CONSIDERAZIONI SULLE LEGGI DI KEPLERO

Johannes Kepler (1571-1630), italianizzato Giovanni Keplero, è stato matematico, astronomo, filosofo e teologo luterano. E' ricordato, in particolare, per le tre leggi che governano il moto dei pianeti intorno al Sole e che vanno sotto il suo nome.

► La **prima legge** viene enunciata come segue:

"i pianeti descrivono, intorno al Sole, orbite chiuse a forma di ellisse di cui uno dei due fuochi è occupato dal Sole".

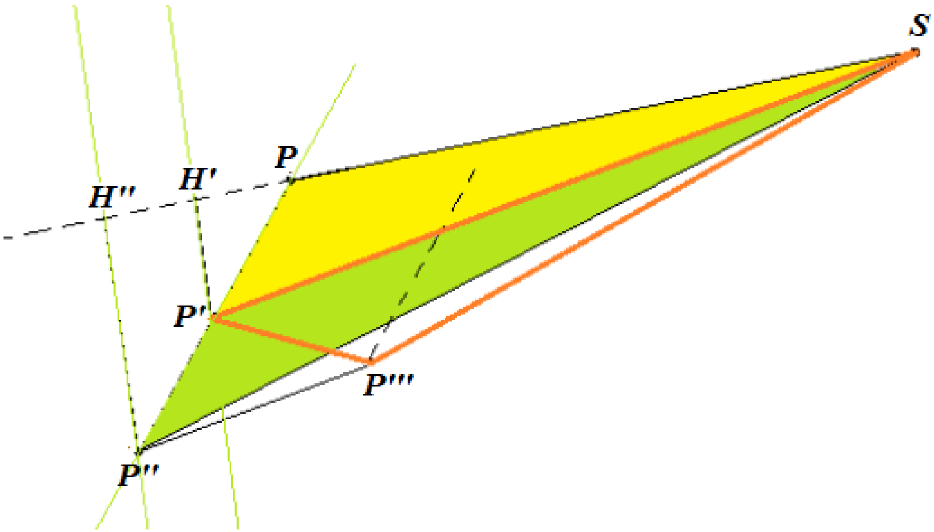
Su questa legge mi permetto di fare solo la seguente domanda: *siccome la Natura non lascia nulla al caso, il fuoco dell'orbita ellittica, occupato dal Sole, non dovrebbe essere ben prestabilito*?

► La **seconda legge** di Keplero recita:

"***i raggi vettori*** (distanza euclidea pianeta-Sole) ***descrivono aree uguali in intervalli di tempo uguali***"

Su questa legge porto una dimostrazione attribuita ad Isaac Newton (1642-1727), tra i fondatori della fisica moderna (in particolare della meccanica classica) e tra i massimi matematici di tutti i tempi.

Mi riferisco alla seguente figura:



in essa suppongo che il pianeta dal punto P descriva, sulla propria orbita, il tratto PP' nell'intervallo di tempo Δt; se non intervengono forze esterne, per il primo principio del moto (un corpo persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme fino a che non intervengono forze esterne), nello stesso intervallo di tempo Δt percorrerebbe l'ulteriore tratto $P'P''$, adiacente al tratto PP' e, ad esso uguale.

Ma, per la legge di gravitazione universale, in P' agisce una forza centrale (diretta verso il centro del Sole, quindi nel senso $P'S$) che fa deviare la traiettoria del pianeta tal da fargli percorrere il tratto $P'P'''$ al posto del tratto $P'P''$.

Supposti molto piccoli i tratti percorsi dal pianeta, è lecito considerali rettilinei; in questa ipotesi, tra i triangoli SPP' e $SP'P''$ (considerati piani per l'ipotesi avanzata) sussiste la relazione:

$$Area(SPP'') = 2 \cdot Area(SPP'),$$

infatti le altezze dei triangoli *SPP'* e *SPP''* hanno uguale base *SP* e le rispettive altezze *H'P'* e *H''P''*, in virtù del teorema di Talete, legate dalla relazione:

$$H'P' = \frac{1}{2} \cdot H''P'',$$

segue:

$$[triangolo(SPP')] \ \textbf{\textit{equivalente}} \ [triangolo(SP'P'')] \qquad (1)$$

Considero ora i triangoli *SP'P''* e *SP'P'''*; essi hanno uguale base *SP'* ed uguale altezza (distanza tra le rette parallele *SP'* e *P''P'''*, dovuta alla legge della composizione degli spostamenti); pertanto è:

$$[triangolo(SP'P'')] \ \textbf{\textit{equivalente}} \ [triangolo(SP'P''')] \qquad (2)$$

Dalle (1) e (2), per la proprietà transitiva dell'equivalenza, è:

$$[triangolo(SP'P''')] \ \textbf{\textit{equivalente}} \ [triangolo(SPP')],$$

che è ciò che ha dimostrato Newton.

OSSERVAZIONE 1. Le leggi di Keplero (come tutte le altre della meccanica celeste) hanno qualche cosa di *mistico* e di *miracoloso*, che l'uomo non può modificare; per assurdo (o forse no) se l'uomo mandasse in frantumi il proprio pianeta, modificherebbe solamente l'equilibrio del sistema solare ma, i pianeti restanti continuerebbero ad essere governati da queste leggi.

OSSERVAZIONE 2. Se le orbite dei pianeti attorno al Sole fossero circolari, la velocità di ciascun pianeta sarebbe costante e anche in questo caso varrebbe (a maggior ragione) la seconda legge, infatti ad archi uguali corrispondono settori circolari uguali. Ma ciò non è vero perché le orbite sono ellittiche e quindi i pianeti hanno velocità orbitale variabile: più bassa nei pressi dell'**afelio**(*) (punto più distante del pianeta dal Sole) e più elevata nei pressi del **perielio**(**) (punto più vicino del pianeta al Sole). Questa variazione (ciclica) di velocità è dovuta alla forza di attrazione universale che è inversamente proporzionale al quadrato della distanza pianeta-Sole: non si tratta di un miracolo?

(*) proveniente dalla composizione delle parole greche *apo-elio =allontanamento-Sole*. Si è formata quindi la parola *apelio*; successivamente la lettera *p* si è trasformata in *ph*, da cui la parola *aphelio*; infine *ph* è diventato *f* , da cui il termine attuale.

(**) accostamento delle parole greche *peri= intorno* e *elio =Sole.*

■ Voglio, ora, esprimere questa legge mediante la **doppia implicazione** (**bicondizionale**), ovvero utilizzando la consueta locuzione "***se e solo se***" incontrata nell'enunciato di vari teoremi di matematica; come, ad esempio, il teorema (nella geometria euclidea) che riguarda i triangoli isosceli:

"*un triangolo ha due lati uguali* ***se e solo se*** *ha due angoli uguali*"; (**)

questa frase sta a significare, per così dire "*l'**andata** e il **ritorno***", ovvero:

1. se un triangolo ha due lati uguali allora ha anche due angoli uguali
2. se un triangolo ha due angoli uguali allora ha anche due lati uguali

Indicando le proposizioni:

- *A*=un triangolo ha due lati uguali,
- *B*= un triangolo ha due angoli uguali,

la proposizione 1. può esprimersi col simbolismo $A \Rightarrow B$,

la proposizione 2. può esprimersi col simbolismo $B \Rightarrow A$,

allora l'enunciato (**) può essere espresso col simbolismo $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$ il quale viene sintetizzato col simbolismo $A \Leftrightarrow B$ oppure $B \Leftrightarrow A$, dove il simbolo $\Leftrightarrow$ sta a significare proprio la **doppia implicazione** delle due proposizioni, ovvero "***se e solo se***".

Con l'introduzione ora fatta, posso tornare alla seconda legge di Keplero, così da esprimerla sotto forma di **teorema**:

a. l'***andata*** è stata dimostrata precedentemente,

b. il ***ritorno*** è il seguente:

stabilito che sia vera la prima parte "*il raggio vettore descrive aree uguali in intervalli di tempo uguali*", ovvero che il triangolo *SP'P'''* (in figura con contorno rosso) sia equivalente al triangolo *SPP'* (in figura colorato di giallo), segue che i due suddetti triangoli, avendo uguale area e la stessa base *SP'*, devono avere uguale altezza; così *SP'* e *P'''P''* risultano paralleli; segue che la forza che agisce sul pianeta, quando è nella posizione *P''* è centrale ovvero nel senso cha va dal pianeta al Sole.

In definitiva, date le proposizioni:

- *M* =il raggio vettore spazza aree uguali,
- *N* = gli intervalli di tempo descritti dal raggio vettore sono uguali,

posso enunciare il **teorema**:

"*il raggio vettore spazza aree uguali, **se e solo se**, gli intervalli di tempo descritti dal raggio vettore sono uguali*",

ovvero, è: $M \Leftrightarrow N$.

■ Keplero individuò le leggi in base alle sue osservazioni astronomiche, congiuntamente a quelle del suo maestro, l'astronomo danese Tycho Brahe (1546-1601). Enunciò le prime due nel 1609 (Brahe era già deceduto) e la terza nel 1618.

► Ed ecco la **terza legge**:

"*i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono direttamente proporzionali ai cubi delle loro distanze medie dal Sole*".

Indicati con T_1 e T_2 i periodi di rivoluzione e con R_1 e R_2 i raggi medi delle orbite di due pianeti P_1 e P_2 , la terza legge si esprime nell'equazione:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \qquad (1)$$

OSSERVAZIONE. Le orbite dei pianeti attorno al Sole sono ellittiche, ma hanno piccola eccentricità (la massima è 0.249 di Plutone) e piccola inclinazione sul piano orbitale della Terra (la massima è 17°07' di plutone), per cui si possono considerare circonferenze complanari.

Questa legge, enunciata da tutti con grande indifferenza, è veramente sorprendente, infatti lega dei "*quadrati di tempi*" con dei "*volumi*": che "*affascinante legame fisico- matematico*".

E, che dire se la scriviamo nel seguente modo?

$$T_1^2 \cdot R_2^3 = T_2^2 \cdot R_1^3 \qquad (2)$$

Ricordando che le dimensioni fisiche, in cinematica, sono *lunghezza* [L] e *tempo* [T], ciascuna di esse elevata ad esponente razionale, la dimensione di ciascun membro della (2) è $[L^3T^2]$, e questo è veramente sorprendente.

► ora, in base alle mie opinioni, cerco di immaginare come avrebbe potuto operare Keplero.

Indicate con v_1 e v_2 rispettivamente le velocità di due pianeti P_1 e P_2, posso scrivere (considerando v_i la velocità media del pianeta *i.esimo*) :

$$T_1 \cdot v_1 = 2 \cdot \pi \cdot R_1 \qquad (3)$$

$$T_2 \cdot v_2 = 2 \cdot \pi \cdot R_2 \qquad (4)$$

divido, membro a membro, la (3) con la (4):

$$\frac{T_1 \cdot v_1}{T_2 \cdot v_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{R_1 \cdot v_2}{R_2 \cdot v_1} \qquad (5)$$

quadro ambo i membri della (5)

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^2 \cdot v_2^2}{R_2^2 \cdot v_1^2} \qquad (6)$$

uguaglio i secondi membri delle (1) e (6)

$$\frac{R_1^2 \cdot v_2^2}{R_2^2 \cdot v_1^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

semplifico

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{R_1}{R_2}$$

che posso scrivere

$$v_1^2 \cdot R_1 = v_2^2 \cdot R_2 \qquad (7)$$

In definitiva, è:

$$v_i^2 \cdot R_i = costante, \qquad (8)$$

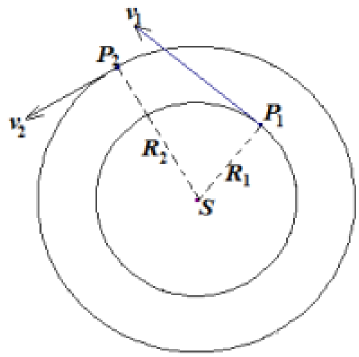
nella quale è $i = 1,2,3,\ldots..,n$ dove n è il numero dei pianeti del sistema solare.

OSSERVAZIONE. Forse è proprio la (8) che Keplero verificò, con le sue osservazioni, perché è sempre più facile verificarla rispetto alla (1); quindi, con i passaggi di ritorno prima scritti, potrebbe essere giunto alla sua terza legge.

► Risolvo la (7) rispetto, per esempio, alla variabile v_2:

$$v_2 = v_1 \cdot \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \qquad (9)$$

Nella seguente figura



sono riportati due ipotetici pianeti P_1 e P_2 che ruotano attorno al Sole; essendo P_1 più vicino al Sole rispetto a P_2, è:

$$R_1 < R_2 .$$

Pertanto, nella (9) è:

$$\frac{R_1}{R_2} < 1$$

e quindi:

$$v_2 < v_1$$

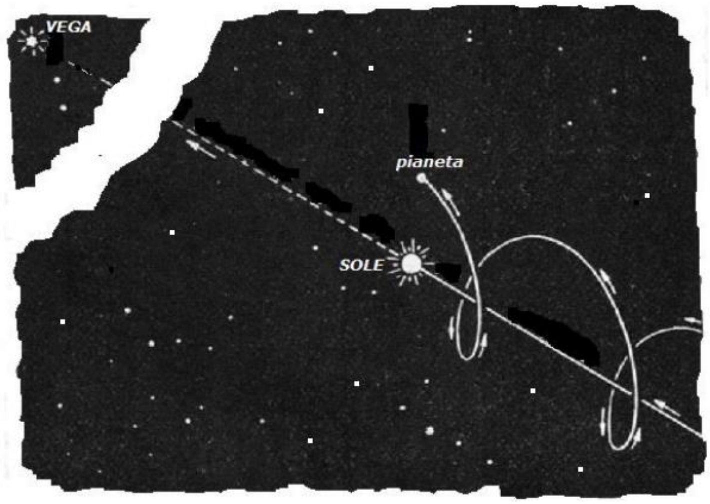
Dalla terza legge di Keplero emerge che le velocità dei pianeti, nel percorrere le loro orbite, diminuiscono all'aumentare delle loro rispettive distanze dal Sole.

Che la distanza dei pianeti dal Sole abbia rilevanza sul loro moto orbitale, già era evidenziato nella seconda legge: al perielio il pianeta ha la velocità massima, mentre all'afelio raggiunge la minima.

NOTA. Le teorie che regolano l'universo sono, in generale, approssimate e così risultano anche le leggi di Keplero, infatti:

- i pianeti non ruotano attorno al Sole; ruotano, assieme al Sole, attorno al baricentro del sistema solare, baricentro che, per la prevalente massa del Sole rispetto a tutti i pianeti del suo sistema, viene, da Keplero, considerato coincidente col baricentro della nostra stella;
- il baricentro del sistema solare non è fisso, ma si muove continuamente per la diversa distribuzione dei pianeti nel sistema stesso;
- i pianeti, inoltre, si attirano mutualmente, con forze continuamente variabili, a seconda delle loro mutue distanze (legge di gravitazione universale); questo fenomeno causa una deformazione delle orbite dei pianeti;

- inoltre il Sole non è stazionario, bensì si muove nella direzione della stella Vega, trascinando con se tutti i pianeti del suo sistema; la conseguenza di questo moto produce la formazione, per ciascun pianeta, orbite spiraliformi (vedi figura).



Pertanto nessun pianeta passerà più di una volta per uno stesso punto dello spazio.

E' stato onorato Keplero anche in una simulazione della seconda prova d'esame di Stato, per la seconda prova di Navigazione: è il terzo quesito della simulazione inviata ai "*purtroppo*" ex-Nautici, dal Ministero dell'Istruzione.

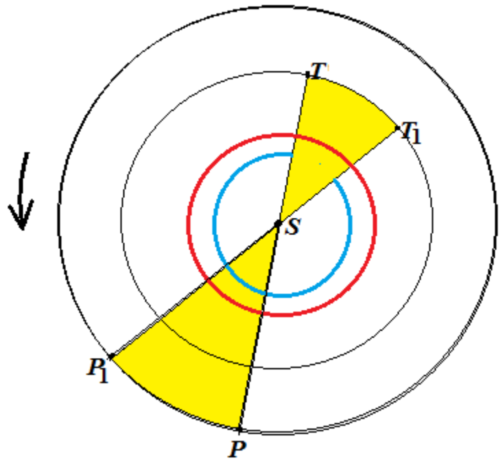
Ed ecco il **PROBLEMA** proposto (il testo è riportato, come "oggetto" estraendolo proprio dal **documento ufficiale del Ministero**)

3) Un osservatore annota che un certo pianeta è in opposizione ogni 665,25 giorni.
Il Candidato calcoli la distanza del pianeta dal Sole, in unità astronomiche.

SOLUZIONE

Premetto alcune semplificazioni:

1. velocità costante di ciascun pianeta attorno al Sole
2. orbite dei pianeti perfettamente circolari (le orbite ellittiche hanno piccola eccentricità: la massima, *e*=0.249, è quella di Plutone);
3. I "giorni" (medi) di una rivoluzione completa della Terra siano 365.25.



Con queste premesse ci riferiamo alla figura, nella quale, è:

- ***TSP*** la situazione di un istante in opposizione;
- ***T*₁*SP*₁** la situazione della successiva opposizione, ottenuta dopo 665.25 giorni; per avere questa seconda situazione, la Terra ha compiuto una rivoluzione completa in 365.25 giorni (*circolo rosso*), più una ulteriore traiettoria (*arco azzurro*) dovuta ai successivi 665.25 – 365.25 = 300 giorni.

Determino, mediante proporzione, l'angolo descritto dal raggio vettore della Terra nei 300 giorni (arco azzurro, **tenere presente il senso della freccia nera in figura**):

$$\frac{365.25}{360°} = \frac{300}{(TST_1)°} \quad \Rightarrow \quad (TST_1)° = \frac{360° \cdot 300}{365.25} \approx (295.69)° .$$

Determino, mediante proporzione, i giorni (medi) di rivoluzione del pianeta *P*:

$$\frac{(295.69)°}{665.25} = \frac{360°}{giorni} \quad \Rightarrow \quad gioni = \frac{360° \cdot 665.25}{(295.69)°} \approx 809.94 .$$

Dall'equazione che esprime la terza legge di Keplero:

$$\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{r^3}{r_1^3} \tag{1}$$

nella quale pongo $r = 1$ *U.A.*, ho:

$$\frac{365.25^2}{809.94^2} = \frac{1}{r_1^3} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \sqrt[3]{\frac{809.25^2}{365.25^2}} \approx 1.7 \ U.A.$$

Considerata la distanza Terra-Sole pari a 149 597 870 *Km*, la distanza in chilometri del pianeta (citato nel testo) dal Sole è:

$$(149\,597\,870 \cdot 1.7)\ Km = 254\,316\,379\ Km.$$

CONSIDERAZIONI SULLE VELOCITA'

Sempre nelle ipotesi fatte inizialmente sulle orbite dei pianeti attorno al Sole, indicate con v e v_1 rispettivamente le velocità della Terra e del pianeta, è:

$$T \cdot v = 2 \cdot \pi \cdot r \qquad \text{e} \qquad T_1 \cdot v_1 = 2 \cdot \pi \cdot r_1$$

divido, membro a membro, la prima con la seconda:

$$\frac{T \cdot v}{T_1 \cdot v_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot r_1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T}{T_1} = \frac{r \cdot v_1}{r_1 \cdot v};$$

elevo a quadrato ambo i membri di quest'ultima:

$$\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{r^2 \cdot v_1^2}{r_1^2 \cdot v^2}; \qquad (2)$$

confrontando la (1) con la (2), in virtù della proprietà transitiva dell'uguaglianza, scrivo:

$$\frac{r^2 \cdot v_1^2}{r_1^2 \cdot v^2} = \frac{r^3}{r_1^3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v_1^2}{v^2} = \frac{r}{r_1} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{\frac{v^2 \cdot r}{r_1}};$$

ed essendo manifestamente $v > 0$, è:

$$v_1 = v\sqrt{\frac{r}{r_1}}.$$

Dal risultato prima ottenuto è:

$$v_1 \approx v\sqrt{\frac{1}{1.7}} \approx 0.77\, v,$$

ovvero la velocità del pianeta è circa pari al 77% della velocità della Terra.

NOTE MIE PERSONALI. Le tre leggi di Keplero sono tutte meravigliose:

- La prima, come visto, tratta della traiettoria ellittica che i pianeti descrivono attorno al Sole e che lo stesso occupa "*uno dei due fuochi* " dell'ellisse; ma quale dei due? Credo che le leggi fisiche (matematiche) che descrivono l'Universo non lascino nulla al caso. Sarebbe diversa la nostra vita sulla Terra se il Sole occupasse l'altro fuoco? Mi piacerebbe ottenere risposte.

- La seconda ha dell'incredibile perché lega "*tempi*" con "*aree*".
- Ma è indubbiamente è la terza legge la più affascinante perché lega, in una incantevole equazione, "*quadrati di tempi*" con "*volumi*".

Chi ha ulteriori idee, le aggiunga…..

Invito il lettore, tempo permettendo, a fare qualche approfondimento sulla "*meccanica celeste*".