** (Nancy 1854 – Parigi 1912); in una delle sue opere, rappresenta un curioso mondo sferico sulla cui superficie abitano esseri sprovvisti di altezza, ovvero come estesi sulla superficie sferica, assumendone la sua sfericità ed impediti assolutamente di allontanarsene. Ed ecco il modello:



In queste ipotesi, lo spazio, pardon l’ambiente, in cui vivono questi strani esseri è certamente bidimensionale, anche se la sfera è in un ambiente tridimensionale Ma, allora che cosa è una retta per questi strani abitanti? È certamente un circolo massimo perché solo ivi si può percorrere la strada più corta tra due punti di esso (ovviamente estremi di un arco $\leq 180°$); la geometria di queste creature è certamente e solamente quella sferica.

Nasce pertanto la necessità di una nuova entità che vado a definire.

ORTODROMIA. Gli antichi greci avevano chiaro il concetto di distanza sferica tanto che l’arco di circolo massimo, minore di 180°, l’hanno chiamato **ortodromia** che proviene dall’accostamento delle due parole ***ortos - dromia*** che significano rispettivamente ***diritto – corsa***, avendo ben chiaro il fatto che la circonferenza massima su di una superficie sferica è l’equivalente della retta sul piano, con la differenza che:

1. sul piano si dice distanza tra due punti la misura del segmento avente per estremi i due punti; essa si chiama **distanza euclidea**; si può definire anche come la parte di retta che passa per quei due punti e compresa tra gli stessi; la definizione finisce qui perché dal punto di vista euclideo le parti rimanenti di quella retta sono due semirette che corrono all’infinito in sensi opposti. La cosa certa è che tra le infinite strade, sul piano, che si possono percorrere da uno dei due punti per raggiungere l’altro, il segmento è la strada più corta e quindi è la **distanza** (unica) tra quei due punti;

2. sulla superficie sferica le cose cambiano un poco, infatti un circolo massimo è una curva chiusa e pertanto due suoi punti lo dividono in due archi di misura generalmente diversa (a meno che i due punti non siano diametralmente opposti); è proprio l’arco di misura minore tra i due ad essere la **distanza sferica** (su quella stabilita superficie sferica), che viene appunto chiamata **ortodromia**. Se i due punti sono diametralmente opposti, i due archi sono uguali e quindi entrambi sono la distanza sferica tra quei due punti (in questo caso c’è l’alternativa di percorrenza: trattasi di un caso limite).

Torno agli **abitanti** del mondo di Poincaré:

la superficie sferica, e solo quella, è il loro unico ambiente dove si svolgono tutti gli avvenimenti che li coinvolgono; trattasi comunque di uno "*spazio infinto limitato*", in quanto.

- la superficie sferica è certamente limitata,
- la superficie sferica può essere percorsa indefinitamente, sempre nello stesso senso, ripassando infinite volte dal punto di partenza.

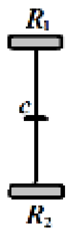
Osservazione. Nel disegno della geometria sferica di Poincaré ho rappresentato solo circoli massimi, ma su questa superficie, teoricamente, si può tracciare una infinità di curve.

La motivazione del perché la distanza sul piano sia la lunghezza di un segmento e su una superficie sferica sia un arco (minore od uguale a 180°) di circolo massimo è che, tra tutte le curve che si possono tracciare nei due ambienti:

- sul piano la retta ha curvatura minima (in particolare: nulla)
- su qualunque superficie sferica è la circonferenza massima ad avere curvatura minima.

Recentemente è stato rifatto l'asfalto della strada provinciale che collega Recco con Camogli ed ho osservato il carrello che tracciava la riga di mezzeria della strada; questo fatto mi ha fatto balenare un'idea per provare con grafici quanto prima detto.

Schematizzo il carrello il cui centro dell'asse sia c (erogatore tinta), dotato di due ruote simmetriche rispetto a c, R_1 e R_2 libere tra loro di ruotare



►Sul piano mentre il centro c percorre una retta (colore rosso), le due ruote percorrono tratti di segmenti tra loro uguali (colore azzurro); se invece c percorre un tratto di curva, per esempio un tratto di circonferenza, la ruota R_1 percorre un tratto (colore rosso) più lungo del tratto (colore azzurro) percorso dalla ruota R_2.

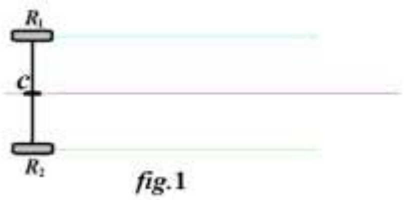


*fig.*1

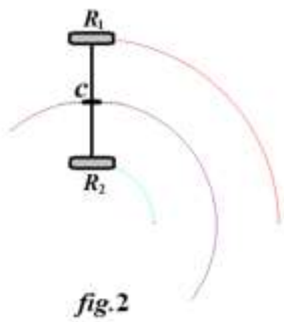
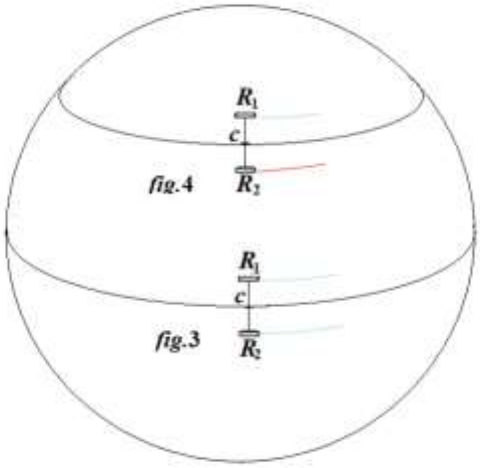


*fig.*2

►Sulla superficie sferica avviene una cosa analoga.

La *fig*.3 corrisponde alla *fig*.1, infatti mentre il punto *c* percorre il circolo massimo, le due ruote percorrono archi di parallelo tra loro uguali, avendo i due paralleli la stessa distanza angolare, in direzioni opposte, dal circolo massimo.



La *fig*.4 corrisponde alla *fig*.2, infatti mentre il punto *c* percorre un parallelo, le due ruote percorrono archi diversi: la ruota R_1 percorre il tratto di colore azzurro, minore del tratto di colore rosso percorso dalla ruota R_2. Infatti la ruota R_1 si muove su un parallelo avente raggio minore del parallelo di *c*, al contrario è per ruota R_2.

Nei casi delle fig.1 e fig.3 si può dire che una persona che percorre rispettivamente un tratto di retta o un tratto di circonferenza massima dirà che sta andando "*dritto*".

Nel caso della superficie sferica viene confermata la dicitura degli antichi greci:

"ortos – dromia" = ***"diritto – corsa"***,

infatti chi percorre un tratto di circolo massimo di una superficie sferica, nel suo intimo, non avverte nessuna curvatura.

►Ed ecco un conseguente **problema di navigazione**

Tre navi *A*, *B*, *C* partono simultaneamente dallo stesso meridiano, con rotta *E* (W) mantenendosi sempre sullo stesso meridiano mobile.

Le latitudini delle tre navi sono:

- $\varphi_A = 65°$,
- $\varphi_B = 60°$,
- $\varphi_C = 55°$.

tutte con lo stesso nome.

Sapendo che la navigazione delle tre navi termina dopo una variazione di longitudine $\Delta\lambda = 10°$ e che la nave *B* ha velocità $v_B = 20 nodi$, determinare:

- i cammini delle tre navi,
- le velocità delle navi *A* e *C*.

SOLUZIONE

- Nave *B*:

$$m_B = 600' \cdot \cos 60° = 300 mg$$

Determino l'intervallo di tempo di navigazione:

$$\Delta t = \frac{m_B}{v_B} = \frac{300mg}{20\dfrac{mg}{h}} = 15^h \ . \qquad (1)$$

- Nave *A*:

$$m_A = 600' \cdot \cos 65° \cong 253.57 mg$$

dalla (1), è:

$$v_A = \frac{m_A}{\Delta t} \cong \frac{253.57mg}{15^h} \cong 16.9\frac{mg}{h} = 16.9 nodi$$

- Nave *C*:

$$m_C = 600' \cdot \cos 55° \cong 344.15 mg$$

$$v_C = \frac{m_C}{\Delta t} \cong \frac{344.15mg}{15^h} \cong 22.9\frac{mg}{h} = 22.9 nodi \ .$$

OSSERVAZIONE.

La costante che lega le tre navi è proprio l'intervallo di tempo di navigazione Δt, uguale per tutte le te navi *A*, *B*,*C*.

■ Ora facciamo la prova e troviamo il meridiano mobile dopo 10 ore di navigazione.

Nave *B*:

$$m'_B = 20\frac{mg}{h} \cdot 10^h = 200mg \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda_{B_1} = \frac{m'_B}{\cos\varphi_B} = 400' = 6°40'$$

Nave *A*:

$$m'_A = 16.9\frac{mg}{h} \cdot 10^h = 169mg \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda_{A_1} = \frac{m'_A}{\cos\varphi_A} = \frac{169mg}{\cos 65°} \cong 400' = 6°40'$$

ovvero stanno anche qui istantaneamente sullo stesso meridiano.

E così è per la nave *C*.

►Confrontando questo problema con quello del carrello traccia riga di mezzeria della strada, in riferimento alla *fig*.4, si ha:

- la nave *B* corrisponde all'erogatore di tinta *c*;
- la nave *A* corrisponde alla ruota R_1,

- la nave C corrisponde alla ruota R_2.