

INTRODUZIONE ALLA TRIGONOMETRIA (di mortola carlo)

► Quanto segue non vuole essere una trattazione di trigonometria (per questa demandiamo il lettore ad un buon libro di testo per la scuola media superiore), bensì una introduzione corredata da cenni storici.

► Per una qualunque figura geometrica esiste il numero minimo di suoi elementi atti ad individuarla **unicamente**.

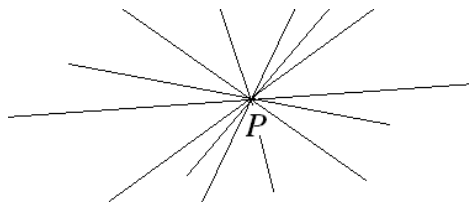
Ad esempio:

- una retta è individuata in maniera **unica** da due punti (è uno dei postulati della geometria euclidea);
- una circonferenza è individuata in maniera **unica** da tre punti non allineati;
- un triangolo è individuato in maniera **unica** da:
 1. due lati e dall'angolo tra essi compreso,
 2. da un lato e due angoli,
 3. dai tre lati.

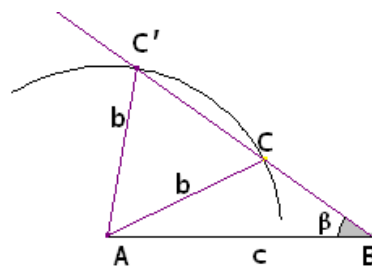
Definizione. Se alcuni noti elementi geometrici individuano n figure geometriche, allora si dice che la generica figura individuata, è individuata in n **modalità**.

Esempi:

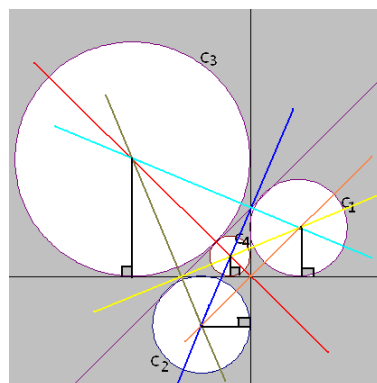
- un punto individua **infinite** rette ($n = \infty$)



- i triangoli individuati sono **due** ($n = 2$) se gli elementi noti sono due lati e l'angolo opposto al minore di essi



- tre tangenti (a due a due non parallele) individuano **quattro** circonferenze ($n = 4$).



OSSERVAZIONE. Ricordo che i problemi geometrici che si possono costruire per via grafica mediante l'uso degli strumenti da disegno (riga, compasso, squadra, goniometro, ...), possono essere anche risolti per via analitica; allo scopo propongo il seguente problema di geometria analitica che il lettore potrà svolgere e del quale ne porgo i risultati:

Determinare l'equazione della circonferenza tangente agli assi cartesiani ed alla retta di equazione $y = x + 2\sqrt{2}$.

Lo svolgimento conduce al seguente risultato: le circonferenze sono quattro (quattro modalità):

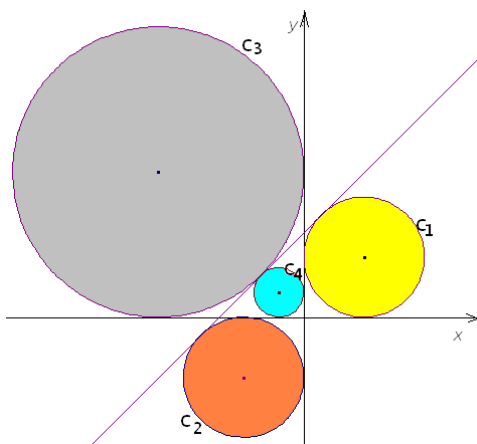
$$C_1: \quad x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

$$C_2: \quad x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$$

$$C_3: \quad x^2 + y^2 + (4\sqrt{2} - 4)x + (4 - 4\sqrt{2})y - 8\sqrt{2} + 12 = 0$$

$$C_4: \quad x^2 + y^2 + (4\sqrt{2} + 4)x - (4 + 4\sqrt{2})y + 8\sqrt{2} + 12 = 0$$

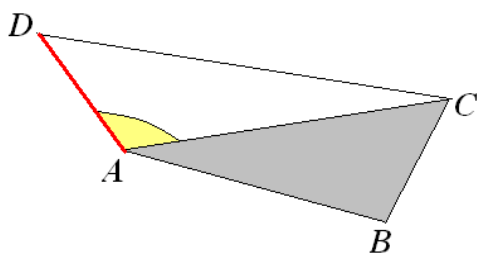
Il cui grafico è



► Gli **elementi geometrici** che formano un poligono sono, come è noto, **lati ed angoli**; il procedimento della costruzione di un poligono conoscendo n dei suoi elementi non esaurisce il problema della determinazione degli elementi incogniti. E' proprio la trigonometria che consente di calcolare le misure degli elementi non noti. Vediamo quanti elementi indipendenti bisogna conoscere per individuare, in modo unico, un poligono di n lati; allo scopo, partiamo dal triangolo (poligono di minor numero di elementi); per esso, come abbiamo visto, è indispensabile la conoscenza di 3 elementi, di cui uno almeno deve essere un lato.

Se, sul piano del triangolo, vogliamo posizionare univocamente un quarto punto, (esterno al triangolo) necessitano per esso 2 elementi.

In figura, noto il triangolo ABC , il punto D può essere posizionato univocamente, ad esempio, dalla conoscenza del lato AD e dall'angolo $\hat{C}AD$, così che possono conoscersi tutti gli 8 elementi del quadrilatero $ABCD$

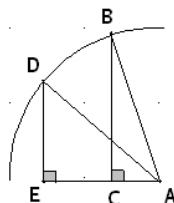


Nella terza colonna della seguente tabella, viene riportato il numero minimo di elementi atti ad individuare unicamente un poligono piano:

POLIGONI	NUMERO ELEMENTI	MINIMO NUMERO ELEMENTI PER L'UNICITA'
triangolo	$6 = 2 \cdot 3$	$3 = 2 \cdot 3 - 3$
quadrilatero	$8 = 2 \cdot 4$	$3 + 2 = 5 = 2 \cdot 4 - 3$
pentagono	$10 = 2 \cdot 5$	$5 + 2 = 7 = 2 \cdot 5 - 3$
esagono	$12 = 2 \cdot 6$	$7 + 2 = 9 = 2 \cdot 6 - 3$
.....
dodecagono	$24 = 2 \cdot 12$	$19 + 2 = 21 = 2 \cdot 12 - 3$
.....
poligono di n lati	$2 \cdot n$	----- $= 2 \cdot n - 3$

► A questo punto introduciamo le *funzioni degli angoli*.

Stabilito che in un triangolo il rapporto tra i lati è determinato dagli angoli, consideriamo la peculiarità del triangolo rettangolo, per cui, mediante uno dei suoi angoli acuti si calcola il rapporto tra due dei suoi lati; prendiamo, ad esempio, i due triangoli rettangoli in figura, con ipotenuse uguali ($AB = AD$), e, per ciascuno di essi consideriamo il cateto opposto all'angolo acuto in A .



Notiamo che se l'angolo acuto diminuisce, diminuisce anche il rapporto del cateto con l'ipotenusa, cioè

$$\frac{ED}{AD} < \frac{CB}{AB}$$

Pertanto, in ogni triangolo rettangolo, il rapporto di un cateto con l'ipotenusa è una particolare *funzione* dell'angolo opposto a quel cateto; essa viene chiamata *seno dell'angolo*.

In formule, riguardo alla precedente figura, è:

$$\sin \widehat{EAD} = \frac{ED}{AD} \quad , \quad \sin \widehat{EAB} = \frac{CB}{AD} .$$

La parola seno è la traduzione in latino di un termine tecnico usato dagli astronomi arabi al tempo di Al-Battani (850-929 d.c.) detto, e ricordato, col nome di Albatenio.

La scuola di Albatenio studia le funzioni circolari ed apporta significativi miglioramenti alla trigonometria, allora conosciuta, dei greci e degli indiani, proponendo formule in cui si evidenzia la conoscenza delle funzioni *seno* e *coseno*.

E' da attribuirsi a Platone Tiburtino (Plato Tiburtinus di Tivoli del XII secolo) la prima pubblicazione dove è riportata la parola *seno*; infatti, oltre ad essere matematico ed astronomo, era anche traduttore. Egli tradusse (dall'arabo in latino) un'opera astronomica di Albatenio, che fu pubblicata successivamente, nel 1537, a Norimberga, nella quale, per la prima volta appunto, compariva la parola seno.

OSSERVAZIONE. In quell'epoca la lingua usata dagli scienziati in Europa era il latino, per cui quest'ultima era la lingua scientifica internazionale e quindi chiunque poteva leggere e studiare libri scientifici di qualunque regione.

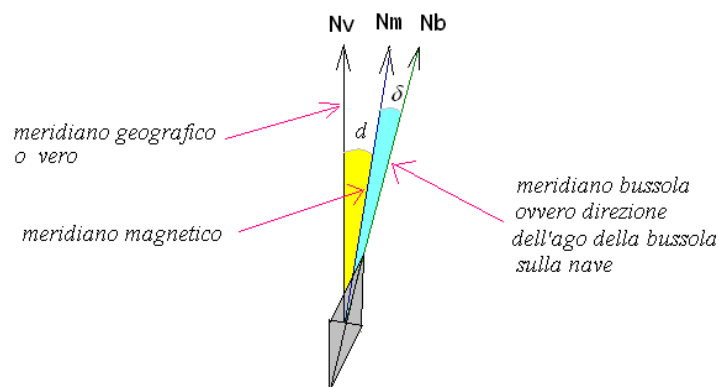
Un'altra funzione angolare è il *coseno* definito come il complemento del seno, cioè:

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

E' da notare come in quasi tutti i programmi informatici l'abbreviazione della parola *seno* è *sin* e del *coseno* è *cos*; ciò è da attribuirsi al fatto che in latino il *seno* era detto *sinus* e che il coseno era detto *complementi sinus*, abbreviato in *cosinus* da Edmund Gunter (1581-1626), matematico ed astronomo inglese che per primo introdusse i termini coseno e cotangente e compilò le prime tavole dei logaritmi delle funzioni goniometriche a sette decimali.

Nota. Gunter diede anche un forte contributo anche alla navigazione perché scoprì la variazione della declinazione magnetica, così che le carte nautiche riportavano la declinazione magnetica (espressa in gradi sessagesimali) con la variazione annua che consentiva ai naviganti l'uso della stessa carta per alcuni anni (diciamo al massimo 10).

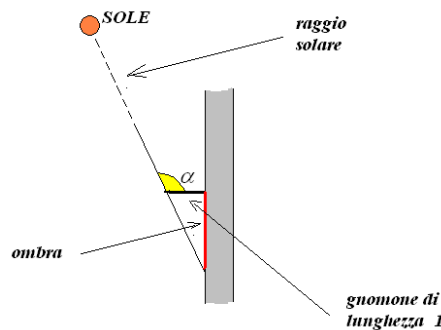
Ricordo che la **declinazione magnetica** è l'angolo, misurato sul piano orizzontale tra la direzione dell'ago magnetico (*meridiano magnetico*) e la direzione del *meridiano vero o geografico* del luogo. Il suo valore varia da luogo a luogo e varia nel tempo in quanto il Nord Magnetico e il Nord Geografico non mantengono distanza costante.



In figura la direzione del Nb è quella segnata dall'ago della bussola magnetica, direzione che non coincide con quella del Nm a causa della deviazione magnetica.

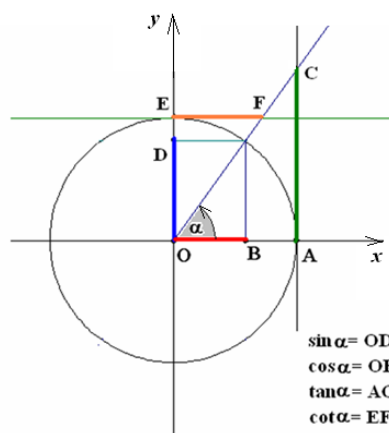
Il termine *tangente* viene usato per primo dal matematico danese **Thomas Fincke** nel 1583; questo termine è collegato alla scienza degli orologi solari (scienza gnomonica) e, nello specifico, la tangente

è l'ombra che un gnomone, di lunghezza 1, infisso verticalmente su un muro, investito dai raggi solari, proietta sul muro stesso.



Analogamente per la cotangente: è l'ombra che un gnomone unitario, infisso verticalmente sul piano orizzontale, produce sul piano stesso, quando è investito dai raggi del Sole.

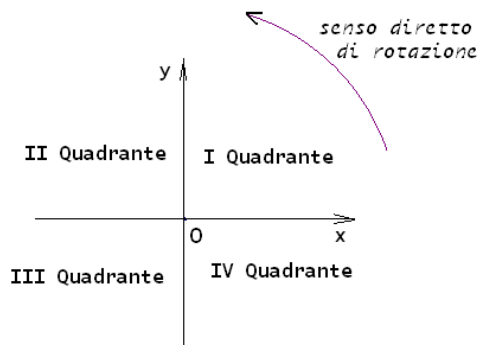
Riporto, sul piano cartesiano Oxy la circonferenza goniometrica (circonferenza di raggio unitario) dove sono tracciati seno, coseno, tangente e cotangente dell'angolo α :



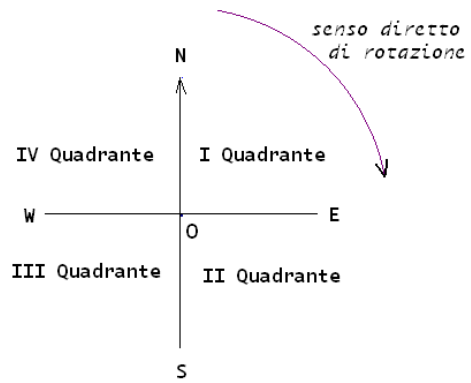
Dalla precedente figura emerge il senso diretto (antiorario) della misurazione degli angoli; infatti viene evidenziato come si riporta, sul piano cartesiano, l'angolo α : è la parte di piano che viene spazzata dal semiasse delle ascisse positive ruotando, nel senso antiorario, fino a prendere, per la prima volta, la direzione OC .

Viene da domandarsi del perché di questa scelta; l'opzione di questo senso è stata voluta dall'ideatore del piano cartesiano: Descartes Renè (La Haye en Tourain 1596-Stoccolma 1650), che introdusse la geometria analitica consentendo lo studio di proprietà geometriche mediante l'uso dell'algebra; questo nuovo pensiero rappresenta un momento fondamentale nell'evoluzione della matematica: è la nascita della matematica moderna.

Ma, molto tempo prima, nell'astronomia, nella geografia, ..., il senso diretto adoperato per i calcoli è quello orario. Nelle seguenti figure vengono ben evidenziati i due sopradetti sensi diretti.



IN MATEMATICA



IN ASTRONOMIA, IN GEODESIA,
IN IDROGRAFIA, IN GEOGRAFIA,

Si nota che:

- sul piano cartesiano sono riportati i sensi di crescita, su ciascun asse, della specifica coordinata, rappresentata da una freccia;
- sul piano orizzontale (geografia, geodesia, topografia,...) è riportata, invece, solamente la freccia nella direzione NS, nel senso del Nord; questa scelta impone che in qualunque documento di tipo *carta geografica, carta topografica,...* sia sempre segnato il verso del Nord.

A questo punto mi domando se non fosse opportuno scegliere un senso diretto comune e che, quindi, tutte le parti, col buon senso, arrivassero ad un positivo accordo (al fine di eliminare i disagi provocati agli studenti, dovuti alla scelta dei diversi orientamenti; suggerisco, per esempio, di confrontare la trigonometria rivolta a studenti dei licei con quella rivolta al corso di geometri)

