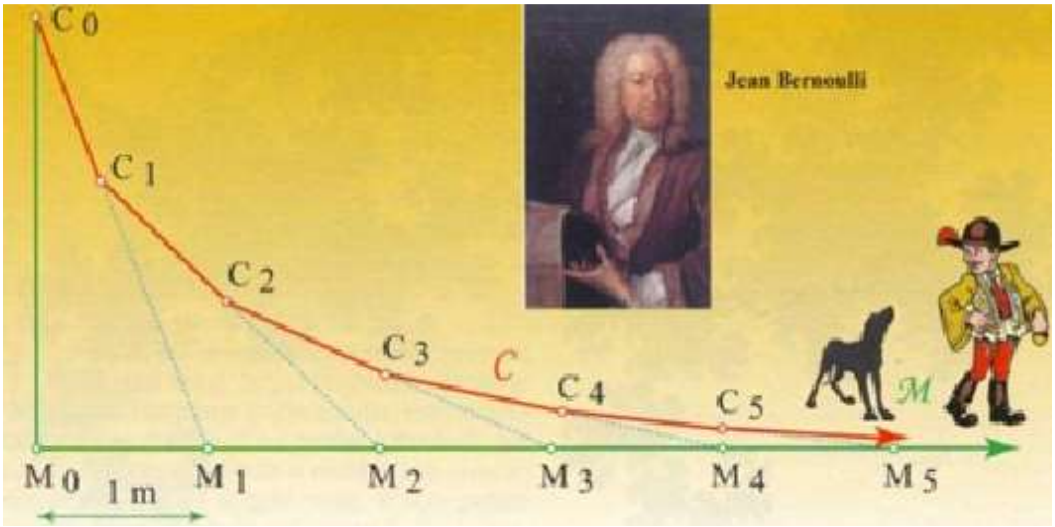
LA CURVA DEL CANE

Si racconta che il matematico svizzero Bernoulli Giacomo I (nato a Basilea nel 1654 e ivi morto nel 1705), il più illustre in una famiglia di matematici (due fratelli, tre nipoti figli di fratelli e due figli di un nipote: avevano proprio la matematica nel DNA), camminando su una collinetta fu richiamato dall'abbaiare di un cane che correva dietro al proprio padrone.
Il matematico rilevò che, mentre l'uomo avanzava con andatura regolare percorrendo una traiettoria rettilinea, il cane, un po' a sinistra del padrone e ad una certa distanza da esso, avanzava modificando la propria traiettoria in modo che ciascuno dei suoi passi lo dirigesse verso l'estremità dell'ultimo passo del suo padrone.
Il bellissimo disegno, preso da un sito INTERNET, rappresenta graficamente il precedente scritto.



M_i, con i = 0, 1, 2, 3, …, rappresentano le successive posizioni dell'uomo, ad intervalli costanti, così che, per l'ipotesi fatta, è M_iM_{i+1} = costante; C_i, con i = 0, 1, 2, 3, …, rappresentano le successive posizioni del cane corrispondenti agli istanti delle posizioni, prima citate, dell'uomo, ovvero:

i) il cane è in C_0 quando l'uomo è in M_0
il cane è in C_1 quando l'uomo è in M_1
il cane è in C_2 quando l'uomo è in M_2

in generale
il cane è in C_i quando l'uomo è in M_i

Successivamente il matematico tedesco Leibniz Goffredo (nato a Lipsia nel 1646 e morto a Hannover nel 1716) dimostrò una proprietà di questa curva: *per ogni tangente alla curva, rimane costante il segmento compreso tra il punto P di tangenza ed il punto di intersezione della tangente stessa con una retta r prestabilita*.

CURIOSITA'. Leibniz fu un esempio di genio poliedrico; trattò, con elevata maestria, vari argomenti di matematica, logica, filosofia, diritto, letteratura e, anche, di diplomazia (riguardo a quest'ultima disciplina era molto richiesto da capi di diversi stati in qualità di consulente)
Il matematico tedesco Gauss Carlo (1777-1855), considerato uno dei principi della matematica unitamente ad Archimede di Siracusa (287 a.C.212 a.C.) e a Newton Isacco (1642-1727), ebbe a dire: *purtroppo Leibniz disperse le sue energie intellettive in svariate questioni, tanto da non riservarle nella ricerca matematica in cui avrebbe potuto apportare ulteriori grandi contributi*.

► Scrivo una equazione differenziale che esprima analiticamente la curva considerata, in cui *m* è un parametro positivo:

$$\frac{\vartheta x}{\vartheta y}=\frac{\sqrt{m^2-y^2}}{y}, \qquad (1)$$

da cui, è:

$$x=\int\frac{\sqrt{m^2-y^2}}{y}dy \quad ; \qquad (2)$$

integro:

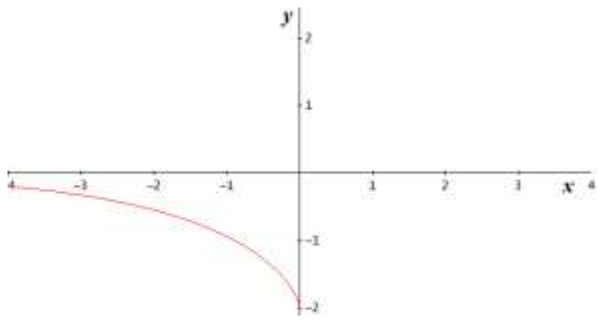
$$x=m\cdot\ln\left(\sqrt{m^2-y^2}-m\right)-m\cdot\ln y+\sqrt{m^2-y^2}\ . \qquad (3)$$

.

Assegno, nella (3), un valore numerico a piacere al parametro *m*, per esempio 2; allo scopo uso la

$$x=2\cdot\ln\left(\sqrt{2^2-y^2}-2\right)-2\cdot\ln y+\sqrt{2^2-y^2} \qquad (4)$$

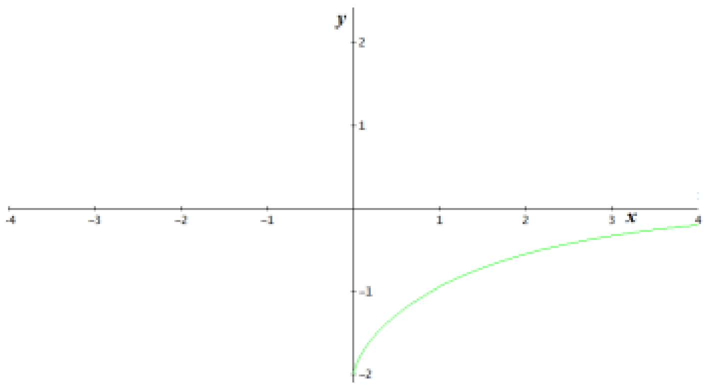
il cui grafico è:



■ Determinare il grafico della curva simmetrica, di quella ottenuta, rispetto all'asse y, scambiando il segno dell'espressione (4):

$$x=-\left(2\cdot\ln\left(\sqrt{2^2-y^2-2}\right)-2\cdot\ln y+\sqrt{2^2-y^2}\right) \qquad (5)$$

il cui grafico è

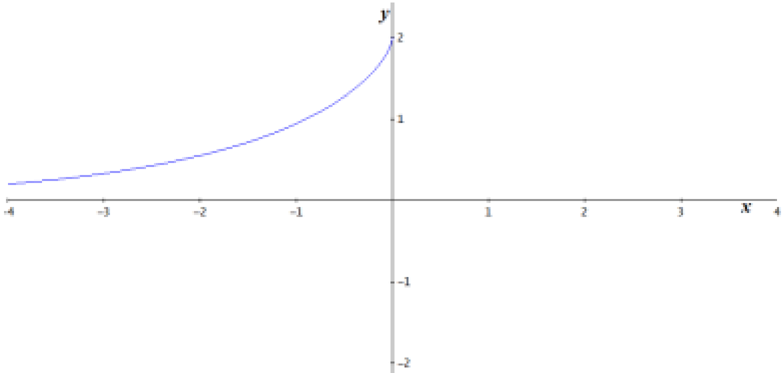


■ Determino anche le equazioni delle curve simmetriche alle precedenti, rispetto all'asse x, scambiando y con $-y$.

- per l'espressione (4) è:

$$x = 2 \cdot \ln\left(\sqrt{2^2 - (-y)^2} - 2\right) - 2 \cdot \ln(-y) + \sqrt{2^2 - (-y)^2} \qquad (6)$$

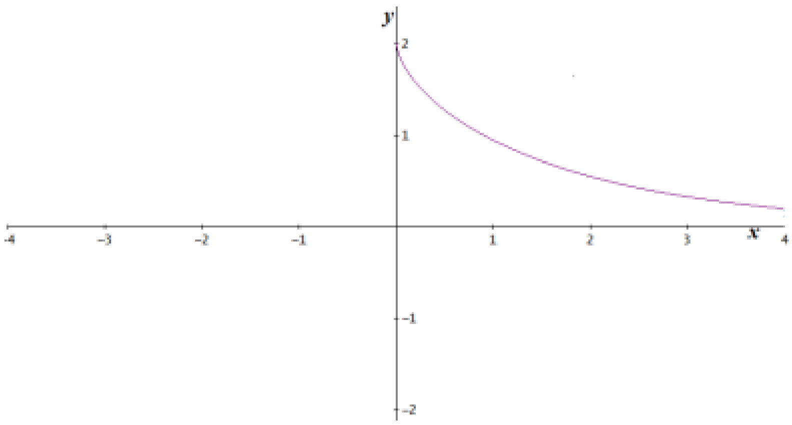
il cui grafico è



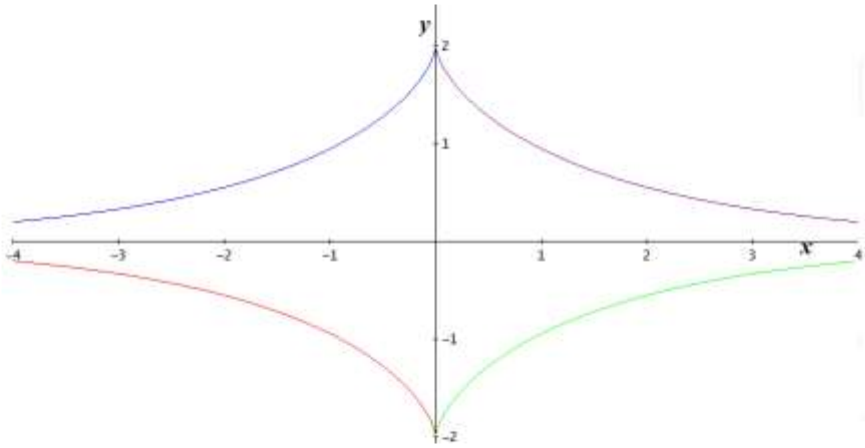
- per l'espressione (5), è:

$$x = -\left(2 \cdot \ln\left(\sqrt{2^2 - (-y)^2 - 2}\right) - 2 \cdot \ln(-y) + \sqrt{2^2 - (-y)^2}\right) \qquad (7)$$

il cui grafico è



Riporto tutte le quattro curve in un umico piano cartesiano



▶ Ora mi riferisco all'equazione della (7), la cui curva è quella riportata in quasi tutte le pubblicazioni; determino la sua pendenza mediante la sua derivata prima:

$$\frac{d}{dy}\left(-\left(2\cdot\ln\left(\sqrt{2^2-(-y)^2}-2\right)-2\cdot\ln(-y)+\sqrt{2^2-(-y)^2}\right)\right)=-\frac{\sqrt{4-y^2}}{y} \qquad (8)$$

faccio rilevare che ho lavorato su una funzione del tipo $x = f(y)$ e quindi, se voglio trasformarla in una equazione del tipo $y = g(x)$, la pendenza di quest'ultima è il reciproco del secondo membro della (8)

$$\frac{1}{-\frac{\sqrt{4-y^2}}{y}}=-\frac{y}{\sqrt{4-y^2}} \qquad (9)$$

Considero il punto corrente *P* di coordinate (α, β). Scrivo l'ascissa α in funzione di β, sostituendo β alla *y* nella (7)

$$\alpha=-\left(2\cdot\ln\left(\sqrt{2^2-(-\beta)^2}-2\right)-2\cdot\ln(-\beta)+\sqrt{2^2-(-\beta)^2}\right) \qquad (10)$$

pertante le coordinate del punto corrente P sono

$$P\left[-\left(2\cdot\ln\left(\sqrt{2^2-(-\beta)^2}-2\right)-2\cdot\ln(-\beta)+\sqrt{2^2-(-\beta)^2}\right);\beta\right] \qquad (11)$$

la pendenza *m* della curva nel punto corrente, dalla (9), è

$$m=-\frac{\beta}{\sqrt{4-\beta^2}} \qquad (12)$$

quindi l'equazione della generica retta tangente alla curva (retta, di nota pendenza, passante per un punto) è

$$y-\beta=\left(-\frac{\beta}{\sqrt{4-\beta^2}}\right)\cdot\left(x-\left(-\left(2\cdot\ln\left(\sqrt{2^2-(-\beta)^2}-2\right)-2\cdot\ln(-\beta)+\sqrt{2^2-(-\beta)^2}\right)\right)\right) \qquad (13)$$

ovvero

$$y-\beta=-\frac{2\cdot\beta\cdot\ln\left(\sqrt{4-\beta^2}-2\right)}{\sqrt{4-\beta^2}}+\frac{2\cdot\beta\cdot\ln(-\beta)}{\sqrt{4-\beta^2}}-\frac{\beta\cdot\left(\sqrt{4-\beta^2}+x\right)}{\sqrt{4-\beta^2}} \qquad (14)$$

Interseco la retta di equazione (14) con l'asse delle ascisse (indico con Q questo punto):

$$y-\beta=-\frac{2\cdot\beta\cdot\ln\left(\sqrt{4-\beta^2}-2\right)}{\sqrt{4-\beta^2}}+\frac{2\cdot\beta\cdot\ln(-\beta)}{\sqrt{4-\beta^2}}-\frac{\beta\cdot\left(\sqrt{4-\beta^2}+x\right)}{\sqrt{4-\beta^2}}\wedge y=0$$

la cui soluzione è:

$$x=2\cdot\ln(-\beta)-2\cdot\ln\left(\sqrt{4-\beta^2}-2\right)\wedge y=0$$

pertanto il punto Q cercato ha coordinate:

$$Q\left[2\cdot\ln(-\beta)-2\cdot\ln\left(\sqrt{4-\beta^2}-2\right);0\right]$$

In virtù del teorema di Pitagora determino $(PQ)^2$

$$\overline{PQ}^2=\left[2\cdot\ln(-\beta)-2\cdot\ln\left(\sqrt{4-\beta^2}-2\right)-\left(-\left(2\cdot\ln\left(\sqrt{2^2-(-\beta)^2-2}\right)-2\cdot\ln(-\beta)+\sqrt{2^2-(-\beta)^2}\right)\right)\right]^2+(0-\beta)^2$$

il cui risultato è 4.

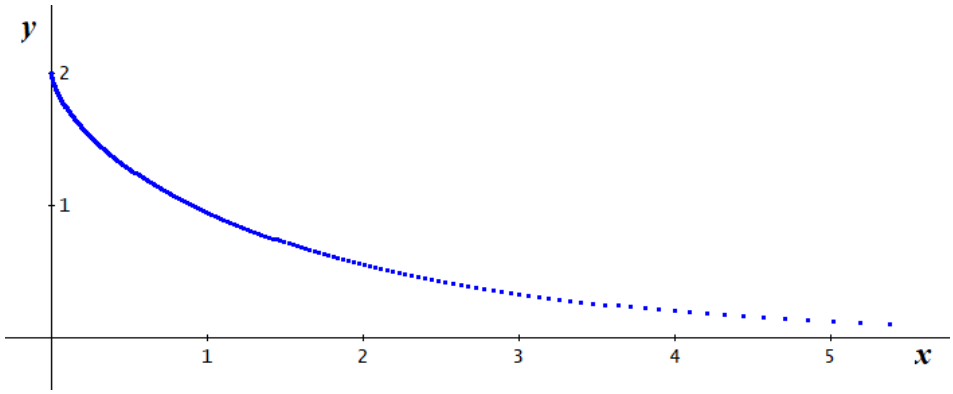
Ma, 4 è il quadrato di PQ e quindi è PQ =2; questa è un'altra proprietà della curva: *il segmento di tangente compreso tra il punto di tangenza ed il punto di intersezione con l'asse delle ascisse ha misura uguale al parametro m*, infatti ad *m* avevo assegnato proprio il valore 2.

◘ Mediante il software DERIVE.6, determino l'andamento della curva per **punti** e per **tangenti**.

A) Per **punti**, ho:

```
#21:  VECTOR([ - (2·LN(√(2^2 - (-β)^2) - 2) - 2·LN(-β) + √(2^2 - (-β)^2)), β], β, 0.2, 2, 0.01)
```

l'esecuzione porge la matrice contenente le coordinate dei punti richiesti che, per questione di spazio, non riporto; invece ne riporto il grafico:



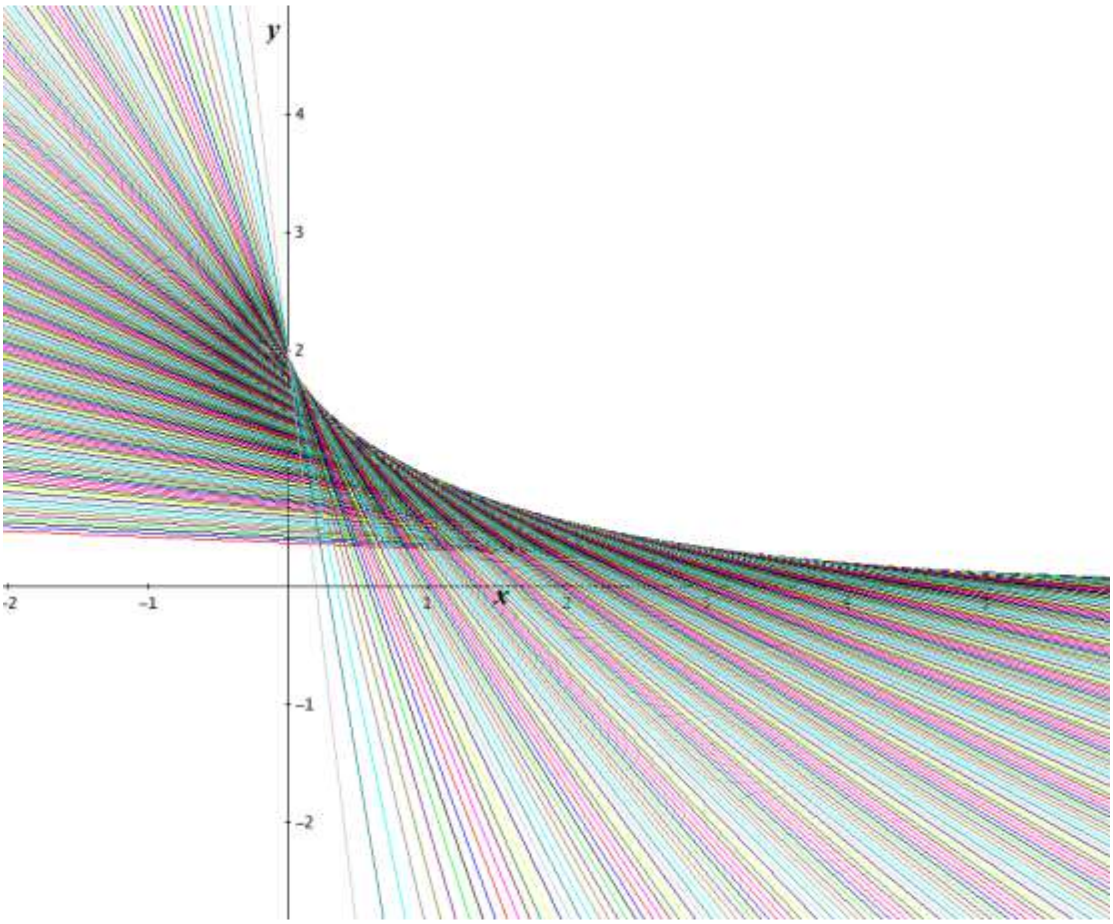
B) Per **tangenti** devo prima risolvere l'equazione riportata nella riga (14), rispetto alla variabile y

$$y = -\frac{2\cdot\beta\cdot LN(\sqrt{(4-\beta^2)}-2)}{\sqrt{(4-\beta^2)}} + \frac{2\cdot\beta\cdot LN(-\beta)}{\sqrt{(4-\beta^2)}} - \frac{\beta\cdot x}{\sqrt{(4-\beta^2)}}$$

Ancora mediante la specifica VECTOR

$$\#24:\quad VECTOR\left(-\frac{2\cdot\beta\cdot LN(\sqrt{(4-\beta^2)}-2)}{\sqrt{(4-\beta^2)}} + \frac{2\cdot\beta\cdot LN(-\beta)}{\sqrt{(4-\beta^2)}} - \frac{\beta\cdot x}{\sqrt{(4-\beta^2)}},\ \beta,\ 0.2,\ 2,\ 0.01\right)$$

l'esecuzione porge il vettore contenente le equazioni delle tangenti richieste che non riporto. Passo dalla pagina algebra alla pagina grafica:



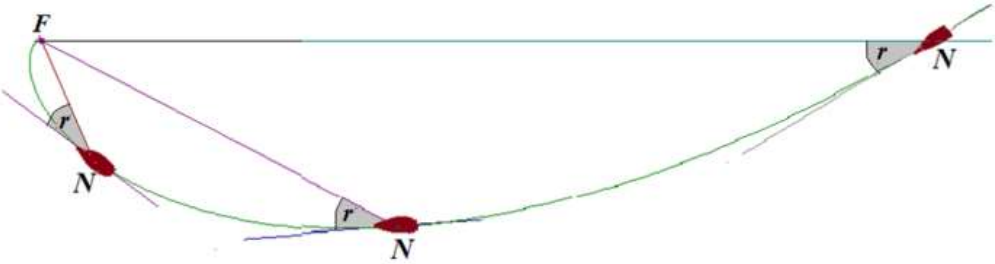
Che spettacolo questo grafico!

L’input a scrivere questo file risale agli anni 1965-1980 quando insegnavo manovra navale all’Istituto Nautico di Camogli.
E, proprio in questa disciplina entra la curva del cane.

Vedi nella mia pagina nella quale si entra col seguente indirizzo

[Prof. C. Mortola – Capitani Camogli]

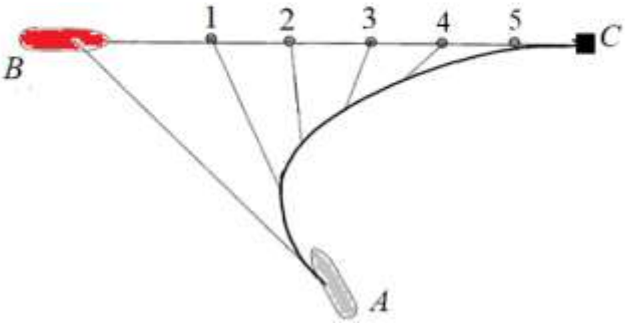
e, dopo avere aperto la pagina, selezionare “Navigare verso un faro”



Oltre alla figura che ho riportato, leggere tutto il file.

OSSERVAZIONE.
La “*curva del cane*” è anche detta “*curva di inseguimento*”.

Nella seguente figura è riportata una nave *A* che naviga dirigendo la prua costantemente sul bersaglio *B*, in moto, con rotta da *B* verso *C*:



la nave *A* pertanto descrive una curva che è proprio quella del cane; la nave *A*, seguendo questa curva giungerà il bersaglio *B*, posizionandosi dietro alla sua poppa. In figura sono riportati, con i numeri 1; 2; 3; 4; 5 alcuni punti istantanei di inseguimento.

NOTE.

1) se la velocità dell'inseguitore è maggiore di quella dell'inseguito, consegue che la curva incontra la retta su cui si sposta l'inseguito.

2) se la velocità dell'inseguitore è uguale o inferiore a quella dell’inseguito cosegue che i due non si incontreranno mai e la retta diventa un asintoto della curva.