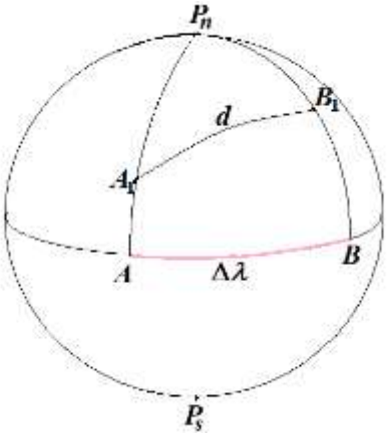
PROBLEMA 1

Da due punti A e B dell'equatore, tale che sia $\Delta\lambda = 90°$, partono simultaneamente due aerei con direzione il polo nord, ciascuno seguendo il proprio meridiano.



Le velocità dei due arei sono:

- $v_A = \left(666 + \frac{2}{3}\right)\frac{Km}{k}$
- $v_B = 1.000\frac{Km}{k}$

Supponendo la superficie della Terra perfettamente sferica con le circonferenze massime pari a **40000 *Km***, calcolare:

a) la distanza sferica $d = A_1B_1$ dopo 5 ore di navigazione;

b) gli angoli $\alpha = P_n\hat{A}_1B_1$ e $\beta = P_n\hat{B}_1A_1$;

c) l'area del fuso formato dall'angolo α.

SOLUZIONE.

a) Dopo 5 ore di navigazione, è:

- $AA_1 = \left(666 + \frac{2}{3}\right)\frac{Km}{h}\cdot 5h = \frac{10.000}{3}Km \quad \Rightarrow \quad arco(AA_1) = 30°$
- $BB_1 = 1.000\frac{Km}{h}\cdot 5h = 5.000Km \quad \Rightarrow \quad arco(BB_1) = 45°$

Consideriamo il triangolo $A_1P_nB_1$; in esso è:

$$A_1P_n = 60°, \quad B_1P_n = 45° \quad A_1\hat{P}_nB_1 = 90°;$$

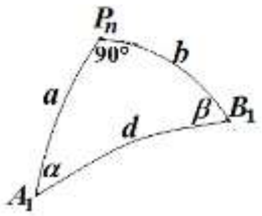
trattasi di un triangolo sferico rettangolo, pertanto usiamo la regola mnemonica di Nepero per i triangoli sferici rettangoli:

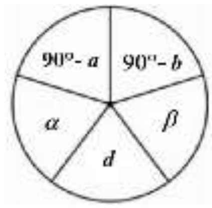
In ogni triangolo sferico rettangolo, se si sopprime l'angolo retto e si sostituiscono ai cateti i loro complementi, con i cinque elementi così modificati, abbiamo:

1. il **coseno** di uno qualunque dei cinque elementi è uguale al prodotto dei **seni** dei due elementi lontani,
2. il **coseno** di uno qualunque dei cinque elementi è uguale al prodotto delle **cotangenti** dei due elementi adiacenti.

Osservazione. L'applicazione di questa regola diventa più agevole se si utilizza un cerchio suddiviso in cinque settori in cui si scrivono in senso orario (antiorario), nell'ordine in cui si trovano, i cinque elementi suddetti.

Per comodità indichiamo : $A_1P_n = a$, $B_1P_n = b$





allora, è:

$$\cos d = \sin(90° - a) \cdot \sin(90° - b)$$

$$\cos d = \cos a \cdot \cos b = \cos 60° \cdot \cos 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$d = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad d \approx 69°17'43'' :$$

trasformiamo l'ampiezza di *d* in gradi sessagesimali:

$$d \approx \left(69 + \frac{17}{60} + \frac{43}{3'600}\right)^{\circ}$$

e con la proporzione

$$\left(69 + \frac{17}{60} + \frac{43}{3'600}\right)^{\circ} : x(Km) = 90° : 10'000(Km)$$

la trasformiamo in chilometri

$$x \approx 7'699.475 Km .$$

OSSERVAZIONE.

In navigazione aerea le distanze e le velocità si misurano rispettivamente in *Km* e in $\frac{Km}{h}$,

mentre in nautica si misurano rispettivamente in *miglia marine* e in *nodi*.

Ricordare che il miglio marino (proposto nel 1929) è definito come la lunghezza dell'arco di meridiano terrestre sotteso da un arco di 1' d'arco, sul parallelo di latitudine 44° 20', pertanto è $1mg = 1'852m$, così possiamo lavorare in miglia e successivamente trasformare il risultato in chilometri:

$$d \approx 69°17'43'' = \left(69 \cdot 60 + 17 + \frac{43}{60}\right)' \approx (4157.716667)' \approx 4157.716667 mg$$

trasformiamo il risultato in chilometri

$$d \approx (4157.716667 \cdot 1.852) Km \approx 7'700.1 Km$$

Si rileva una piccola differenza tra i due risultati che dipende dalle approssimazioni fatte nei calcoli.

b) Calcoliamo gli angoli α e β:

- $\cos(90° - a) = \cot\alpha \cdot \cot(90° - b)$

  $\cos 30° = \cot\alpha \cdot \cot 45° \quad \Rightarrow \quad \cot\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 49°06'24''$

- $\cos(90° - b) = \cot\beta \cdot \cot(90° - a)$

  $\cos 45° = \cot\beta \cdot \cot 30° \quad \Rightarrow \quad \cot\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \beta = 39°13'53''$

c) Calcoliamo l'area del fuso.

Partiamo dalla determinazione dell'area della superficie terrestre

$$\textit{Area superficie Terra} = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{40.000}{2 \cdot \pi}\right)^2 \approx 509.295.818 Km^2,$$

e scriviamo la proporzione

$$\textit{Area superficie Terra} : 360° = \textit{Area superficie fuso} : \alpha°,$$

ovvero

$$509.295.818 (Km^2) : 360° = S(Km^2) : \left(49 + \frac{6}{60} + \frac{24}{3.600}\right)^{\circ}$$

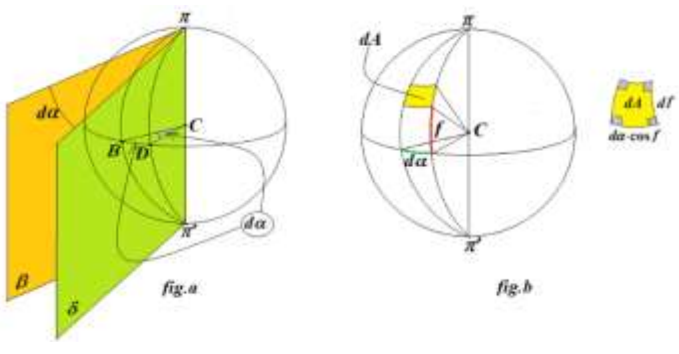
che risolviamo rispetto ad S:

$$S \approx \frac{509.295.818 \cdot (49.10666667)^{\circ}}{360^{\circ}} \approx 69.471.722 Km^2.$$

►CALCOLO DELL'AREA A_f DEL FUSO SFERICO CON L'ANALISI MATEMATICA

OSSERVAZIONE. Un fuso sferico è la parte di superficie sferica compresa tra due semipiani che hanno per origine lo stesso diametro della sfera, in modo equivalente è la parte di superficie sferica compresa tra due semicirconferenze massime aventi gli stessi estremi. L'ampiezza dell'angolo diedro formato dai semipiani delle due semicirconferenze si indica con una lettera greca espressa in radianti.

Consideriamo un fuso avente ampiezza $d\alpha$ e prendiamo su di esso un quadrato sferico infinitesimo di area dA.



Allora l'area A_f di un fuso di ampiezza α è data dal radicale doppio:

$$A_f = \iint dA = \left[\int_0^{\alpha} d\alpha \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot d\varphi \right] \cdot R^2 =$$

$$= \left[\sin\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot R^2 \cdot \int_0^{\alpha} d\alpha = \left(1-(-1)\right) \cdot R^2 \cdot \alpha^{(r)} = 2 \cdot \alpha^{(r)} \cdot R^2$$

nella quale α è espresso in radianti ovvero $\alpha^{(r)} = \dfrac{\alpha^{\circ} \cdot \pi}{180^{\circ}}$, quindi:

$$A_f = 2 \cdot \frac{\alpha^{\circ} \cdot \pi}{180^{\circ}} \cdot R^2 = \frac{\alpha^{\circ} \cdot \pi}{90^{\circ}} \cdot R^2 .$$

Verifichiamo i risultati precedenti

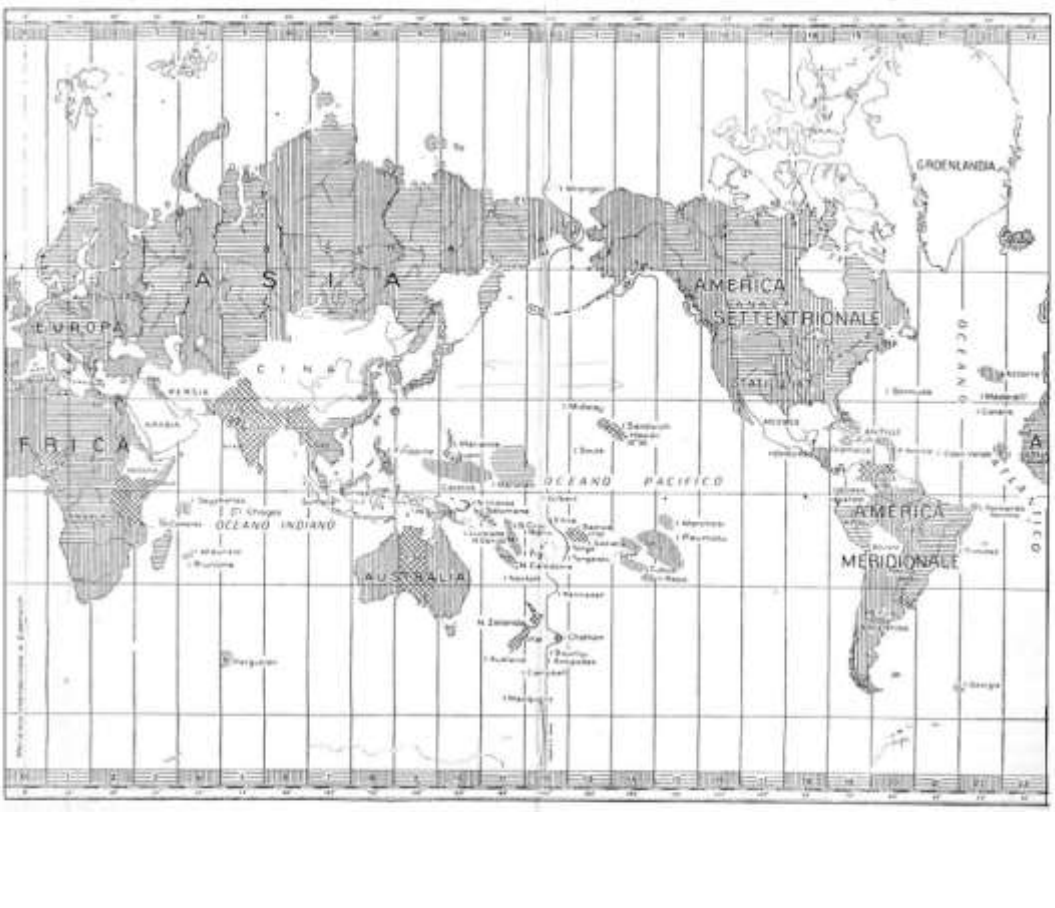
- area superficie Terra:

$$A_{Terra} = \frac{360^{\circ} \cdot \pi}{90^{\circ}} \cdot \left(\frac{40'000}{2 \cdot \pi} \right)^2 \approx 509'195'918 Km^2$$

- area fuso di $\alpha = 49°06'24''$

$$S = \frac{\left(49 + \frac{6}{60} + \frac{24}{3'600} \right)^{\circ} \cdot \pi}{90^{\circ}} \cdot \left(\frac{40'000}{2 \cdot \pi} \right)^2 \approx 69'471'722 Km^2 .$$

►Facciamo un’ulteriore verifica sui fusi orari di cui di seguito il planisfero



Si definisce fuso orario ciascuna delle 24 zone, comprese tra due meridiani, in cui è stata divisa la superficie della Terra ed in cui si assume lo stesso orario concordato.

Per la definire i fusi orari bisogna considerare che la Terra, di forma perfettamente sferica, completi una rotazione attorno al suo asse in 24 ore esatte. Allora ogni fuso orario ha ampiezza pari a 15°, ottenuta dividendo 360° per 24 ore.

I fusi orari hanno origine a partire dal meridiano zero (meridiano di Greenwich) e ciascuno di essi termina in corrispondenza di meridiani aventi longitudine pari a multipli di 15°.

Calcoliamo l'area di ciascun fuso orario

$$A_{fuso} = \frac{15^\circ \cdot \pi}{90^\circ} \cdot \left(\frac{40'000}{2 \cdot \pi}\right)^2 \approx 21'220'659.08 Km^2$$

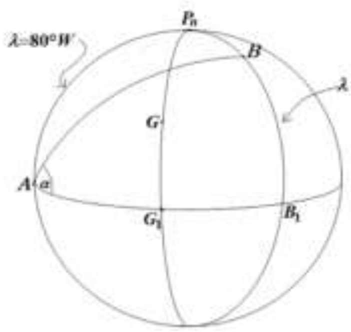
e la conseguente area della superficie terrestre

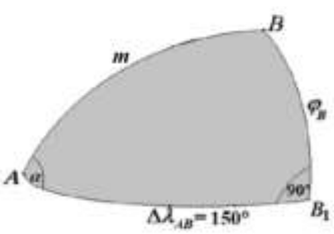
$$A_{Terra} = A_{fuso} \cdot 24 \approx 21'220'659.08 \cdot 24 \approx 509'195'918 Km^2 .$$

PROBLEMA 2

Un aereo parte da un punto A dell'equatore seguendo un arco di circonferenza massima che forma con l'equatore un angolo α, tal che è $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; essendo $\lambda_A = 80°W$ e la velocità del velivolo $v = 500\frac{Km}{h}$, determinare il tempo impiegato dal mobile sino ad incontrare il meridiano $\lambda = 70°E$, e la corrispondente latitudine φ_B, essendo B il punto di intercetta col meridiano di longitudine $\lambda = 70°E$.

SOLUZIONE

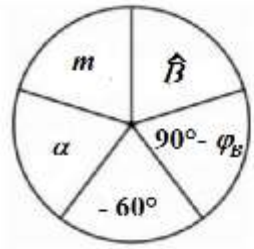




La prima figura è scenografica, la seconda riporta solo il triangolo sferico da risolvere. In esso è:

- $\cos\alpha = \frac{1}{3}$,

- $\overset{\frown}{AB_1} = 150°$,
- $A\hat{B}_1 B = 90°$



$$\cos\alpha = \cot m \cdot \cot(-60°) \quad \Rightarrow \quad \cot m = \frac{1}{3} \cdot \tan(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad m = 120°.$$

Determiniamo la distanza *m* espressa in chilometri:

$$120° : 90° = m : 10.000 \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{120° \cdot 10.000}{90°} = \frac{40.000}{3} Km;$$

l'intervallo di tempo Δt necessario a percorrere l'arco di circonferenza massima *m*, è:

$$\Delta t = \frac{\frac{40.000}{3} Km}{500 \frac{Km}{h}} = \frac{80}{3} h = 26^h 40^m .$$

Manca la determinazione della latitudine del punto *B*:

$$\cos m° = \sin(-60°) \cdot \sin(90° - \varphi_B)$$

$$\cos\varphi_B = \frac{\cos 120°}{\sin(-60°)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varphi_B \approx 54°44'08'' N .$$