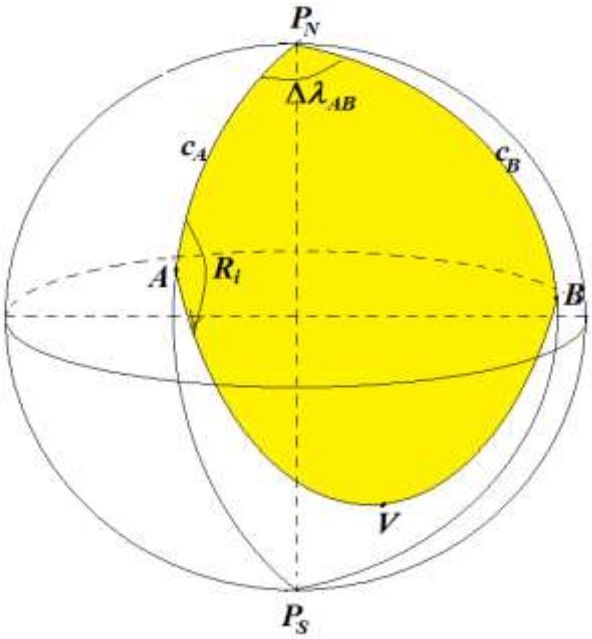
IL TRATTO DI "CIRCOLO MASSIMO" DI MASSIMA LUNGHEZZA PERCORRIBILE DA UNA NAVE SENZA INCONTRARE TERRE EMERSE. (questione proposta dal Prof. Manlio Milazzo)

Trattasi dell'arco ortodromico compreso tra il punto $A(\varphi = 22°N, \lambda = 60°E)$, a sud del golfo di Aden nell'Oceano Indiano, ed il punto $B(\varphi = 15°N, \lambda = 95°W)$ della costa occidentale del Messico nell'Oceano Pacifico.

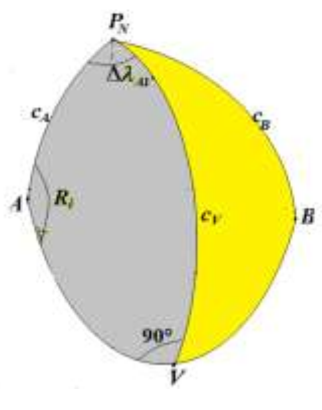
Per semplicità considero *A* il punto di partenza; è uso che il polo del triangolo ortodromico sia quello omonimo al nome della latitudine del punto di partenza, allora è

$$c_A = 90° - 22° = 68°; \quad c_B = 90° - 15° = 75°; \quad \Delta\lambda_{AB} = -95° - (+60°) = -155° = 205°E$$

Più o meno la figura potrebbe essere la seguente, anche se non rispetta le proporzioni



da cui il triangolo ortodromico, diviso in due parti dal meridiano del vertice:



CAMMINO ORTODROMICO (distanza sferica *AB*)

$$\cos m_O = \cos c_A \cdot \cos c_B + \sin c_A \cdot \sin c_B \cdot \cos \Delta\lambda_{AB}$$

$$\cos m_O = \cos 68° \cdot \cos 75° + \sin 68° \cdot \sin 75° \cdot \cos 205°$$

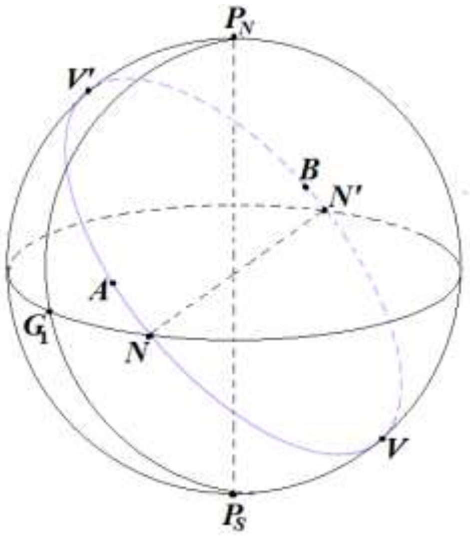
$$\cos m_O = -0.714725623$$

$$m_O = 135°37'14{,}5'' = 8137.241667' = 8137.241667\ mg$$

OSSERVAZIONE. Il valore m_O calcolato è la distanza sferica tra i due punti *A* e *B*, ovvero è l'arco di ortodromia *AB* corrispondente ad una variazione di longitudine pari a 155°<180°; ma questa ortodromia non è percorribile da nessuna nave perché dovrebbe attraversare terre emerse.

Pertanto la lunghezza di circolo massimo percorribile da una nave, per navigare dal punto *A* fino al punto *B*, è pari all'arco corrispondente alla variazione di longitudine esplementare (due angoli o archi si dicono esplementari o replementari quando la somma delle loro ampiezze è 360°) a 155°, ovvero di 205°.

La seguente figura riporta quanto detto:



in essa è:

$P_N G_1 P_S$ è il meridiano di Greenwich, $AV'B$ è l'arco di ortodromia non percorribile da una nave, mentre è percorribile da una nave il percorso $ANVN'B$; considerato che la lunghezza di un circolo massimo è 21600 *mg*, essendo l'arco ortodromico $AV'B$ di lunghezza 8137.2 *mg*, il percorso possibile per circolo massimo (per navigare dal punto *A* al punto *B*) è $(21600 - 8137.2)mg = 13462.8mg$ … questa problematica non sarebbe nata in navigazione aerea; un aereo avrebbe percorso il tratto di circolo massimo corrispondente alla variazione di longitudine di 155° e quindi avrebbe percorso l'ortodromia *AB* pari a 8137.2 *mg*.

ROTTA INIZIALE

$$\cot c_B \cdot \sin c_A = \cos c_A \cdot \cos \Delta\lambda_{AB} + \sin \Delta\lambda_{AB} \cdot \cot R_i$$

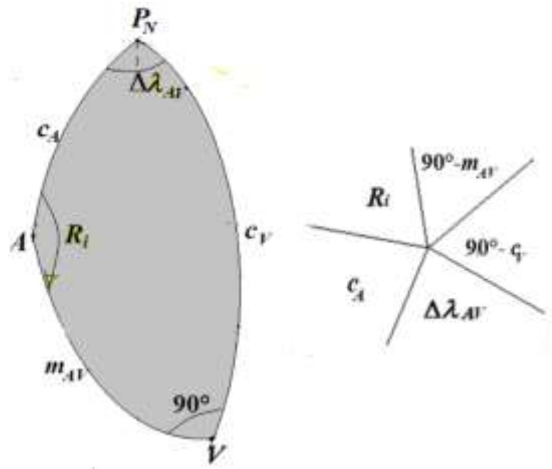
$$\cot R_i = \frac{\cot c_B \cdot \sin c_A - \cos c_A \cdot \cos \Delta\lambda_{AB}}{\sin \Delta\lambda_{AB}}$$

$$\cot R_i = \frac{\cot 75° \cdot \sin 68° - \cos 68° \cdot \cos(-155°)}{\sin(-155°)}$$

$$\cot R_i = -1.391201212$$

$$R_i = -35°42'31.34'' = N144°17'28.6''\ E.$$

posso calcolare le coordinate del vertice V utilizzando il seguente triangolo sferico



Calcolo la longitudine del vertice V:

$$\cos c_A = \cot \Delta\lambda_{AV} \cdot \cot R_i \quad \Rightarrow \quad \cot \Delta\lambda_{AV} = \cos c_A \cdot \tan R_i \quad \Rightarrow \quad \cot \Delta\lambda_{AV} = -0.269268626$$

$$\cot^{-1} \Delta\lambda_{AV} = \tan \Delta\lambda_{AV} = -3.713763511 \Rightarrow \Delta\lambda_{AV} = 105°04'13.84''E$$

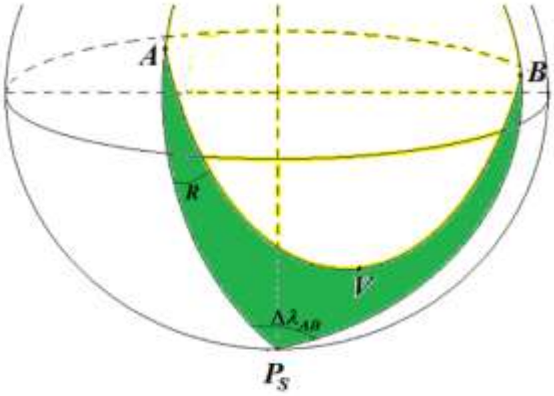
$$\lambda_V = \lambda_A + \Delta\lambda_{AV} = 165°04'13.84''E$$

Calcolo la latitudine del vertice V:

$$\cos(90° - c_V) = \sin c_A \cdot \sin R_i \qquad \Rightarrow \qquad \cos(90° - c_V) = \cos\varphi_V = 0.541164606$$

$$\varphi_V = \quad 57°\ 14'\ 13.37''S.$$

►Stessi risultati col triangolo AP_SB che assieme al triangolo sferico AP_NB forma un fuso



$c_A = 90° + 22° = 112°$ $\quad c_B = 90° + 15° = 105°$ $\quad \Delta\lambda_{AB} = -95° - (+60°) = -155° = 205° E$

Cammino ortodromico:

$$\cos m_O = \cos c_A \cdot \cos c_B + \sin c_A \cdot \sin c_B \cdot \cos \Delta\lambda_{AB}$$

$$\cos m_O = -0.714725623$$

$$m_O = 135°37'14{,}5'' = 8137.241667' = 8137.241667\ mg$$

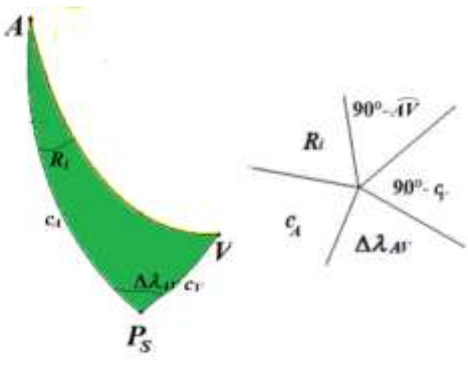
Stessa **OSSERVAZIONE** di pag. 2.

Rotta iniziale R_i'

$$\cot R_i' = \frac{\cot c_B \cdot \sin c_A - \cos c_A \cdot \cos \Delta\lambda_{AB}}{\sin \Delta\lambda_{AB}} = 1.391201212 \ \Rightarrow\ R_i' = S\ 35°42'31.34''E$$

OSSERVAZIONE. $R_i + R_i' = 180°$.

Dal triangolo sferico rettangolo



- calcolo la variazione di longitudine tra il punto *A* ed il vertice *V*

$$\cos c_A = \cot \Delta\lambda_{AV} \cdot \cot R_i \ \Rightarrow\ \cot \Delta\lambda_{AV} = \cos c_A \cdot \tan R_i \ \Rightarrow$$

$$\cot \Delta\lambda_{AV} = \cos 112° \cdot \tan 35°42'31.4'' = -\ 0.269268626$$

$$\Delta\lambda_{AV} = 105°04'13.84'' E$$

- calcolo la latitudine del vertice *V*

$$\cos(90° - c_V) = \sin c_A \cdot \sin R_i$$

$$\cos(90° - c_V) = \sin 112° \cdot \sin 35°42'31.4''$$

$$\cos(90° - c_V) = 0.541164606$$

$$\varphi_V = 57°14'13.37''S$$

Allargo la figura per poter vedere meglio i due nodi

Dall'equazione dell'ortodromia

$$\cos(\lambda_v - \lambda) = \frac{\tan\varphi}{\tan\varphi_V},$$

nella quale sono note le coordinate di uno dei vertici di quella ortodromia e $(\varphi;\lambda)$ sono le coordinate del punto corrente.

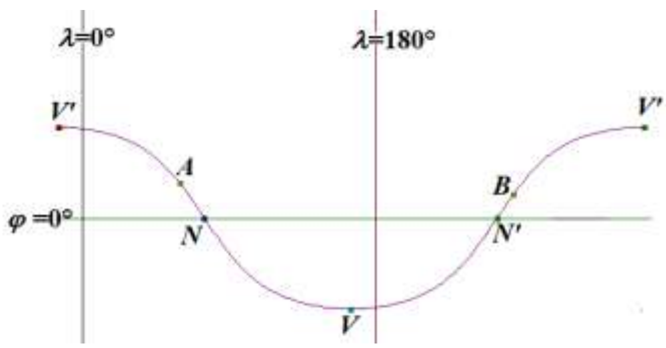
Scrivo l'equazione dell'ortodromia di vertice $V(\varphi_V = 57°14'13{,}37S; \lambda_V = 165°04'13.84''E)$, trasformando prima gli angoli da gradi sessagesimali in radianti

1. 57°14'13.37''= 0.998974928 radianti
2. 165°04'13.84''= 2.881023917 radianti

Ma, attenzione perché anche le coordinate del punto corrente devono essere espresse in radianti e quindi le indico con $(\varphi^{(r)};\lambda^{(r)})$

$$\cos(2.881023917 - \lambda^{(r)}) = \frac{\tan\varphi^{(r)}}{\tan(-0.998974928)}$$

il cui grafico è:

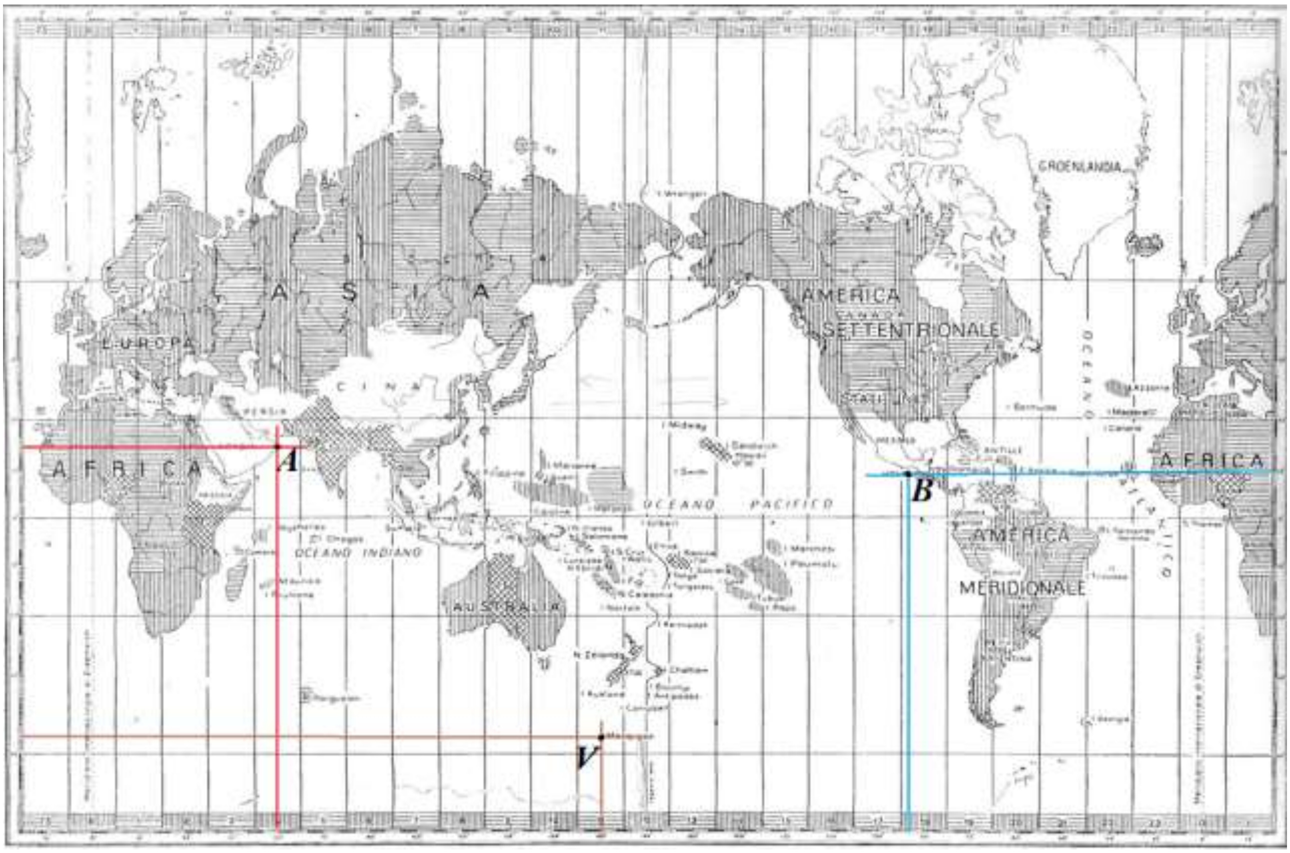


nel quale sono riportati anche i nodi che, essendo i nodi sull'equatore, l'equazione diventa

$$\cos(\lambda_v - \lambda_N) = 0$$

quindi le longitudini dei nodi differiscono di 90° dalle longitudini dei vertici.

Ed ecco sulla carta di Mercatore la posizione dei punti *A*, *B*, *V*:



NOTA.

ORTODROMIA. Gli antichi greci avevano chiaro il concetto di distanza sferica tanto che l'arco di circolo massimo, minore di 180°, l'hanno chiamato **ortodromia** che proviene dall'accostamento delle due parole *ορτοσ – δρομια* che significano rispettivamente *diritto – corsa*, avendo ben chiaro il fatto che la circonferenza massima su di una superficie sferica è l'equivalente della retta sul piano, con la differenza che:

1. sul piano si dice distanza tra due punti la misura del segmento avente per estremi i due punti; essa si chiama distanza euclidea; si può definire anche come la parte di retta che passa per quei due punti e compresa tra gli stessi; la definizione finisce qui perché dal punto di vista euclideo le parti rimanenti di quella retta sono due semirette che corrono all'infinito in sensi opposti. La cosa certa è che tra le infinite strade, sul piano, che si possono percorrere da uno dei due punti per raggiungere l'altro, il segmento è la strada più corta e quindi è la distanza (unica) tra quei due punti;

2. sulla superficie sferica le cose cambiano un poco, infatti un circolo massimo è una curva chiusa e pertanto due suoi punti la dividono in due archi di misura generalmente diversa (a meno che i due punti non siano diametralmente opposti); è proprio l'arco di misura minore tra i due ad essere la distanza sferica (su quella stabilita superficie sferica), che viene appunto chiamata **ortodromia**. Se i due punti sono diametralmente opposti, i due archi sono uguali e quindi entrambi sono la distanza sferica tra quei due punti (in questo caso c'è l'alternativa di percorrenza: trattasi di un caso limite).