PROBLEMA (*sul paradosso di Zenone*)

Alle $10^h\ 00^m$ un'imbarcazione a vela *N* si trova a 10 *mg* a sud di un punto *P*.

La zona di mare è soggetta ad un vento costante da nord. L'imbarcazione intende raggiungere *P* bordeggiando nel settore compreso tra i rilevamenti 330° e 30° di *P* (presi dal mare).

L'imbarcazione compie un tragitto a zig-zag accostando via via che incontra i predetti rilevamenti.

La velocità dell'imbarcazione è *v* = 8 nodi e le rotte sono alternativamente di 045° e 315°.

DETERMINARE

1. L'istante in cui l'imbarcazione raggiunge *P*.
2. L'istante del suo secondo incontro in cui è $Ril_V = 330°$.

La spezzata *NAC......* teoricamente non passa da *P* che quindi tale punto non è raggiungibile.

In pratica la componente della velocità sulla retta *NP* è costante e quindi l'intervallo di tempo per raggiungere *P* è un numero finito, cioè *P*, alla fine, è raggiungibile.

SOLUZIONE

1. La componente v_1 della velocità *v* = 8 *nodi* sulla retta *NP* è sempre costante

$$v_1 = v \cdot \cos 45° \cong 5.66\, nodi$$

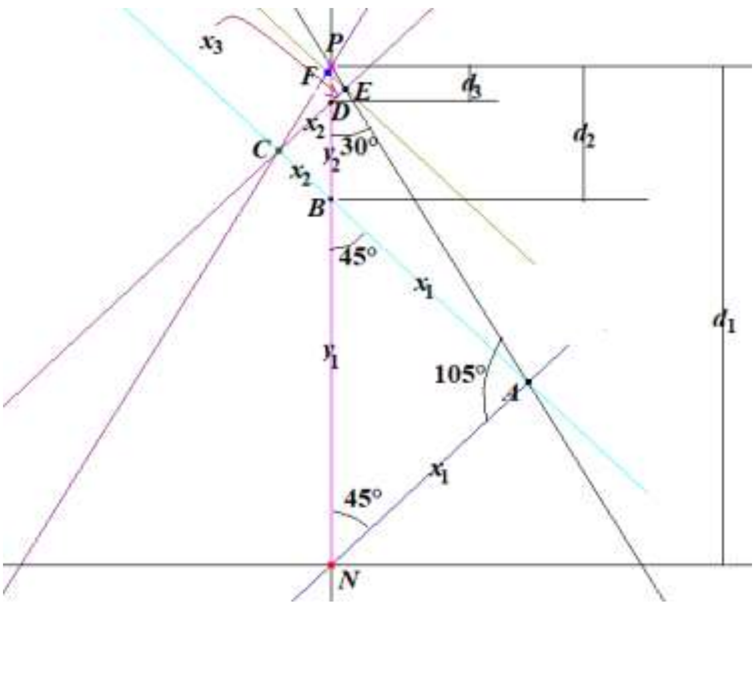
per cui l'intervallo di tempo Δt per raggiungere il punto *P*, è:

$$\Delta t = \frac{d_1}{v_1} \cong \frac{10}{5.66} \cong 1.766784452^h \cong 01^h 46^m .$$

L'istante dell'arrivo nel punto *P* è:

$$10^h 00^m + 01^h 46^m = 11^h 46^m$$

La situazione grafica è la seguente:



2. Dal teorema dei seni applicato al triangolo *APN*, abbiamo:

$$x_1 = \frac{d_1 \cdot \sin 30°}{\sin 105°} = \frac{10 \cdot \sin 30°}{\sin 105°} \cong 5.18mg\ .$$

Il triangolo *NAB* è un semi-quadrato, quindi

$$y_1 = x_1 \cdot \sqrt{2} \cong 7.32mg\ ,$$

quindi

$$d_2 = d_1 - y_1 \cong (10 - 7.32)mg = 2.68mg$$

Il triangolo *BCD* è simile al triangolo *APN* quindi usiamo la stessa procedura precedente:

$$x_2 = \frac{d_2 \cdot \sin 30°}{\sin 105°} = \frac{2.68 \cdot \sin 30°}{\sin 105°} \cong 1.39mg$$

$$y_2 = x_2 \cdot \sqrt{2} \cong 1.96mg$$

$$d_3 = d_2 - y_2 \cong (2.68 - 1.96)mg = 0.72mg$$

Analogamente per il triangolo *DEF*:

$$x_3 = \frac{d_3 \cdot \sin 30°}{\sin 105°} = \frac{0.72 \cdot \sin 30°}{\sin 105°} \cong 0.37mg$$

Il cammino percorso bordeggiando sino al punto *E*, è:

$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 2 \cdot 5.18 + 2 \cdot 1.39 + 0.37 = 13.51mg \qquad (1)$$

L'intervallo di tempo Δt per giungere in *E*, è:

$$\Delta t = \frac{13.51}{8} \cong 1.68875^h \cong 1^h 41^m$$

ed allora, l'istante di arrivo nel punto *E*, è:

$$t_E = 10^h + 1^h 41^m = 11^h 41^m$$

Equazione del lato sinistro dell'angolo entro cui avviene il bordeggio

$$y = 10 + \tan 60° \cdot x \qquad (2)$$

Equazione del lato destro

$$y = 10 + \tan 120° \cdot x \qquad (3)$$

Equazione retta *NA*:

$$y = \tan 45° \cdot x \qquad (4)$$

Calcolo l'ascissa punto A uguagliando i secondi membri delle equazioni (4) e (3):

$$\tan 45° \cdot x = 10 + \tan 120° \cdot x$$

$$1 \cdot x = 10 - \sqrt{3} \cdot x$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3} + 1} = 5 \cdot \sqrt{3} - 5$$

sostituisco nella (4)

$$y = 1 \cdot \left(5 \cdot \sqrt{3-5}\right) = 5 \cdot \sqrt{3} - 5$$

Da ora in poi lavoro con valori approssimati alla seconda cifra decimale, ed ecco allora le coordinate del punto *A*:

$$A(3.66;3.66)$$

Le coordinate del punto *N* sono:

$$N(0;0)$$

Equazione della retta *AC*:

$$y = 3.66 + \tan 135° \cdot (x - 3.66) \qquad (5)$$

Ascissa del punto *C*: uguaglio i secondi membri delle equazioni (2) e (5)

$$10 + \tan 60° \cdot x = 3.66 + \tan 135° \cdot (x - 3.66)$$

la cui soluzione è:

$$x = -0.98$$

sostituiamo nella (2)

$$y = 10 + \tan 60° \cdot (-0.98) = 8.30$$

ed ecco le coordinate del punto *C*

$$C(-0.98;8.30)$$

Equazione retta *CD*

$$y = 8.30 + \tan 45° \cdot (x + 0.98) \qquad (6)$$

uguagliamo i secondi membri delle equazioni (6) e (3)

$$8.30 + \tan 45° \cdot (x + 0.98) = 10 + \tan 120° \cdot x$$

la cui soluzione è

$$x = 0.26$$

sostituiamo nell'equazione (6)

$$y = 8.30 + \tan 45° \cdot (0.26 + 0.98) = 9.54$$

pertanto le coordinate del punto *E* sono

$$E(0.26;9.54)$$

Scrivo l'espressione generale della distanza euclidea di due punti di coordinate (α, β) e (γ, δ)

$$\sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2} \qquad (7)$$

► applico la (7) al tratto *NA*

$$\sqrt{(0 - 3.66)^2 + (0 - 3.66)^2} = 5.18$$

► applico la (26) al tratto *AC*

$$\sqrt{(3.66+0.98)^2+(3.66-8.30)^2}=6.56$$

► applico la (26) al tratto *CE*

$$\sqrt{(-0.98-0.26)^2+(8.30-9.54)^2}=1.75$$

Pertanto il tragitto della spezzata *NACE*, è:

$$5.18+6.56+1.75=13.49$$

OSSERVAZIONE.
13.49 *mg* si discosta, per le diverse approssimazioni applicate nei due metodi, dalle 13.51*mg* [vedi (1)] calcolate per via trigonometrica.

■ Con questo metodo possiamo continuare all'infinito; consideriamo l'ulteriore tratto del bordeggio:

D'ora in poi approssimo i valori numerici alla seconda cifra decimale

Equazione *EF*

$$y=9.54+\tan 135°\cdot(x-0.26) \qquad (8)$$

intersezione retta (8) con (2)

$$9.54+\tan 135°\cdot(x-0.26)=10+1.73\cdot x$$

la cui soluzione è

$$x=-0.07 \wedge y=9.88$$

coordinate di F:

$$F(-0.07;9.88)$$

distanza *EF*

$$\sqrt{(0.26+0.07)^2+(9.54-9.88)^2}=0.47$$

● Osserviamo questi primi quattro tratti del bordeggio:

►i primi due tratti del bordeggio con direzione 45° sono *NA* e *CE* rispettivamente di lunghezza

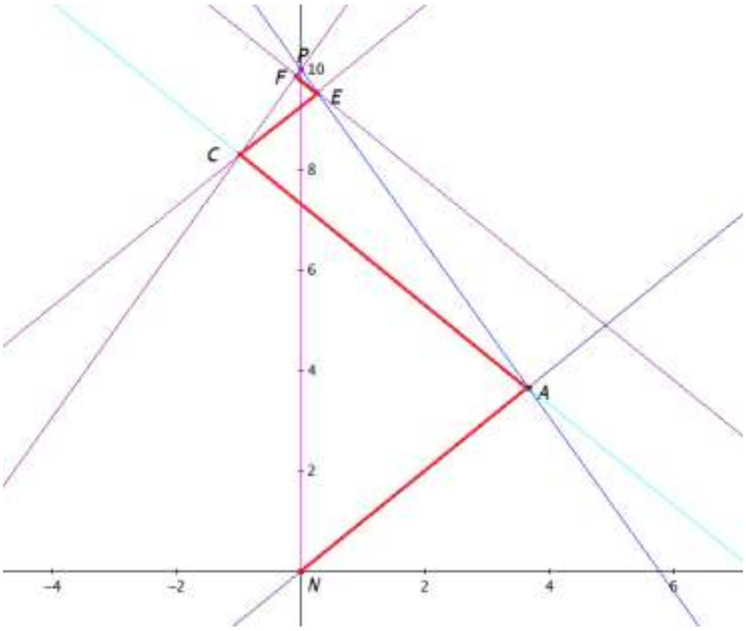
5.18 *mg* e 1.76 *mg*

► i primi due tratti con direzione 135° sono *AC* e *EF*, rispettivamente di lunghezza

6.56 *mg* e 0.47 *mg*

Ed ecco il **paradosso di Zenone** (*): il limite della somma degli infiniti tratti di inclinazione 45° è finita così come lo è il limite della somma degli infiniti tratti di inclinazione 135°; pertanto il limite

della somma di tutti i tratti del bordeggio è finita, così che l'imbarcazione raggiunge il punto *P* in un tempo finito.
Riporto il grafico



(*) Zenone di Elea (489 a.C.– 431 a.C.) è stato un filosofo greco della Magna Grecia. Aristotele (384 a.C. – 322 a.C.) lo definì inventore della dialettica.

Zenone è ricordato soprattutto per i suoi paradossi che Bertrand Russel (1872–1970) definì come «*smisuratamente sottili e profondi*».

I paradossi relativi al moto di Zenone sono 4; quello che riguarda il nostro problema va sotto il nome di "*paradosso della dicotomia*" enunciato come di seguito: "*Se esiste il movimento*, *è necessario che il mobile percorra infiniti tratti in un tempo finito*; *ma ciò è impossibile*, *quindi il movimento non esiste*". Cerchiamo di spigarlo in altre parole: dividendo in sempre nuove metà una distanza data da percorrere, tale processo di divisione non può mai esaurirsi e quindi viene negata la possibilità che un mobile possa percorrere completamente quella distanza.