PROBLEMA.

Determinare tra quali valori deve essere compresa la latitudine di un luogo affinché l'ombra di una persona, nell'istante in cui il Sole passa al suo meridiano, risulti nulla.

SOLUZIONE.

Partiamo dalla figura

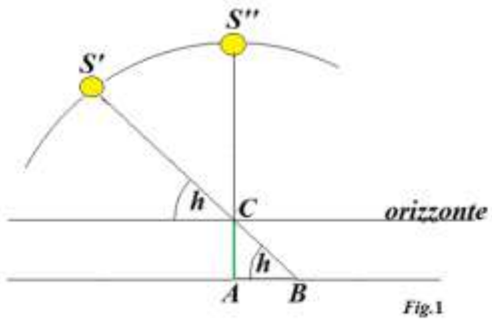


Fig.1

nella quale AC è la persona (con altezza H), la cui ombra originata dal Sole dalla la sua posizione S', è AB.

Dal triangolo ABC , essendo h l'altezza (angolare) del Sole, si ha:

$$\tan h = \frac{AC}{AB} \ ; \qquad (1)$$

se l'ombra AB deve essere nulla, vediamo cosa succede nella (1) quando AB tende a zero:

$$\lim_{AB \to 0} \tan h = +\infty \quad \Rightarrow \quad h \to 90°$$

Il caso limite ci dice, come era intuibile, che l'altezza del Sole deve essere 90°: posizione S'', ovvero il Sole è allo zenit di quella persona: la verticale di quella persona, in quell'istante, passa per il centro del Sole.

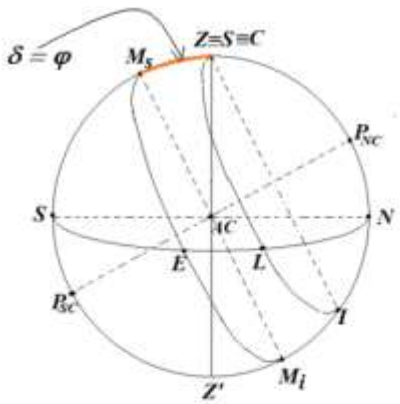


Fig.2

Poiché la declinazione del Sole varia da 23° 26'*S* nel giorno del solstizio d'inverno a 23° 26'*N* nel giorno del solstizio d'estate, si verifica che l'ombra di una persona è nulla:

- due volte all'anno se 23° 26'*S* < φ < 23° 26'*N*,

- una volta all’anno se $\varphi = 23°\ 26’S$ o $\varphi = 23°\ 26’N$.

►**Calcoliamo la lunghezza minima dell’ombra di una persona situata a Camogli** ovvero in latitudine $\varphi = 44°20’58’’N$, mediante l’equazione

$$\sin h = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos\hat{P}$$

nella quale sono noti tutti gli elementi del secondo membro, essendo nel caso specifico, $\hat{P} = 0°$:

$$\sin h = \sin 44°20'58'' \cdot \sin 23°26' + \cos 44°20'58'' \cdot \cos 23°26' \cdot \cos 0°$$

da cui

$$\sin h = 0.934104125 \quad \Rightarrow \quad h = \underline{69°05’02’’}.$$

Confermiamo il risultato lavorando sul triangolo degenere di questa situazione astronomica; la situazione è espressa nella figura

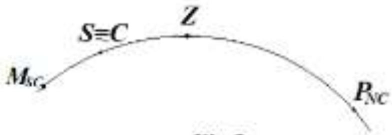


Fig.3

nella quale è:

- $S \equiv C$ culminazione superiore del Sole,
- ZP_{NC} colatitudine della persona considerata: $c = 90° - 44°20'58'' = 45°39'02''$,
- SP_{NC} distanza polare del Sole : $p = 90° - 23°26' = 66°34'$,
- SZ la distanza zenitale del Sole: $z = 90° - 45°39'02'' - 23°26' = 20°54’56’’$,

da cui

$$h = 90° - 20°54’56’’ = \underline{69°05’02’’}\ .$$

►Ora calcoliamo la lunghezza minima dell’ombra che produce la persona considerata; allo scopo ci rifacciamo all’equazione (1):

$$\tan 69°05’02’’ = \frac{AC}{AB} \qquad (2)$$

nella quale dobbiamo determinare la lunghezza AB dell’ombra conoscendo l’altezza AC della persona.

Pertanto risolviamo la (2) rispetto all’incognita, essendo certamente nota l’altezza della persona

$$AB = \frac{AC}{\tan 69°05'02''} = \frac{AC}{2.616533212}.$$

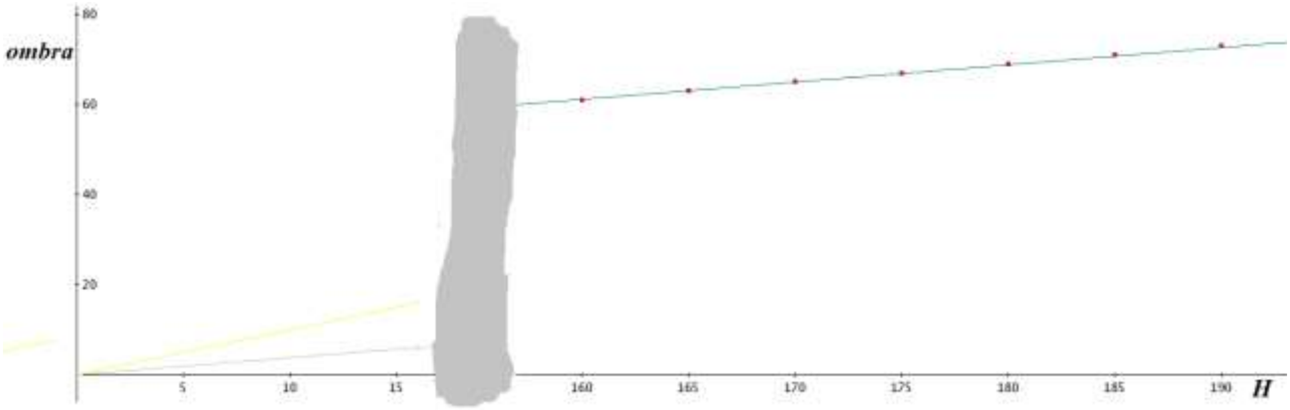
Consideriamo persone di altezza compresa da 160 *cm* a 190 *cm* con variabilità di 5 *cm*:

altezza persona	*lunghezza ombra*
160	61.14961555
165	63.06054104
170	64.97146652
175	66.88239201
180	68.79331749
185	70.70424298
190	72.61516847

che, approssimata all’intero è:

altezza persona	*lunghezza ombra*
160	61
165	63
170	65
175	67
180	69
185	71
190	73

Diagrammiamo la prima tabella



Con la scala scelta avremmo avuto bisogno di un foglio avente larghezza di 120 cm, è per questo che abbiamo fatto una interruzione tra l’ascissa 15 e l’ascissa 160. Dal grafico emerge che i punti diagrammati sono allineati … e questo è ovvio, infatti le ombre sono proporzionali alle altezze degli oggetti che le formano. Ciò che rileviamo è che la retta, anzi la semiretta perché non esistono altezze negative, parte dall’origine degli assi cartesiani; infatti se l’oggetto avesse altezza nulla, la sua ombra sarebbe nulla, pertanto il campo di esistenza della semiretta è $H > 0$.

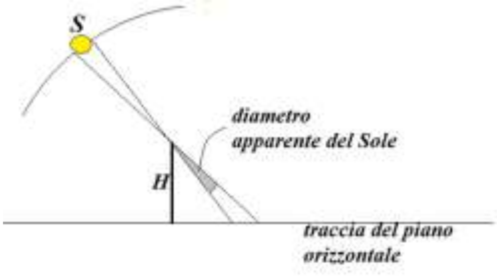
In particolare l’equazione della semiretta, essendo il suo coefficiente angolare $m = 0.3821850979$ circa, è $y = 0.3821850979 \cdot x$, dove x sta per H e y per *ombra*.

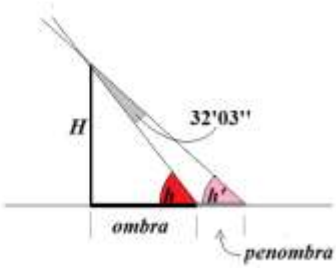
►Il collega *Manlio Milazzo* mi ha ricordato la penombra, ed allora ecco il seguito.

Il Sole è l'unica stella la cui forma possa essere apprezzata ad occhio nudo, grazie al suo *diametro angolare apparente.*

Il valore del *diametro angolare apparente* varia in funzione della posizione che il Sole occupa nella sua orbita apparente, assumendo il valore massimo (32' 35" d'arco) quando la Terra si trova al perielio e il valore minimo (31' 31" d'arco) quando la Terra si trova all'afelio.

Pertanto nei calcoli si usa il *diametro angolare apparente medio* stabilito in 32 ' 03" d' arco.





Dalle figure, di cui la seconda è un particolare della prima, abbiamo:

- *lunghezza ombra* = $\dfrac{H}{\tan h}$,
- *lunghezza ombra+ lunghezza penombra* = $\dfrac{H}{\tan h'} = \dfrac{H}{\tan\left(h - 32'03''\right)}$,
- *lunghezza penombra*= $\dfrac{H}{\tan\left(h - 32'03''\right)} - \dfrac{H}{\tan h}$.

Nel caso di Camogli visto prima, supposta l'altezza della persona pari a 180 *cm*, l'ombra (vedi prima tabella), è 68.79331749 cm; la somma della lunghezza dell'ombra più la lunghezza della penombra è:

$$\frac{180}{\tan\left(69°05'02''-32'03''\right)} = \frac{180}{\tan 68°32'59''} \cong 70.72350233\ cm,$$

così che la lunghezza della penombra, in questo caso, è circa1,930184844 *cm*, che approssimato all'intero risulta 2 cm.

È intuibile che la lunghezza della penombra cresce, a parità di *H*, al diminuire dell'altezza angolare del Sole.

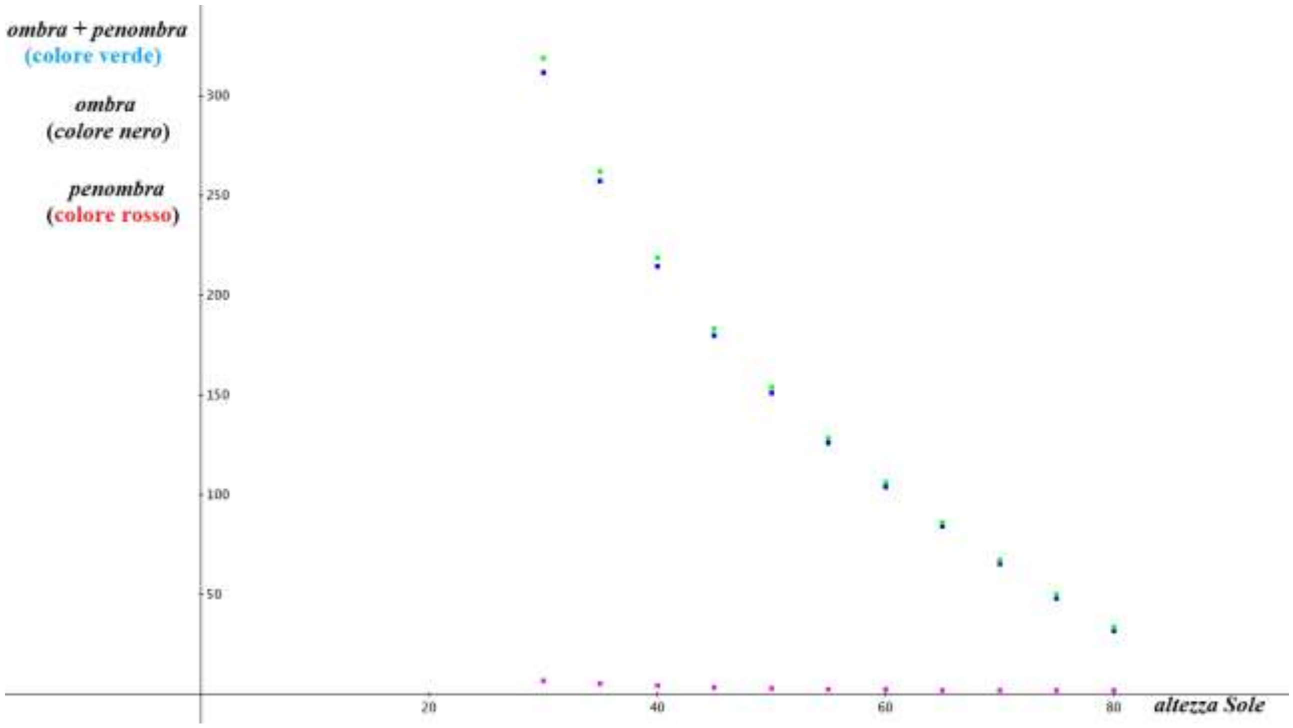
h	***ombra + penombra***
30	318.5920546
35	262.2364930
40	218.6229492
45	183.3879520
50	153.9202536
55	128.5547709
60	106.1727349
65	85.98739108
70	67.42161207
75	50.03403004
80	33.47206523

h	***ombra***
30	311.7691453
35	257.0666412
40	214.5156466
45	180
50	151.0379336
55	126.0373568
60	103.9230484
65	83.93537846
70	65.51464216
75	48.23085463
80	31.73885652

h	***penombra***
30	6.822909315
35	5.169851803
40	4.107302600
45	3.387952075
50	2.882320066
55	2.517414077
60	2.249686482
65	2.052012614
70	1.906969903
75	1.803175403
80	1.733208706

Le 3 tabelle precedenti sono state costruite considerando H = 180 *cm* e l'altezza h del Sole variabile da 30° a 80°, con passo di 5°.

Riportiamo sul piano cartesiano gli elementi delle tre tabelle



Il grafico evidenzia ciò che si è detto precedentemente … man mano che l'altezza aumenta diminuisce la lunghezza della penombra.

OSSERVAZIONE. L'uomo cerca sempre di matematizzare tutti i fenomeni, così come abbiamo fatto per le ombre. Ammettendo che le equazioni adottate siano plausibili, nasce una bizzaria: quando il Sole è allo zenit della persona considerata, la lunghezza della sua ombra è nulla, ma non la lunghezza della sua penombra che, per una persona di altezza 180 *cm* si attesta sul valore 1.678182695 cm.

Allora, "la penonombra (fenomeno fisico sempre presente e che rende i contorni delle ombre sfumati, soprattutto quando il cielo è privo di nubi) esiste sempre"