CERCHI D’ALTEZZA E CURVE D’ALTEZZA

PREMESSA.
La misura dell’altezza *h* di un astro determina, sulla superficie terrestre, una linea di posizione a forma di circonferenza avente come centro la proiezione *a* (punto subastrale) dell'astro *A* e raggio sferico uguale alla distanza zenitale *z* ovvero il complemento dell’altezza *h* rilevata. Tale luogo di posizione si dice (nel gergo nautico) *cerchio d’altezza*, definito come l’insieme dei punti dai quali, nello stesso istante, gli osservatori ivi posti misurano la stessa altezza dello stesso astro.

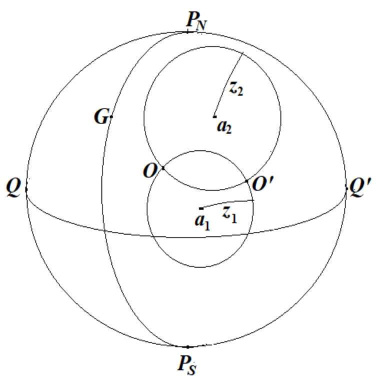
OSSERVAZIONE. Per il fatto che siamo interessati solo al perimetro di quel cerchio, il suddetto luogo di posizione dovrebbe chiamarsi più giustamente *circonferenza d’altezza*.

Tutti i punti di un luogo di posizione, qualunque ne sia la forma geometrica, godono della stessa proprietà.

Un solo luogo geometrico però non è sufficiente a determinare la posizione della nave, ne servono almeno due. Nel caso dei cerchi d’altezza basta rilevare l’altezza di un secondo astro.

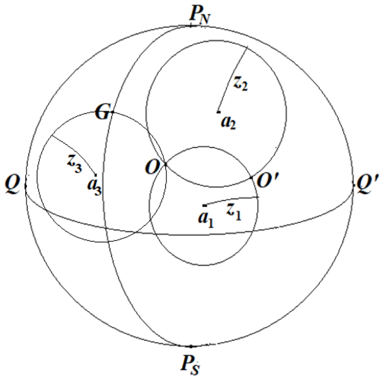
Per linea di posizione si intende l’insieme di tutti quei punti ove l’osservatore può essere, senza sapere esattamente dove.

L'osservatore sarà dunque certamente in un punto del cerchio d'altezza, ma non si sa dove.
Se si misura l'altezza di un altro astro, si ottiene un secondo cerchio d'altezza, il cui punto di incontro con il primo, determina facilmente la posizione della nave.



In realtà i due cerchi si incontrano in due punti: uno vicinissimo al punto stimato, l'altro lontano, per cui è facile stabilire quale sia, tra i due punti, il punto nave.

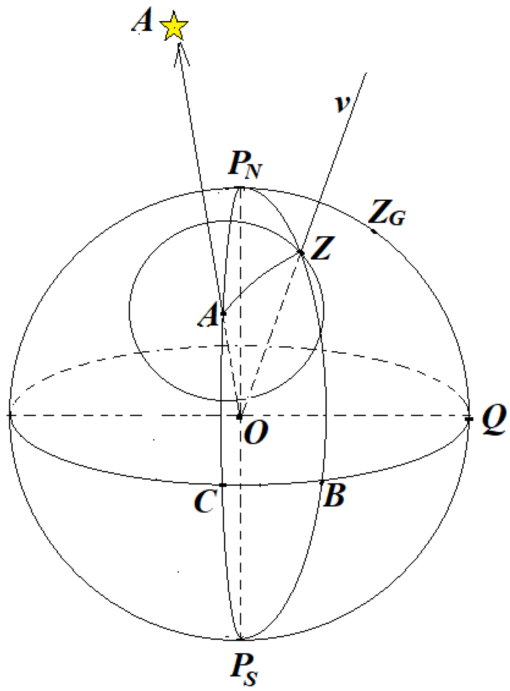
L'osservazione di più astri (tre o più) toglie l'ambiguità perché tutti i cerchi si incontrano, se non esistessero errori sistematici e accidentali, in un solo punto.



OSSERVAZIONE. Nella seconda figura si evince che anche un osservatore posto a Greenwich rileverebbe, nello stesso istante, l'altezza h_3 dell'astro A_3.

►D'ora in poi non tratto più il problema del punto nave ma solo i cerchi d'altezza

La seguente figura rappresenta la sfera celeste riferita ad un osservatore *O* posto in un punto della superficie terrestre



il cui piano di figura è il circolo meridiano celeste di Greenwich. Pertanto è:

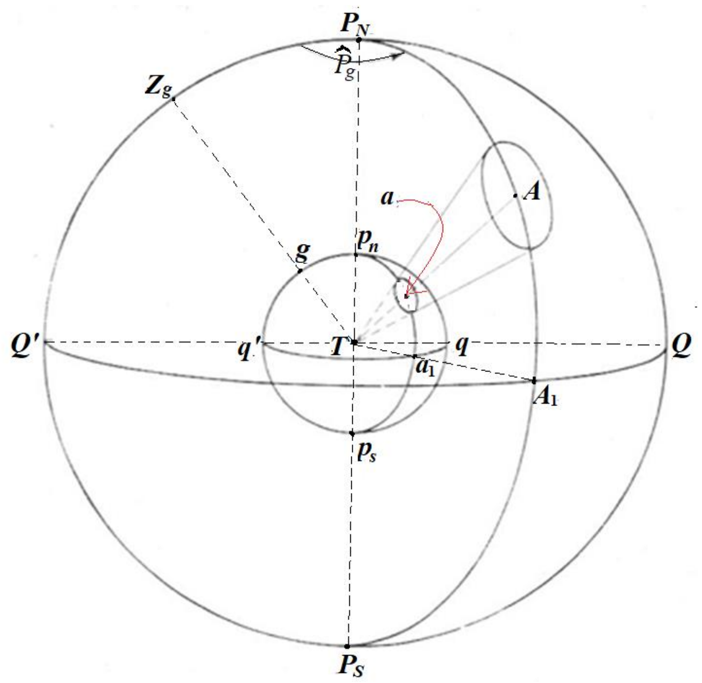
- *O* l'osservatore
- *A* l'astro (*)
- *Z* lo zenit dell'osservatore (*)
- $P_N Z P_S$ il meridiano superiore dell'osservatore
- $P_N A P_S$ il meridiano celeste dell'astro
- $P_N Z_G P_S$ il meridiano superiore di Greenwich (osservatorio)
- *AZ* la distanza zenitale *z* dell'astro *A*, raggio della circonferenza d'altezza

(*) La sfera celeste si chiama anche *sfera rappresentativa delle direzioni astrali*; dal punto *O* (come da un altro qualunque altro punto) si irradiano infinite semirette dello spazio dando luogo ad una figura geometrica detta "*stella di semirette*"; la semiretta che passa per l'astro reale *A* è quindi la direzione con cui l'osservatore *O* ne vede il punto rappresentativo *A* sulla sfera celeste. In figura la stella *A* è l'astro reale (rappresentato con una stellina di colore giallo), sulla superficie sferica celeste il punto rappresentativo (punto virtuale o non reale) è ancora segnato con la stessa lettera *A* perché trattasi dello stesso astro: noi siamo pertanto interessati solo alla direzione degli astri e non alle loro distanze da noi.

►Rappresento ora la sfera celeste costruita attorno concentricamente alla sfera terrestre, entrambe aventi per centro il centro *T* della Terra. In essa sono segnati i poli celesti e l'equatore celeste in corrispondenza di quelli terrestri; così pure è segnato il meridiano superiore di Greenwich $P_N Z_g P_S$ corrispondente al meridiano terrestre $p_n g p_s$ di Greenwich.

A è il punto rappresentativo di un astro *A* la cui direzione è *TA*; tale direzione interseca la superficie terrestre nel punto *a*, detto *punto sub-astrale* o *punto astrale*.

La posizione istantanea di *A* è individuata dalle coordinate orarie rispetto Z_g: declinazione $\delta = A_1 A$ e angolo al polo $\hat{P}_g = Z_g \hat{P} A$.



Così che le coordinate geografiche del punto sub-astrale *a* sono: $\varphi_a = \delta; \lambda_a = \hat{P}_g$,

OSSERVAZIONE. Un ipotetico osservatore che sia situato nel punto *a*, ha facilità a determinare immediatamente le sue coordinate geografiche (non considerando errori sistematici e accidentali): la sua latitudine è la declinazione dell'astro *A* e la sua longitudine è l'angolo al polo dell'astro riferito a Greenwich.

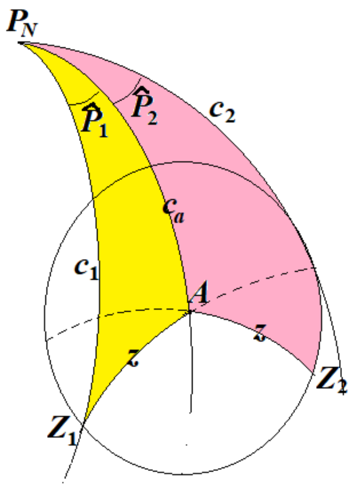
Distinguo le due circonferenze:

- la circonferenza d'altezza sulla sfera celeste è il luogo degli zenit corrispondenti agli osservatori che misurano, nello stesso istante, la stessa altezza di uno stesso astro *A*;
- la circonferenza d'altezza sulla sfera terrestre è il luogo di posizione di tutti gli osservatori che, nello stesso istante, misurano la stessa altezza di uno stesso astro *A*.

EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA D'ALTEZZA

Stabilito che tale circonferenza ha raggio costante $z = 90° - h$ e che il punto corrente è costituito dalle coordinate dell'osservatore, rappresento nella seguente figura due degli infiniti triangoli di posizione: quello dell'osservatore O_1 il cui zenit è Z_1 e quello dell'osservatore O_2 il cui zenit è Z_2 .

In figura ho indicato la colatitudine AP_N con c_a del punto sub-astrale, allo stesso modo come ho indicato le colatitudini c_1 e c_2 rispettivamente degli osservatori O_1 e O_2. Ciò è giustificato dal fatto che tutte le distanze sferiche considerate sono esclusivamente di tipo angolare.



L'equazione proviene dal teorema di Eulero detto anche teorema del coseno:

$$\cos ZA = \cos P_n Z \cdot \cos P_N A + \sin P_n Z \cdot \sin P_N A \cdot \cos \hat{P}$$

indicate con $(\varphi; \lambda)$ le coordinate del punto corrente la circonferenza d'altezza (tutti i potenziali osservatori che misurano, nello stesso istante, l'altezza dello stesso astro), si ha:

$$\cos z = \cos c \cdot \cos c_a + \sin c \cdot \sin c_a \cdot \cos(\lambda_a - \lambda)$$

che lo studente ed il navigante ricorda come segue

$$sin\ h = \sin \varphi \cdot \sin \varphi_a + \cos \varphi \cdot \cos \varphi_a \cdot \cos(\lambda_a - \lambda).$$

detta "la sen-acca".

Ma, la latitudine del punto sub-astrale è la declinazione δ dell'astro A; indefinitiva l'equazione della circonferenza d'altezza è:

$$sin\ h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos(\lambda_a - \lambda)$$

SPECIE DI CIRCONFERENZE D'ALTEZZA

La specie delle circonferenze d'altezza dipende dalla posizione del polo elevato

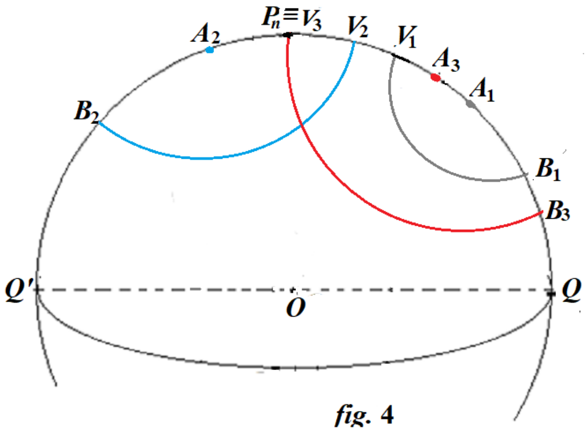


fig. 4

e, per convenzione,

si hanno circonferenze d'altezza:

- di prima specie se il polo elevato è esterno alla circonferenza (colore nero),
- di seconda specie se il polo elevato è interno alla circonferenza (colore blu),
- di terza specie se il polo elevato è sulla circonferenza (colore rosso).

►Dalla *fig.4* nella quale ho distinto una base B_i (con $i = 1, 2, 3$) e un vertice V_i (con $i = 1, 2, 3$) che sono rispettivamente i punti di minima latitudine e di massima latitudine; indicando con δ il valore assoluto della declinazione, si ha:

- per la circonferenza di prima specie è:

$$QA_1 + A_1V_1 < 90°$$
$$\delta + z < 90°$$
$$\delta < 90° - z$$
$$\delta < h$$

- per la circonferenza di seconda specie è:

$$QA_2 + A_2V_2 > 90°$$
$$\delta + z > 90°$$
$$\delta > 90° - z$$
$$\delta > h$$

- per la circonferenza di terza specie è:

$$QA_3 + A_3V_3 = 90°$$
$$\delta + z = 90°$$
$$\delta = 90° - z$$
$$\delta = h$$

pertanto una circonferenza è di prima, seconda, terza specie a seconda che il valore assoluto della declinazione dell'astro sia rispettivamente minore, maggiore, uguale alla sua altezza.

►Ancora dalla *fig.4* dette φ_{B_i} (con $i = 1, 2, 3$) e φ_{V_i} (con $i = 1, 2, 3$) rispettivamente la latitudine della base e la latitudine del vertice, si ha:

- per la circonferenza di prima specie

$$\varphi_{B_1} = QA_1 - B_1A_1 = \delta - z$$

$$\varphi_{V_1} = QA_1 + B_1A_1 = \delta + z$$

- per la circonferenza di seconda specie

$$\varphi_{B_2} = Q'A_2 - B_2A_2 = \delta - z$$

$$\varphi_{V_2} = QV_2 = 180° - Q'A_2 - A_2V_2 = 180° - \delta - z = 180° - (\delta + z)$$

- in modo analogo è per la latitudine della base nella circonferenza di terza specie

$$\varphi_{B_3} = \delta - z$$

mentre il vertice è

$$\varphi_{V_3} = 90°\,.$$

Osservazione 1. Se φ_{B_i} (con $i = 1, 2, 3$) risulta negativa significa che la base B_i cade nell'emisfero opposto in cui cade il vertice V_i .

Osservazione 2. Verifica della validità dell'espressione φ_{V_2} :

$$Q'V_2 = 180° - QV_2 = 180° - [180° - (\delta + z)] = 180° - 180° + (\delta + z) = \delta + z$$

quindi è

$$Q'V_2 - Q'B_2 = \delta + z - (\delta - z) = \delta + z - \delta + z = 2 \cdot z$$

che è proprio il diametro della circonferenza d'altezza.

►ZOMA DI ALTEZZA

Si definisce zona di altezza $\Delta\varphi_{B_iV_i}$ la fascia sferica delimitata dai paralleli passanti per la base B_i e per il vertice V_i della circonferenza d'altezza:

- per le circonferenze di prima specie è:

$$\Delta\varphi_{B_1V_1} = \varphi_{V_1} - \varphi_{B_1} = \delta + z - (\delta - z) = 2 \cdot z$$

- per le circonferenze di seconda specie è:

$$\Delta\varphi_{B_2V_2} = \varphi_{V_2} - \varphi_{B_2} = 180° - (\delta + z) - (\delta - z) = 180° - \delta - z - \delta + z =$$
$$= 180° - 2 \cdot \delta = 2 \cdot (90° - \delta) = 2 \cdot p$$

- per le circonferenze di terza specie è:

$$\Delta\varphi_{B_3V_3} = 90° - (\delta - z) = 90° - \delta + z = 90° - (90° - p) + z = p + z\,,$$

ma essendo, in questa circostanza $p = z$, è:

$$\Delta\varphi_{B_3V_3} = 2 \cdot p = 2 \cdot z$$

►VARIABILITÀ DELL'ANGOLO AL POLO

- per le circonferenze di prima specie mi sevo della figura (*fig.*5)

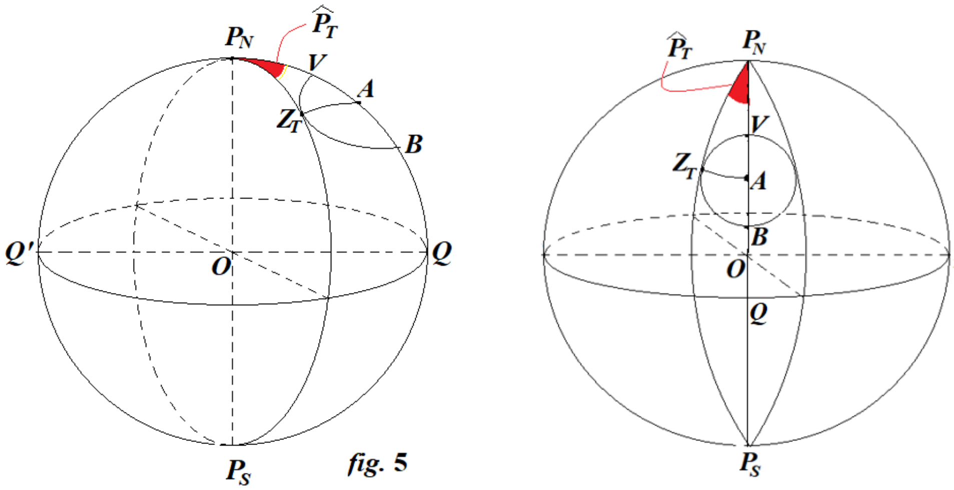


fig. 5

nella quale la seconda è la ruotata, in senso orario per un ipotetico osservatore posto in P_N, della prima.

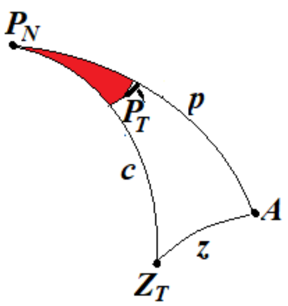
Considerato il meridiano $P_N Z_T P_S$ tangente nel punto Z_T alla circonferenza d'altezza, il triangolo sferico di posizione $P_N Z_T A_1$ è rettangolo in Z_T.

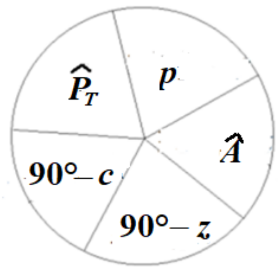
Per scrivere l'equazione che lega gli elementi che mi interessano uso la seguente regola mnemonica di Nepero:

"in ogni triangolo sferico rettangolo, se si sopprime l'angolo retto e si sostituiscono ai cateti i loro complementi, con i 5 elementi così modificati, si ha: *il coseno di uno qualunque dei cinque elementi è uguale al prodotto delle cotangenti dei due elementi adiacenti*".

L'applicazione di questa regola resta più agevole se si utilizza un cerchio suddiviso in 5 settori in cui si scrivono, nell'ordine in cui si leggono in senso orario (o antiorario) i cinque suddetti elementi.

Rappresento solo il triangolo di posizione in cui riporto gli elementi astronomici dell'astro e geografici dell'osservatore tale da potere agevolmente usare il suddetto cerchio suddiviso in 5 settori





Così si ha:

$$\cos(90° - z) = \sin \hat{P}_T \cdot \sin p \quad \Rightarrow \quad \sin \hat{P}_T = \frac{\sin z}{\sin p} = \frac{\cos h}{\cos \delta}$$

ESEMPIO.

Suppongo che l'osservatore rilevi una stella con altezza vera $h = 52°$, allora la funzione $\sin \hat{P}_T$ diventa:

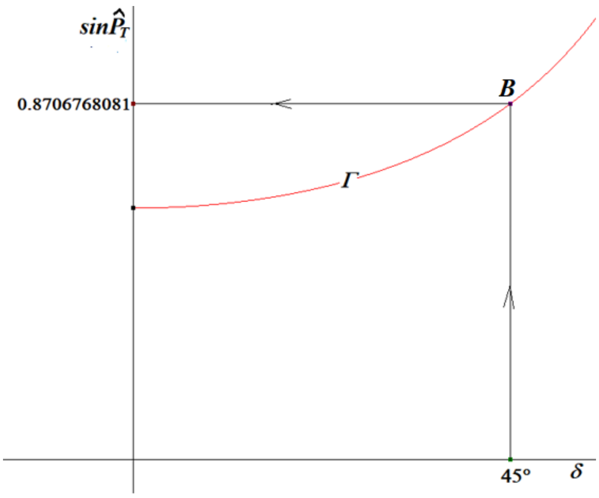
$$\sin \hat{P}_T = \frac{0.6156614753}{\cos\delta}$$

il cui dominio è [0°; 90° [; la funzione per $\delta > 0°$ è crescente e in $\delta = 0°$ ha minimo assoluto.

Considero, ad esempio, la stella Deneb la cui declinazione è $\delta = 45°$ *N*;

Sul grafico, dal valore 45° in ascissa risalgo alla curva *Γ*, grafico della funzione $\sin \hat{P}_T$, individuando il punto *B*.

Dal punto *B* traccio la parallela all'asse delle ascisse ed individuo sull'asse delle ordinate il valore numerico 0.8706768081 a cui corrisponde $\hat{P}_T = 60*32'15''$; questo è il valore assoluto massimo dell'angolo al polo: è proprio quello che viene calcolato dall'osservatore il cui zenit sia Z_T.



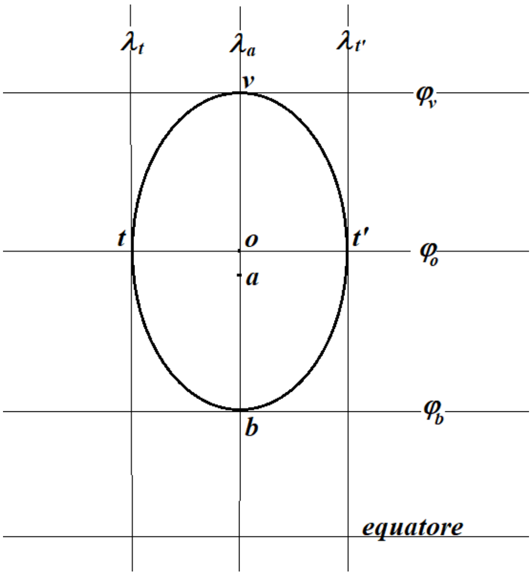
- nelle circonferenze di seconda specie il valore assoluto dell'angolo al polo varia nell'intervallo [0 ; 180°] ;
- nelle circonferenze di terza specie il valore assoluto dell'angolo al polo varia nell'intervallo [0 ; 90°] .

►RAPPRESENTAZIONE DELLE CIRCONFERENZE D'ALTEZZA SULLA CARTA DI MERCATORE

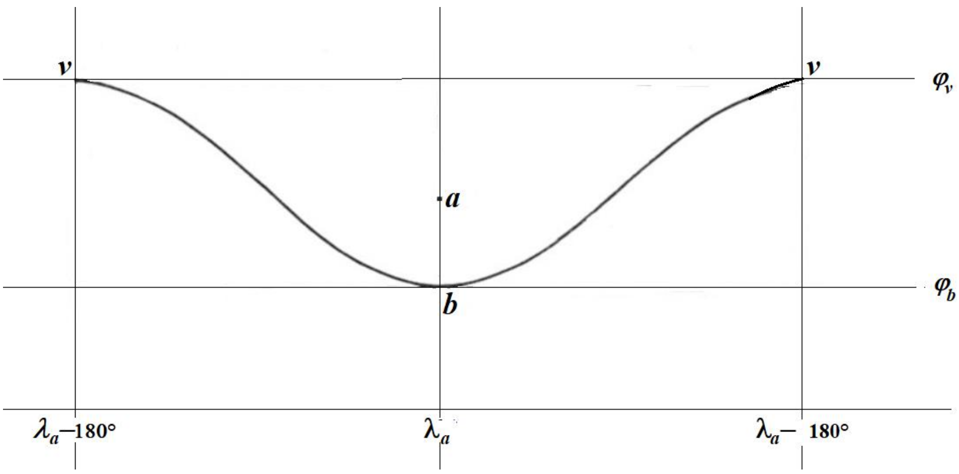
Le circonferenze d'altezza riportate sulla carta di Mercatore si dicono *curve d'altezza*, per ogni specie di circonferenza d'altezza si ha la corrispondente specie di curva di altezza.

■ **Curva di prima specie**. Questa curva è una curva chiusa, compresa nel rettangolo avente:

- per lati verticali i meridiani corrispondenti ai meridiani tangenti alla circonferenza d'altezza in *T* e *T'*, che sulla carta indichiamo con *t* e *t'*;
- per lati orizzontali i paralleli corrispondenti a quelli della base *B* e del vertice *V* della c. d'h., che sulla carta indichiamo con *b* e *v*.

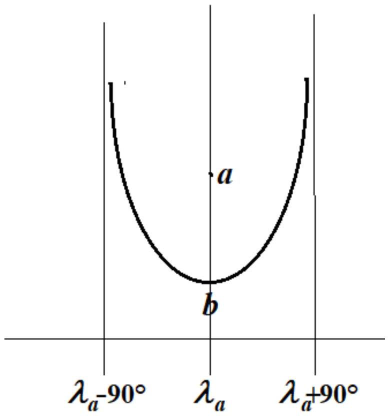


■ **Curva di seconda specie**. La c. d'h di seconda specie incontra tutti i meridiani per cui la curva corrispondente si estende in longitudine in tutto il reticolato della carta di Mercatore La curva è simmetrica rispetto al meridiano del punto sub-astrale di latitudine $\varphi_a = \delta$ ed è compresa tra i paralleli limiti della base e del vertice. Inoltre, essendo la carta di Mercatore isogonica (conserva gli angoli), la curva in *b* e in *v* forma angoli retti con i rispettivi meridiani.



L'andamento della curva di seconda specie è di tipo sinusoidale.

■ **Curva di terza specie**. Nella c. d'h, di terza specie il vertice coincide con uno dei poli geografici. Siccome i poli geografici non sono rappresentabili sulla c. di M. (causa delle latitudini crescenti), la curva d'altezza corrispondente è una curva aperta con minimo nella base *b* e due asintoti, di equazioni $\lambda = \lambda_a \pm 90°$, a cui tende



►ARCO DI CURVA D'ALTEZZA

Per quanto sia interessante il tracciamento della completa curva d'altezza, ai fini pratici non è proprio necessario e comunque sarebbe una operazione ardua perché il tracciamento sulla carta di Mercatore avverrebbe per punti. È vero che tale curva è un luogo di posizione dell'osservatore, ma di essa ne serve il tracciamento solamente di un conveniente arco. Vediamo il perché: sulle navi è sempre noto il punto stimato P_S il quale rappresenta il centro di una calotta sferica, avente raggio ε pari all'errore massimo del punto stimato stesso di coordinate $(\varphi_S;\lambda_S)$; entro tale calotta deve trovarsi certamente la nave. Tale callotta di raggio ε, variabile da caso a caso, è detta *calotta d'errore* o *calotta di certezza* perché la nave si trova certamente dentro a questo cerchio oppure *calotta di incertezza* perché la nave, pur sapendo che è dentro a tale cerchio, non è nota, ovvero incerta.

La variabilità del raggio ε dipende dal tempo trascorso dall'ultima osservazione, dalle condizioni più o meno favorevoli del mare, da correnti non note e da eventuali venti; è l'ufficiale di rotta che deve saper valutare tutte i precedenti eventi.

La *fig.a* riporta la rappresentazione sulla sfera celeste e la *Fig.b* la corrispondente sulla superficie terrestre. Le due figure sono tra loro proporzionali e, in particolare, perfettamente sovrapponibili se, per l'arbitrarietà del raggio della sfera celeste, nel caso che quest'ultimo si considerasse uguale a quello della Terra.

Nella *fig.a* è:

- *A* l'astro rilevato,
- *MDN* l'arco di circonferenza d'altezza compreso nella callotta di certezza,
- *AD* l'arco di circolo massimo perpendicolare alla c, d'h. nel punto *D*,
- *CC'* l'arco di circonferenza massima tangente alla c. d'h. nel suo *D*,

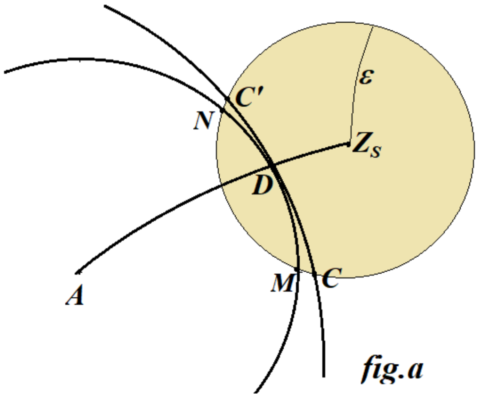


fig.a

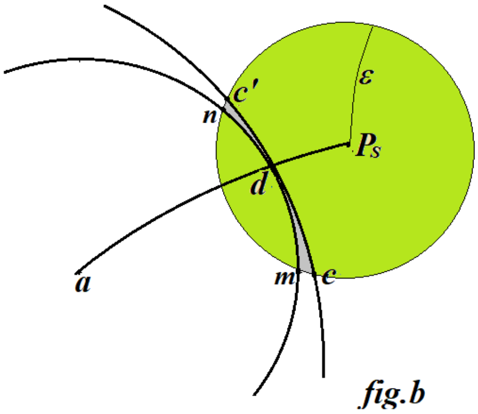


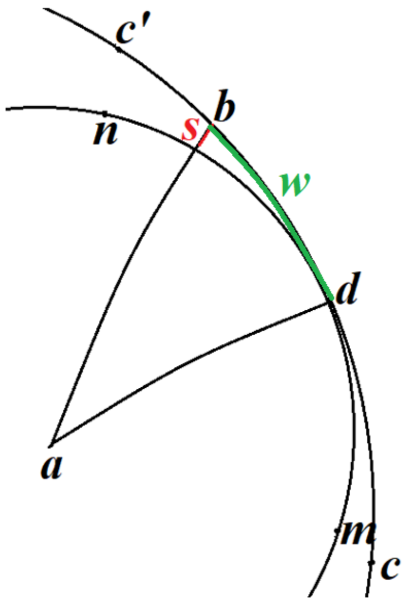
fig.b

Pertanto basterà tracciare sulla carta di Mercatore solamente l'arco di circolo massimo *cc'*, il corrispondente dell'arco *CC'*.

Considerato poi che il valore massimo di ε è di poche miglia (dell'ordine di 3 o 4 miglia) si può sostituire all'arco *cc'* di circonferenza massima l'arco *ll'* di lossodromia che è rappresentata sulla C. di M. da una retta; nasce la così detta "*retta d'altezza*". Il minimo numero di rette d'altezza per determinare il punto nave è 2.

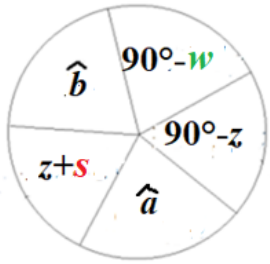
Non entriamo nella teoria del numero ottimale di retta d'altezza per determinare il punto nave più attendibile in virtù della minimizzazione degli errori sistematici e accidentali, demandando questa questione allo studio su un libro di testo.

Ci interessa invece di determinare lo scostamento *s* dell'arco circonferenza massima *cc'* dall'arco di curva d'altezza *mn*. Allo scopo mi servo della seguente figura



nella quale, per le suddette posizioni, il triangolo adb e un triangolo sferico rettangolo essendo $\hat{d} = 90°$.

Applico a tale triangolo la stessa regola di Nepero prima utilizzata; mi servo del seguente cerchio diviso in 5 settori



$$\cos(z+s) = \sin(90° - w) \cdot \sin(90° - z)$$

$$\cos(z+s) = \cos w \cdot \cos z$$

$$\cos z \cdot \cos s - \sin z \cdot \sin s = \cos w \cdot \cos z \qquad \textbf{(*)}$$

Lo scostamento s è piuttosto piccolo e quindi si possono fare le seguenti approssimazioni:

- $\cos s \cong 1$,
- $\sin s \cong s \cdot \sin 1'$;

inoltre lo sviluppo in serie di *Mc Laurin* del coseno è:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1^n) \cdot \frac{x^{2 \cdot n}}{(2 \cdot n)!} + o(x^{2 \cdot n+1})$$

Nel caso in oggetto la serie si può approssimare al secondo termine, pertanto la **(*)** diventa:

$$\cos z \cdot 1 - \sin z \cdot s \cdot \sin 1' = \left(1 - \frac{w^2}{2!}\right) \cdot \cos z$$

$$\cos z - \sin z \cdot s \cdot \sin 1' = \cos z - \frac{w^2}{2} \cdot \cos z$$

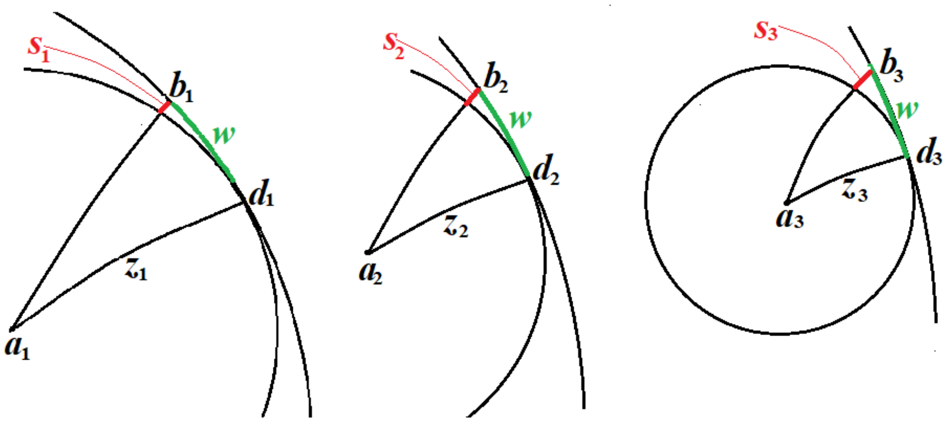
$$-\sin z \cdot s \cdot \sin 1' = -\frac{w^2}{2} \cdot \cos z$$

$$s = \frac{w^2}{2 \cdot \sin 1'} \cdot \cot z$$

$$s = \frac{w^2}{2 \cdot \sin 1'} \cdot \tan h;$$

si deduce che lo scostamento s dalla circonferenza d'altezza della circonferenza massima ad essa tangente è direttamente proporzionale alla tangente goniometrica dell'altezza e al quadrato della distanza w di b da d.

►Anche l'occhio vuole la sua parte:



Nella figura sono riportate le situazioni di tre astri A_1, A_2, A_3 i cui rispettivi punti sub-astrali sona a_1, a_2, a_3. In essa è:

$$z_1 > z_2 > z_3 \quad \Rightarrow \qquad h_1 < h_2 < h_3 \ ;$$

considerato

$$d_1 b_1 = d_2 b_2 = d_3 b_3 = w$$

si rileva

$$s_1 < s_2 < s_3 \,.$$

OSSERVAZIONE. L'operatore "!" si chiama "*fattoriale*" la cui definizione è: il fattoriale di un numero naturale *n*, indicato con $n!$, è uguale al prodotto del numero *n* moltiplicato per tutti i numeri interi che lo precedono:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ...... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \,;$$

nel nostro caso abbiamo usato $2!$, ed allora è: $2! = 2 \cdot 1 = 2$.

Tracciamento per punti della circonferenza di altezza sulla carta nautica

Il metodo per tracciare una parte di circonferenza d'altezza sulla carta di Mercatore è quello di determinare le coordinate geografiche di un numero opportuno di punti appartenenti alla circonferenza stessa. Successivamente si riportano i suddetti punti sulla carta e si uniscono; la curva (o meglio la spezzata) che si ottiene rappresenta sulla carta quella porzione di circonferenza d'altezza.

Questi punti si determinano stabilendo nota una delle due coordinate geografiche, pertanto si applica il metodo di intersezione della circonferenza d'altezza con un:

1. **meridiano** di nota longitudine λ e si determinano le corrispondenti latitudini φ' e φ'': si tratta di un calcolo di latitudine,

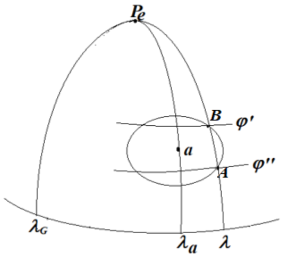


Fig.1

2. **parallelo** di nota latitudine φ e si determinano le corrispondenti longitudini λ' e λ'': si tratta di un calcolo di longitudine.

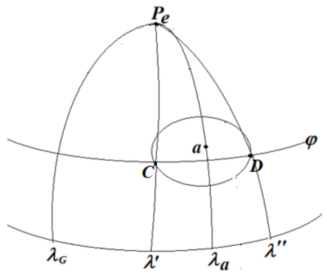


Fig. 2

►Consideriamo il **caso 1**. Partiamo dal teorema di Eulero la cui equazione notoriamente è:

$$\sin h = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos\hat{P}$$

nella quale è $\hat{P} = \lambda - \lambda_a$:

$$\sin h = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos(\lambda - \lambda_a) \qquad (1)$$

moltiplico e divido per $\sin\delta$ il secondo termine del secondo membro della (1)

$$\sin h = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\delta} \cdot \cos(\lambda - \lambda_a),$$

e metto in evidenza, a secondo membro, $\sin\delta$:

$$\sin h = \sin\delta \cdot [\sin\varphi + \cos\varphi \cdot \cot\delta \cdot \cos(\lambda - \lambda_a)]. \qquad (2)$$

Assumo un arco di comodo κ che chiamo "ausiliario", compreso tra 0° e 90°, tale che sia:

$$\cot\delta \cdot \cos(\lambda - \lambda_a) = \cot\kappa; \qquad (3)$$

con la posizione fatta, essendo $\cot\kappa = \frac{\cos\kappa}{\sin\kappa}$, la (2) diventa:

$$\sin h = \sin \delta \cdot \left(\sin \varphi + \cos \varphi \cdot \frac{\cos \kappa}{\sin \kappa} \right)$$

$$\sin h = \sin \delta \cdot \frac{\sin \varphi \cdot \sin \kappa + \cos \varphi \cdot \cos \kappa}{\sin \kappa}$$

$$\sin h = \sin \delta \cdot \frac{\cos(\varphi - \kappa)}{\sin \kappa} \qquad (4)$$

Risolvo la (4) rispetto a $\cos(\varphi - \kappa)$, ed essendo $\frac{1}{\sin \delta} = \csc \delta$, è:

$$\cos(\varphi - \kappa) = \sin h \cdot \csc \delta \cdot \sin \kappa \qquad (5)$$

La (3) e la (5) costituiscono il sistema che risolve il nostro problema, assumendo le seguenti regole dei segni:

- δ positiva se omonima a φ; δ negativa se eteronima a φ.
- κ positivo se $\cot \kappa$ è positivo; κ negativo se $\cot \kappa$ è negativo.

Operativamente:

- si calcola, mediante la (3), l'arco ausiliario κ, con relativo segno;
- si sostituisce, nella (5), l'arco κ determinato e si calcolano le due corrispondenti latitudini φ' e φ'';
- si posizionano sulla carta di Mercatore i due punti $A(\varphi'; \lambda)$ e $B(\varphi''; \lambda)$. (vedi *Fig*.1)

OSSERVAZIONE. In modo analogo si procede nel caso 2., determinando le coordinate dei punti $C(\varphi; \lambda')$ e $D(\varphi; \lambda'')$. (vedi *Fig*.2)