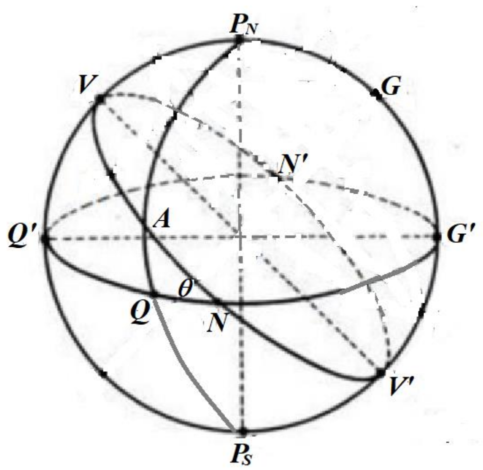
UN METODO PER DETERMINARE L'EQUAZIONE DEL CIRCOLO MASSIMO E QUINDI DELL'ORTODROMIA

Nella figura sono rappresemtati sulla superficie terrestre:

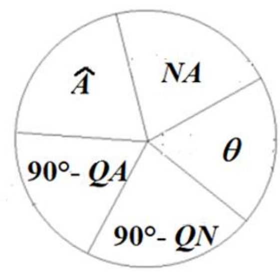
- l'equatore *Q'Q*
- la circonferenza massima avente veritici *V* e *V*' e nodi *N* e *N*'
- il meridiano di Greenwich P_n *G G'*P_s
- il generico punto (punto corrente la circonferenza massima) *A* di coordinate $(\varphi; \lambda)$
- l'angolo sferico θ di inclinazione della circonferenza massima sull'equatore



►Considero il triangolo sferico *AQN*; tale triangolo è rettangolo in *Q* e quindi posso scrivere l'equazione che lega gli elementi che mi interessano mediante la regola mnemonica di Nepero; nel caso è quella di tre elementi vicini:

"in ogni triangolo sferico rettangolo, se si sopprime l'angolo retto e si sostituiscono ai cateti i loro complementi, con i 5 elementi così modificati, si ha: *il coseno di uno qualunque dei cinque elementi è uguale al prodotto delle cotangenti dei due elementi adiacenti*".

L'applicazione di questa regola resta più agevole se si utilizza un cerchio suddiviso in 5 settori in cui si scrivono, nell'ordine in cui si leggono in senso orario (o antiorario) i cinque suddetti elementi.



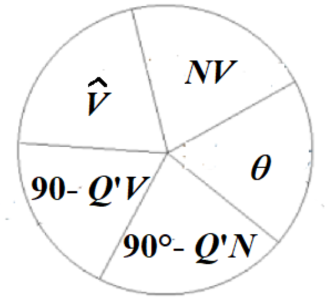
Pertanto posso scrivere:

$$\cos(90° - QN) = \cot(90° - QA) \cdot \cot\theta$$

$$\sin QN = \tan QA \cdot \cot\theta$$

$$\sin(\lambda - \lambda_N) = \tan\varphi \cdot \cot\theta \qquad (1)$$

► Considero il triangolo sferico *VQ'N*; tale triangolo è rettangolo in *Q'* e quindi opero in modo analogo al precedente triangolo



$$\cos(90° - Q'N) = \cot(90° - Q'V) \cdot \cot\theta$$

$$\sin Q'N = \tan Q'V \cdot \cot\theta$$

essendo $Q'N$ = 90°, è:

$$1 = \tan\varphi_V \cdot \cot\theta \qquad (2)$$

►Metto a sistema la (1) con la (2):
risolvo entrambe rispetto a $\cot\theta$ ed uguaglio i rispettivi secondi membri:

- dalla (1)

$$\cot\theta = \frac{\sin(\lambda - \lambda_N)}{\tan\varphi}$$

- dalla (2)

$$\cot\theta = \cot\varphi_V$$

pertanto è:

$$\frac{\sin(\lambda - \lambda_N)}{\tan\varphi} = \cot\varphi_V \quad \Rightarrow \quad \sin(\lambda - \lambda_N) = \tan\varphi \cdot \cot\varphi_V \qquad (3)$$

considerato che le longitudini dei nodi differiscono di 90° rispetto a quelle dei vertici, trasformo opportunamente il primo membro della (3):

$$\sin(\lambda - \lambda_N) = \sin[\lambda - (\lambda_V - 90°)] = \sin(\lambda - \lambda_V + 90°) = \sin[90° - (\lambda_V - \lambda)] = \cos(\lambda_V - \lambda)$$

allora la (3) diventa

$$\cos(\lambda_V - \lambda) = \tan\varphi \cdot \cot\varphi_V \qquad (4)$$

La (4) è l'equazione della circonferenza massima (e quindi di qualunque ortodromia che sia su di essa) espressa mediante le coordinate di uno dei vertici.

OSSERVAZIONE 1. Le (1), (3) e (4) sono equazioni equivalenti e quindi esprimono analiticamente lo stesso luogo geometrico, rispettivamente mediante i parametri:

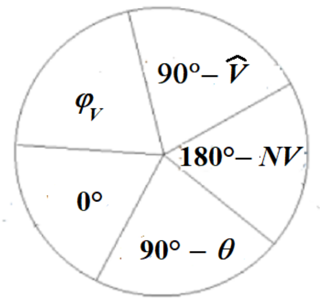
1. la longitudine di un nodo λ_N e l'angolo θ di inclinazione della circonferenza massima sull'equatore;
2. la longitudine di un nodo λ_N e la latitudine di un vertice φ_V;
3. le coordinate di un vertice $(\varphi_V;\lambda_V)$.

In generale è utilizzata la (3); perciò sui libri di testo vi è scritto solitamente: **i parametri dell'ortodromia sono la latitudine φ_V e la longitudine λ_V di uno dei nodi.**

OSSERVAZIONE 2. Per giungere all'equazione (3) sono partito da λ_N e θ che individuano una ed una sola circonferenza massima, allo stesso modo come, sul piano cartesiano, una retta viene individuata univocamente conoscendone il coefficiente angolare *m* e l'ordinata all'origine *q*: $y = m \cdot x + q$, in cui $(x; y)$ sono le coordinate del generico punto sulla retta.

OSSERVAZIONE 3. Il triangolo *VQ'N* è anche rettilatero e quindi si può utilizare la regola mnemonica di Nepero:

"in ogni triangolo sferico rettilatero, se si sopprime il lato retto, si sostituiscono agli angoli adiacenti al lato retto i loro complementari e si sostituisce all'angolo opposto al lato retto il suo supplementare, con i 5 elementi così modificati, si ha: *il coseno di uno qualunque dei cinque elementi è uguale al prodotto delle cotangenti dei due elementi adiacenti*".



da cui:

$$\cos 0° = \cot \varphi_V \cdot \cot(90° - \vartheta)$$

$$1 = \cot \varphi_V \cdot \tan \vartheta$$

che è equivalente alla (2), infatti se il prodotto di due numeri è l'unità, i due fattori sono numeri tra loro reciproci ed allora il prodotto dei rispettivi reciproci è ancora uguale all'unità.

ESEMPIO.

Per semplificare i calcoli suppongo *V* (45°*N*; 0°); pertanto, in questa circostanza, l'equazione (4) diventa:

$$\cos(-\lambda) = \tan \varphi$$

ed essendo, per un generico angolo *x*, $\cos(-x) = \cos x$, è:

$$\cos \lambda = \tan \varphi \qquad (5)$$

Prendo ora un punto *A* del circolo massimo avente longitudine λ_A= 60°*E*, la cui latitudine corrispondente proviene dall'equazione (5)

$$0.5 = \tan\varphi_A$$

per cui è φ_A = 26°33’54.18’’*N* e quindi:

A (26°33’54.18’’*N*; 60°*E*).

Ora prendo un secondo punto *B* del circolo massimo; per comodità prendo il punto *B* coincidente col nodo *N* di longitudine 90°*E*, quindi è:

B (0°; 90°*E*).

Proviamo ora che con i due punti *A* e *B* ritroviamo il vertice *V*.

Dalla (4), per la condizione di appartenenza, otteniamo:

a. per il punto *A*, è

$$\cos(\lambda_V - 60°) = \cot\varphi_V \cdot \tan 26°33'54.18'' \qquad (6)$$

b. per il punto *B*, è

$$\cos(\lambda_V - 90°) = 0 \qquad (7)$$

Le (6) e (7) costituiscono un sistema nelle variabili φ_V e λ_V; risolviamolo:

dalla (7) abbiamo:

$\lambda_V -$ 90° = ±90° da cui λ_V = 0° o λ_V =180°.

_ per λ_V = 0°, dalla (6), otteniamo:

$$\cos(-60°) = \cot\varphi_V \cdot \tan 26°33'54.18'' \quad \Rightarrow \quad \varphi_V \cong +44°59'59.99''$$

che, approssimato, porge la latitudine φ_V = 45° *N* del vertice assegnato;

_ per λ_V = 180°, dalla (6), otteniamo:

$$\cos(120°) = \cot\varphi_V \cdot \tan 26°33'54.18'' \quad \Rightarrow \quad \varphi_V \cong -44°59'59.99''$$

che approssimato, porge la latitudine φ_V = 45° *S* dell’altro vertice.