PROBLEMA (Testo del Prof. Manlio Milazzo)

Una torre si trova al centro di un lago rotondo.

Da un punto qualsiasi *P* del bordo del lago si misura l'angolo α di elevazione della torre pari a 63°26'06".

Quando il Sole è a sud la torre proietta un'ombra che si protende oltre il lago di 8 metri, mentre quando è ad ovest l'ombra si protende oltre il bordo di 140 metri.

La distanza tra le estremità delle due ombre è di 195 m.

Calcolare:

1) il raggio del cerchio in cui si trova il lago.

2) l'altezza della torre.

3) La latitudine dell'osservatore.

SOLUZIONE

Rappresentiamo la situazione graficamente:

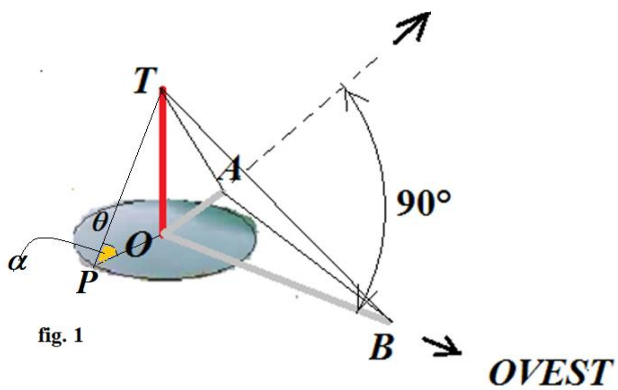


fig. 1

Nella fig.1 compaiono i triangoli:

1. *AOB*, rettangolo in *O*, sul piano orizzontale θ dello specchio acqueo,
2. *AOT*, rettangolo in *O*, verticale al piano θ,
3. *BOT*, rettangolo in *O*, verticale al piano θ.

► Calcoliamo la misura del raggio della circonferenza, contorno del lago, mediante il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo *OBA* (fig. 2)

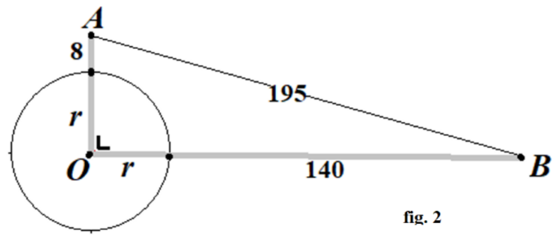


fig. 2

$$(r+8)^2+(r+140)^2=195^2$$

sviluppo e ordino secondo le potenze decrescenti di *r*:

$$2\cdot r^2+296\cdot r-18361=0$$

le cui radici sono:

$$r_1=-\frac{3\cdot\sqrt{6514}}{2}-74\ ;\quad r_2=\frac{3\cdot\sqrt{6514}}{2}-74$$

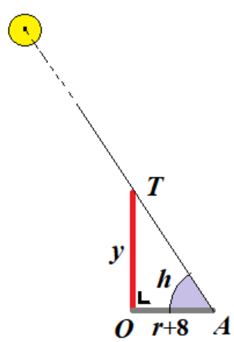
nel contesto geometrico +del problema scegliamo la radice positiva, che approssimiamo; pertanto è:

$$raggio=r=r_2\cong 47.06m\ .$$

Indichiamo l'altezza della torre con *y*, ed essendo noto l'angolo α di elevazione, abbiamo (triangolo *POT* della fig. 1):

$$y=r\cdot\tan\alpha=47.06\cdot\tan(63°26'06'')\cong 94.12m$$

■ Calcoliamo l'altezza meridiana che indico con *h*; riportiamo la figura del triangolo *AOT*



da esso abbiamo

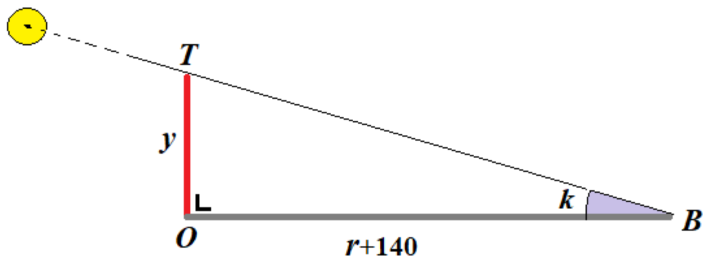
$$\tan h=\frac{y}{r+8}=\frac{94.12}{47.06+8}\cong 1.709407919\ ;$$

determiniamo *h*:

$$h = \arctan 1.709407919 \cong 59°40'20'' , \qquad (1)$$

che è l'altezza del centro del Sole al passaggio al meridiano superiore dell'osservatore.

■ Calcoliamo l'altezza al primo verticale occidentale che indico con *k*; riportiamo il triangolo *BOT*



da esso abbiamo:

$$\tan k = \frac{y}{r+140} = \frac{94.12}{47.06+140} \cong 0.503154068 ;$$

calcoliamo *k*:

$$k = \arctan(0.503154068) \cong 26°42'34''$$

che è l'altezza del centro del Sole al passaggio al primo verticale occidentale.

►Indichiamo con φ la latitudine dell'osservatore e con δ la declinazione del Sole.

■ Per quanto concerne il passaggio del Sole al meridiano superiore dell'osservatore sappiamo che vale la seguente equazione algebrica:

$$z = \varphi - \delta \qquad (2)$$

nella quale il segno di φ e δ è positivo se di nome nord, di segno negativo se di nome sud; anche z assume (algebricamente) un segno: positivo se l'azimut è 180°, negativo se l'azimut è 0° (ovviamente in qualunque equazione successiva ove compaia la distanza zenitale, essa va presa in valore assoluto);

risolviamo l'equazione (2) rispetto alla variabile δ:

$$\delta = \varphi - z$$

ma due angoli uguali hanno seni uguali, quindi

$$\sin\delta = \sin(\varphi - z)$$

per l'espressione del seno di una differenza di angoli, è

$$\sin\delta = \sin\varphi \cdot \cos z - \cos\varphi \cdot \sin z$$

e per la relazione goniometrica degli archi complementari

$$\sin\delta = \sin\varphi \cdot \sin h - \cos\varphi \cdot \cos h$$

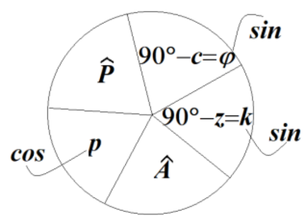
Sostituiamo ad h il valore dell'espressione prima calcolato e otteniamo una equazione in due variabili φ e δ:

$$\sin\delta = \sin\varphi \cdot \sin(59°40'20'') - \cos\varphi \cdot \cos(59°40'20'') \qquad (3)$$

■ Per quanto concerne il passaggio del Sole al primo verticale occidentale, in virtù di una regola mnemonica di Nepero per i triangoli rettangoli (l'angolo azimutale è 90°) otteniamo un'altra equazione in φ e δ:

$$\sin\delta = \sin(26°42'34'') \cdot \sin\varphi \qquad (4)$$

infatti, in riferimento al triangolo sferico della figura a pag.6, essendo $\hat{Z} = 90°$, usiamo la seguente regola "in ogni triangolo sferico rettangolo, se si sopprime l'angolo retto e si sostituiscono ai cateti i loro complementi, con i 5 elementi così modificati, si ha: "*il coseno di uno qualunque dei cinque elementi è uguale al prodotto dei seni dei due elementi lontani*". L'applicazione di questa regola resta più agevole se si utilizza un cerchio suddiviso in 5 settori in cui si scrivono, nell'ordine in cui si leggono in senso orario (o antiorario) i cinque suddetti elementi.



pertanto è $\cos p = \sin k \cdot \sin\varphi$, da cui la (4).

la simultaneità delle equazioni (3) e (4) costituisce un sistema che risolviamo col "*metodo del confronto*"

$$\sin(26°42'34'') \cdot \sin\varphi = \sin\varphi \cdot \sin(59°40'20'') - \cos\varphi \cdot \cos(59°40'20'') \qquad (5)$$

L'equazione (5) è una equazione lineare in seno e coseno; esprimiamo $\sin x$ e $\cos x$ mediante $t = \tan\frac{x}{2}$;

essendo $\sin\varphi = \frac{2 \cdot t}{1+t^2}$ e $\cos\varphi = \frac{1-t^3}{1+t^2}$, la (4) diventa:

$$0.44947 \cdot \frac{2 \cdot t}{1+t^2} = 0.86315 \cdot \frac{2 \cdot t}{1+t^2} - 0.50495 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$0.44947 \cdot 2 \cdot t = 0.86315 \cdot 2 \cdot t - 0.50495 \cdot (1-t^2),$$

che conviene scrivere:

$$0.50495 \cdot t^2 + 0.82736 \cdot t - 0.50495 = 0$$

la cui radice accettabile è t = 0.473487831 , e per la posizione fatta, è:

$$\tan\frac{\varphi}{2} = 0.473487831 \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi}{2} = 25°20'13''\,N \quad \Rightarrow \quad \varphi = 50°\ 40'\ 26''\ N.$$

Dalla (4), abbiamo:

$$\sin\delta = \sin(26°42'34'') \cdot \sin 50°40'26'' = 0.347685286$$

da cui

$$\delta = 20°20'45''N$$

VERIFICA

Sostituiamo i valori calcolati della latitudine e della declinazione nell'equazione (1) e otteniamo la distanza zenitale meridiana:

$$z = 50°\ 40'\ 26'' - 20°20'45'' = 30°19'41'' \qquad (6)$$

calcoliamo la corrispondente altezza meridiana

$$h = 90° - 30°19'41'' = 59°40'19''; \qquad (7)$$

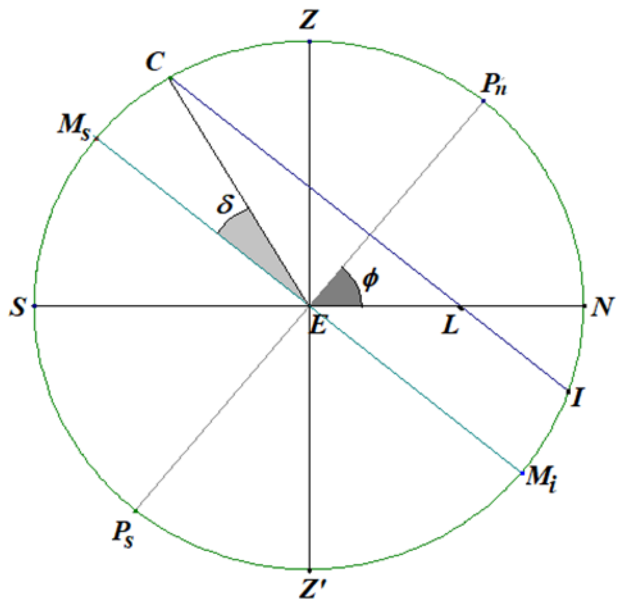
la (7) e la (1) differiscono di pochissimo: la loro differenza dipende dalle successive approssimazioni eseguite durante il procedimento.

OSSERVAZIONE. il segno positivo ottenuto, per la distanza zenitale meridiana (6) conferma l'"*algebrigità*" dell'equazione (2): "osservando un astro in meridiano con faccia rivolta verso *SUD*, la distanza zenitale meridiana risulta positiva".

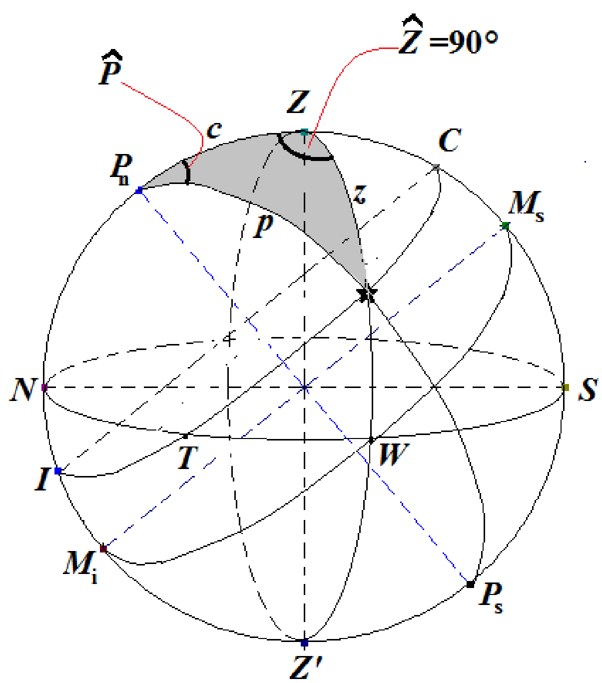
RAPPRRENTAZIONI GRAFICHE

● Rappresentiamo la situazione del passaggio del Sole in meridiano mediante la *proiezione ortografica meridiana*. La scelta di questa proiezione è perché (diciamo così) è isogona rispetto alle coordinate che si misurano sul *meridiano celeste* o *meridiano dell'osservatore*; esse sono latitudine e colatitudine, declinazione e distanza polare, altezza e distanza zenitale.

OSSERVAZIONE. Ricordiamo che per meridiano celeste si intende la circonferenza massima, della sfera celeste, che contiene i poli dell'equatore celeste e i poli dell'orizzonte astronomico, ovvero la circonferenza massima $P_n Z P_s Z'$.



● Rappresentiamo la situazione del passaggio del Sole al primo verticale occidentale mediante una figura "scenografica"



In essa non abbiamo rappresentato, per non appesantire la figura, la semicirconferenza orientale dell'equatore, né la semicirconferenza orientale del parallelo di declinazione.