PREMESSA

Il cerchio di Apollonio è il luogo geometrico dei punti del piano tali che il rapporto delle loro distanze da due punti fissi *A* e *B* è costante.

OSSERVAZIONE. In alcuni testi viene riportato il termine "*circolo*" al posto di "*cerchio*", ed in altri si legge il termine "*circonferenza*". In generale in geometria non viene usato il termine "*circolo*", ma solo gli altri due.

Non ricordo in quale epoca si sia iniziato a fare una netta distinzione tra circonferenza e cerchio, ma il distinguo tra i due termini esiste ed ecco le due definizioni che lo evidenziano:

circonferenza: *è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso detto centro*;

cerchio: *è la parte di piano formata dai punti della circonferenza e da tutti i punti interni ad essa*.

►Porto un esempio che riguarda l'astronomia nautica: se in un istante si misura l'altezza vera *h* di un determinato astro *A*, lo zenit *Z* dell'osservatore si trova sul cerchio minore avente centro in *A* e raggio sferico pari alla distanza zenitale $z = 90° - h$; tale cerchio minore (massimo se *h*=0) è definito **cerchio d'altezza**.

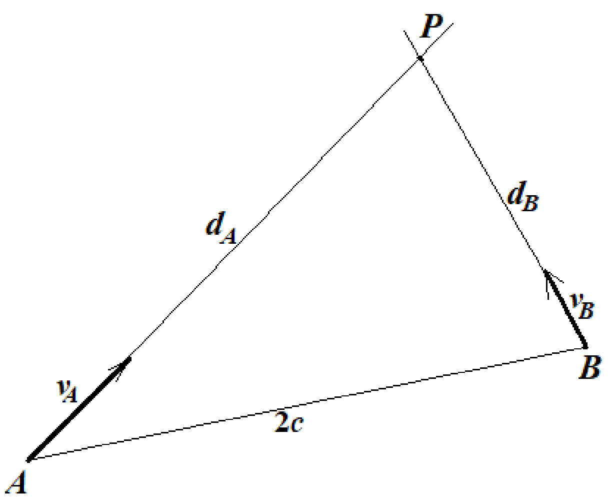
Ebbene per il precedente distinguo, non si dovrebbe parlare di *cerchio d'altezza* bensì di *circonferenza d'altezza*; ma, per un fatto storico, continuiamo a parlare di *cerchi d'altezza*.

PROBLEMA (Testo del Prof. Manlio Milazzo)

Due navi A e B sono in rotta di collisione; le loro velocità sono rispettivamente v_A e v_B ed inizialmente la loro distanza è $2 \cdot c$. (Testo del Prof. Manlio Milazzo)

Determinare il luogo dei punti di possibile collisione.

SOLUZIONE



Indichiamo le distanze delle navi dal punto ipotetico *P* di collisione rispettivamente con d_A e d_B; detto Δt l'intervallo di tempo necessario a giungere contemporaneamente nel punto *P* (intersezione delle rotte), possiamo scrivere:

$$\left.\begin{aligned}\Delta t &= \frac{d_A}{v_A} \\ \\ \Delta t &= \frac{d_B}{v_B}\end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{d_A}{v_A} = \frac{d_B}{v_B}.$$

Se le velocità delle due navi rimangono costanti nell'intervallo di tempo Δt, allora è:

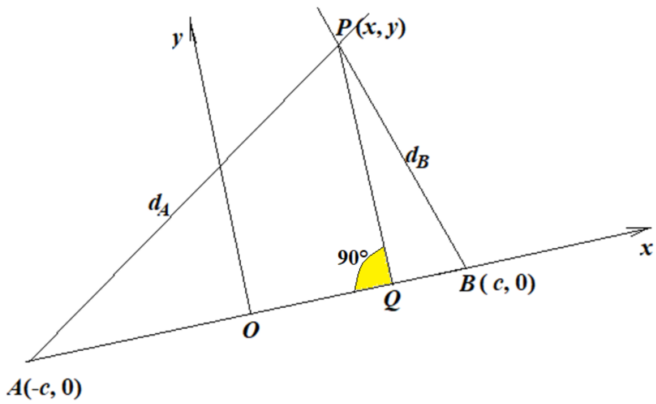
$$\frac{d_A}{v_A} = \frac{d_B}{v_B} = k \qquad \text{dove } k \text{ è una costante}$$

e, per una nota proprietà delle proporzioni, possiamo scrivere:

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{v_A}{v_B} = k\,. \qquad (1)$$

Il punto *P* descrive una curva, **luogo geometrico** dei punti del piano in cui è costante il rapporto delle distanze dai due punti fissi *A* e *B*. Vogliamo determinare l'equazione di questo luogo geometrico (*circonferenza di Apollonio*). Allo scopo, riferiamo la figura ad un piano cartesiano avente:

- centro *O* coincidente col punto medio del segmento *AB*,
- asse delle ascisse *x* coincidente con la retta *AB*,
- asse delle ordinate *y* coincidente con l'asse del segmento *AB*.



Dalla (1), abbiamo:

$$\frac{d_A^2}{d_B^2} = k^2 \qquad (2)$$

Dai due triangoli rettangoli *AQP* e *BQP* (*Q* è piede della perpendicolare condotta da *P* su *AB*), scriviamo per il teorema di Pitagora:

$$d_A^2 = (x+c)^2 + y^2$$

$$d_B^2 = (x-c)^2 + y^2$$

Allora la (2) diventa:

$$\frac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2} = k^2$$

$$x^2 + 2 \cdot c \cdot x + c^2 + y^2 = k^2 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot c \cdot x + c^2 + y^2\right)$$

$$\left(1-k^2\right) \cdot x^2 + \left(1-k^2\right) \cdot y^2 + 2 \cdot c \cdot \left(1+k^2\right) \cdot x + \left(1-k^2\right) \cdot c^2 = 0 \qquad (3)$$

La (3) è l'equazione di una circonferenza in quanto trattasi di un'equazione algebrica di secondo grado in due variabili nella quale manca il termine rettangolare ed i termini quadratici hanno coefficienti uguali.

Scriviamo la (3) nella forma canonica (coefficienti quadratici unitari) rispetto alla quale esistono le espressioni per calcolare le coordinate del centro e la misura del raggio (elementi necessari per disegnare una circonferenza); dividiamo ambo i membri della (3) per $1-k^2$, nella condizione $k \neq \pm 1$:

$$x^2 + y^2 + 2 \cdot c \cdot \frac{1+k^2}{1-k^2} \cdot x + c^2 = 0,$$

dalla quale:

- le coordinate del centro sono: $C\left(c \cdot \frac{k^2+1}{k^2-1};0\right)$
- la misura del raggio è:
  $r = \sqrt{c^2 \cdot \frac{k^4 + 2 \cdot k^2 + 1}{k^4 - 2 \cdot k^2 + 1} - c^2} = c \cdot \sqrt{\frac{k^4 + 2 \cdot k^2 + 1 - k^4 + 2 \cdot k^2 - 1}{\left(k^2-1\right)^2}}$ e,

  considerando $k > 1$, è: $r = 2 \cdot \frac{k \cdot c}{k^2 - 1}$.

Assumiamo i due punti fissi *A* e *B* e consideriamo il punto $P(x;y)$ corrente del piano cartesiano tale che sia $\frac{PA}{PB} = costante$; prendiamo i due punti con dati scelti a piacere: $A(-5;0)$ e $B(5;0)$.
Scriviamo l'espressione della distanza *PA*:

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-(-5))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 10 \cdot x + 25}$$

Scriviamo l'espressione della distanza *PB*:

$$\overline{PB} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 10 \cdot x + 25}$$

Scriviamo il rapporto $\frac{PA}{PB}$, ponendo, per esempio, $k = \frac{6}{5}$:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 10 \cdot x + 25}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 10 \cdot x + 25}} = \frac{6}{5}$$

Quadriamo ambo i membri

$$\frac{x^2+y^2+10\cdot x+25}{x^2+y^2-10\cdot x+25}=\frac{36}{25} \qquad \Rightarrow \qquad 11\cdot x^2+11\cdot y^2-610\cdot x+275=0$$

è una equazione di secondo grado, in due variabili, in cui manca il termine rettangolare ed i termini quadratici hanno ugual coefficiente e quindi è l'equazione di una circonferenza; trasformiamola nella forma canonica rispetto alla quale esistono le espressioni per determinare le coordinate del centro e la misura del raggio

$$x^2+y^2-\frac{610}{11}\cdot x+\frac{275}{11}=0 \qquad (4)$$

l'equazione è del tipo

$$x^2+y^2+m\cdot x+n\cdot y+p=0$$

in cui è:

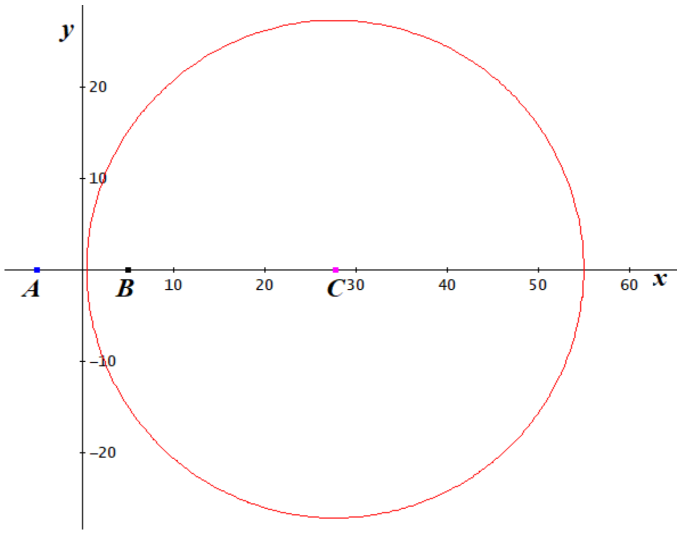
- centro $\quad C\left(-\frac{m}{2};-\frac{n}{2}\right)$
- raggio $\quad r=\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2-p}$

Per l'equazione (4) le coordinate del centro e la misura del raggio sono rispettivamente:

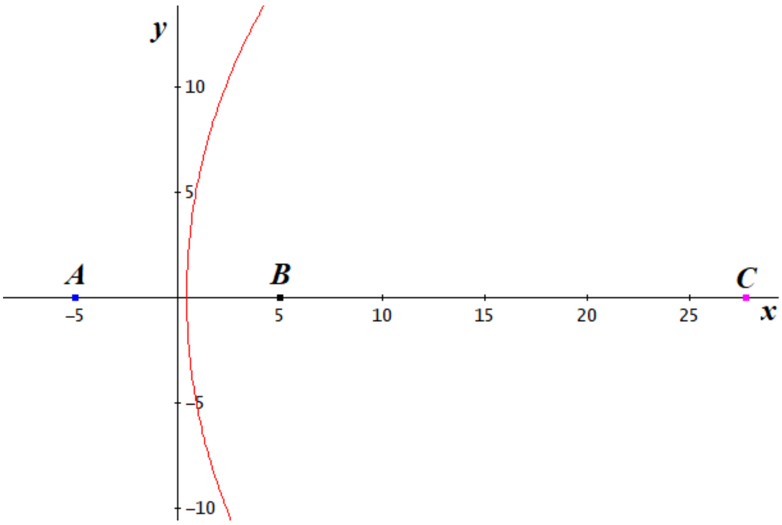
- $C\left(\frac{305}{11};0\right)$
- $r=\frac{300}{11}$

La circonferenza è univocamente determinata con centro e raggio; basta puntare il compasso nel centro e con apertura pari al raggio si descrive la circonferenza. **Osservazione**. Il minimo numero di parametri per determinare analiticamente l'equazione di una circonferenza è **tre**: le due coordinate del centro e la misura del raggio.

NOTA. E' un problema ricorrente quello di determinare l'equazione di una circonferenza passante per tre punti non allineati; ebbene in questo caso sono assegnati sei parametri (le coordinate dei tre punti).



facciamo una zoomata



Risolviamo l'equazione (4) rispetto alla variabile y:

$$y = \left| \begin{array}{l} -\dfrac{\sqrt{11}\cdot\sqrt{-11\cdot x^2+610\cdot x-275}}{11} \\ \dfrac{\sqrt{11}\cdot\sqrt{-11\cdot x^2+610\cdot x-275}}{11} \end{array} \right.$$

Mediante il software DERIVE.6 uso il programma " **VECTOR (ESPRESSIONE, DICHIARAZIONE DELLA VARIABILE, LIMITE SINISTRO, LIMITE DESTRO, PASSO)** "

Nel nostro caso è:

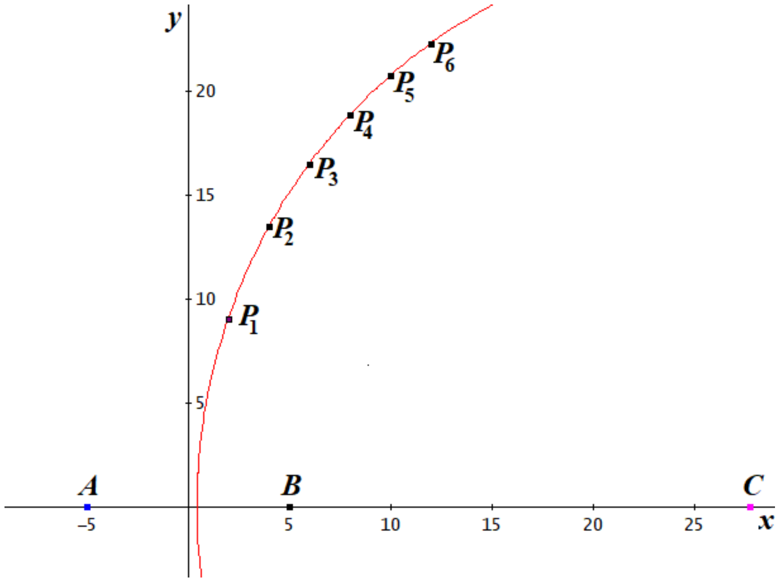
- ESPRESSIONE: coordinate del punto corrente sulla circonferenza, scritte tra parentesi quadre,
- DICHIARAZIONE DELLA VARIABILE: è la variabile *x*,
- LIMITE SINISTRO: abbiamo scelto 2,
- LIMITE DESTRO: abbiamo scelto 12,
- PASSO: abbiamo scelto 2.

$$\mathrm{VECTOR}\left(\left[x,\ \frac{\sqrt{11}\cdot\sqrt{(-\ 11\cdot x^2+610\cdot x-275)}}{11}\right],\ x,\ 2,\ 12,\ 2\right)$$

e, in esecuzione, porge la matrice:

$$\begin{bmatrix} \text{PUNTI} & \text{ASCISSE} & \text{ORDINATE} \\ P_1 & 2 & \dfrac{\sqrt{9911}}{11} \\ P_2 & 4 & \dfrac{3\cdot\sqrt{2431}}{11} \\ P_3 & 6 & \dfrac{7\cdot\sqrt{671}}{11} \\ P_4 & 8 & \dfrac{\sqrt{42911}}{11} \\ P_5 & 10 & \dfrac{15\cdot\sqrt{231}}{11} \\ P_6 & 12 & \dfrac{\sqrt{60071}}{11} \end{bmatrix}$$

che riportiamo in grafico



Per tutti questi punti, come per tutti gli altri infiniti punti della circonferenza, vige l'equazione

$$\frac{PA}{PB}=\frac{6}{5}.$$

▶ Scriviamo l'espressione analitica della distanza euclidea tra due punti di coordinate (α,β) e (γ,δ):

$$\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+(\delta-\beta)^2}$$

e applichiamola, per esempio, sul punto P_3 della precedente matrice

- distanza del punto P_3 da A:

$$\sqrt{(-5-6)^2+\left(0-\frac{7\cdot\sqrt{671}}{11}\right)^2}=\frac{12\cdot\sqrt{330}}{11} \qquad (5)$$

- distanza del punto P_3 da B:

$$\sqrt{(5-6)^2+\left(0-\frac{7\cdot\sqrt{671}}{11}\right)^2}=\frac{10\cdot\sqrt{330}}{11} \qquad (6)$$

e, come si può provare, il rapporto tra il valore dell'espressione (5) e quello della (6) è proprio la costante scelta $k=\frac{6}{5}$.

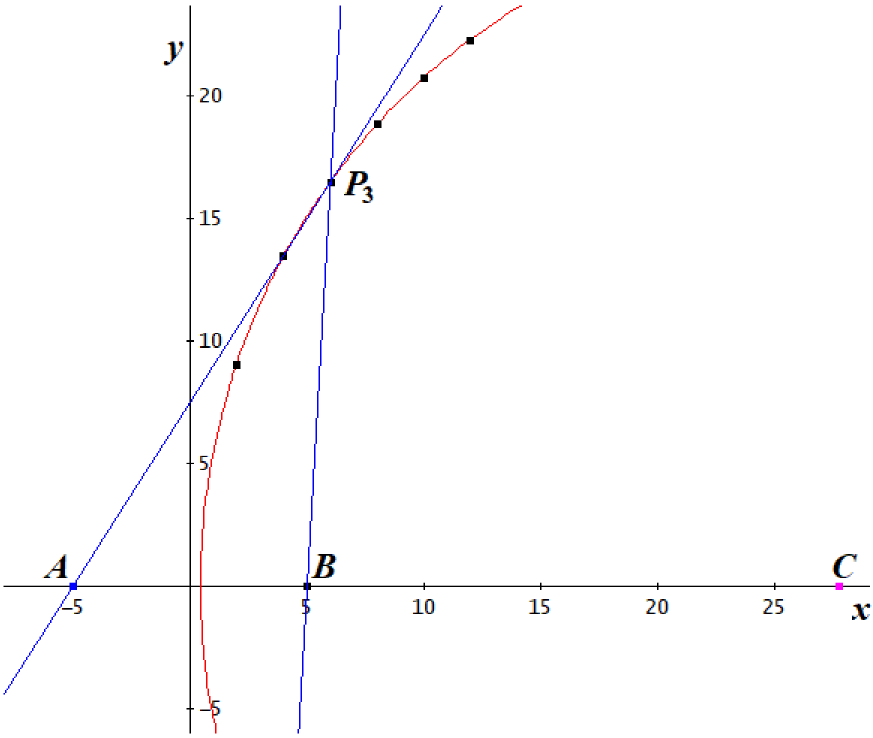
▶ Equazione della retta AP_3:

$$y-0=\frac{\frac{7\cdot\sqrt{671}}{11}-0}{6-(-5)}\cdot(x-5) \qquad \Rightarrow \qquad y=\frac{7\cdot\sqrt{671}}{121}\cdot x+\frac{35\cdot\sqrt{671}}{121}$$

▶ Equazione della retta BP_3:

$$y-0=\frac{\frac{7\cdot\sqrt{671}}{11}-0}{6-5}\cdot(x-5) \qquad \Rightarrow \qquad y=\frac{7\cdot\sqrt{671}}{121}\cdot x-\frac{35\cdot\sqrt{671}}{121}$$

Rappresentiamo le due rette



■ Consideriamo $v_A = 12 nodi$; in mezz'ora la nave *A* percorre 6 *mg*; determiniamo la posizione della nave dopo aver percorso 6 *mg*;

risolvo l'equazione (4) rispetto alla variabile *y*:

$$y=\frac{7\cdot\sqrt{671}}{121}\cdot x+\frac{35\cdot\sqrt{671}}{121} \tag{7}$$

per cui, il generico punto della retta AP_3 ha coordinate:

$$\left(x;\frac{7\cdot\sqrt{671}}{121}\cdot x+\frac{35\cdot\sqrt{671}}{121}\right)$$

Allora, la distanza del generico punto *P* dal punto *A* è:

$$\sqrt{(x-(-5))^2+\left(\frac{7\cdot\sqrt{671}}{121}\cdot x+\frac{35\cdot\sqrt{671}}{121}+\frac{35\cdot\sqrt{671}}{121}-0\right)^2}=\frac{12\cdot\sqrt{330}\cdot|x+5|}{121}$$

imponiamo che questa distanza sia 6 *mg*:

$$\frac{12\cdot\sqrt{330}\cdot|x+5|}{121}=6 \qquad \Rightarrow \quad x=\left|\begin{array}{l}-5-\dfrac{11\cdot\sqrt{330}}{60}\\ -5+\dfrac{11\cdot\sqrt{330}}{60}\end{array}\right.$$

consideriamo la seconda delle due ascisse e sostituiamola nell'equazione (7)

$$y=\frac{7\cdot\sqrt{671}}{121}\cdot\left(\left(\frac{11\cdot\sqrt{330}}{60}-5\right)-(-5)\right)=\frac{7\cdot\sqrt{1830}}{60}$$

per cui il punto *R* sulla retta *AP* che dista 6 *mg* da *A* è:

$$R\left(-5+\frac{11\cdot\sqrt{330}}{60};\frac{7\cdot\sqrt{1830}}{60}\right)$$

Prendiamo ora la retta *t* passante per *R*, parallela all'asse *x*:

$$y=\frac{7\cdot\sqrt{1830}}{60}$$

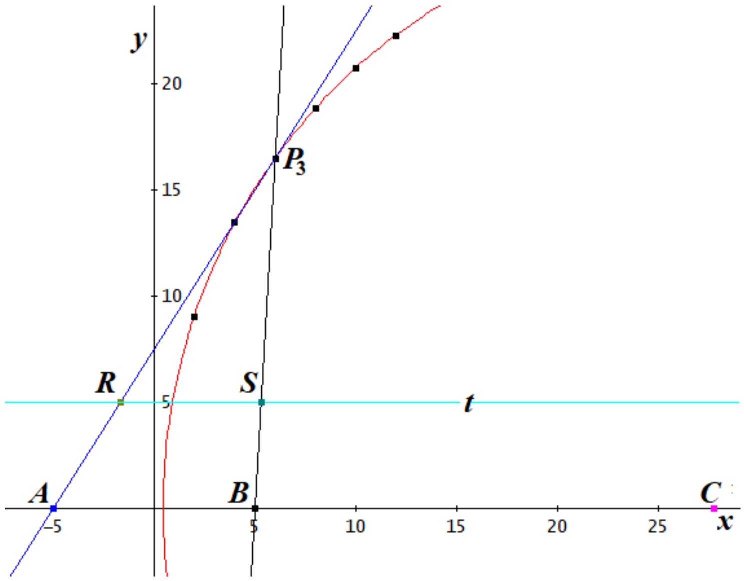
che intersechiamo con la retta *BP*: $y=\frac{7\cdot\sqrt{671}}{121}\cdot x-\frac{35\cdot\sqrt{671}}{121}$

$$y=\frac{7\cdot\sqrt{1830}}{60} \quad \wedge \quad y=\frac{7\cdot\sqrt{671}}{121}\cdot x-\frac{35\cdot\sqrt{671}}{121} \;;$$

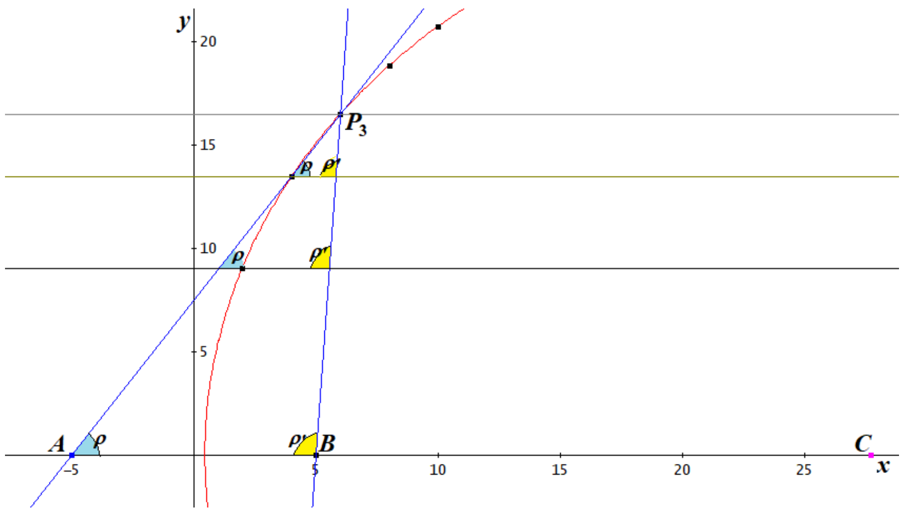
Saltiamo i passaggi, piuttosto noiosi, e otteniamo le coordinate del punto di intersezione che indichiamo con *S*:

$$S\left(\frac{\sqrt{330}}{60}+5;\frac{7\cdot\sqrt{1830}}{60}\right)$$

Quanto vale la distanza BP_3 ? Basta risolvere l'equazione $\frac{6}{BP_3} = \frac{6}{5}$ la quale porge $BP_3 = 5$ *mg*; pertanto la nave *B* percorre il cammino AP_3 nello stesso intervallo di tempo in cui la nave *B* percorre il cammino BP_3.



Le due navi collideranno nel punto P_3 perché l'indicatrice di moto relativo di una delle due navi, rispetto all'altra ritenuta ferma, rimane parallela a sé stessa col trascorrere del tempo. In altre parole la collisione è certa nel punto P_3 fino a che il rilevamento polare di una nave rispetto all'altra si mantiene costante (angoli corrispondenti formati da un fascio di rette parallele tagliato da una trasversale)



■ Caso particolare: consideriamo i due punti *M* ed *N* di intersezione della circonferenza di Apollonio con l'asse delle ascisse. Mettiamo a sistema l'equazione della circonferenza di equazione (4) con quella dell'asse delle ascisse

$$x^2 + y^2 - \frac{610}{11} \cdot x + \frac{275}{11} = 0 \quad \wedge \quad y = 0$$

e otteniamo i punti *M* e *N*:

$$M\left(\frac{5}{11};0\right) \quad ; \quad N(55;0).$$

1. **Calcoliamo le distanze di *M* dai punti *A* e *B*:**

$$MA=\frac{5}{11}-(-5)=\frac{60}{11} \quad ; \quad MB=5-\frac{5}{11}=\frac{50}{11};$$

il loro rapporto è: $\dfrac{\frac{60}{11}}{\frac{50}{11}}=\dfrac{6}{5}$

2. **distanze di *N* dai punti *A* e *B*:**

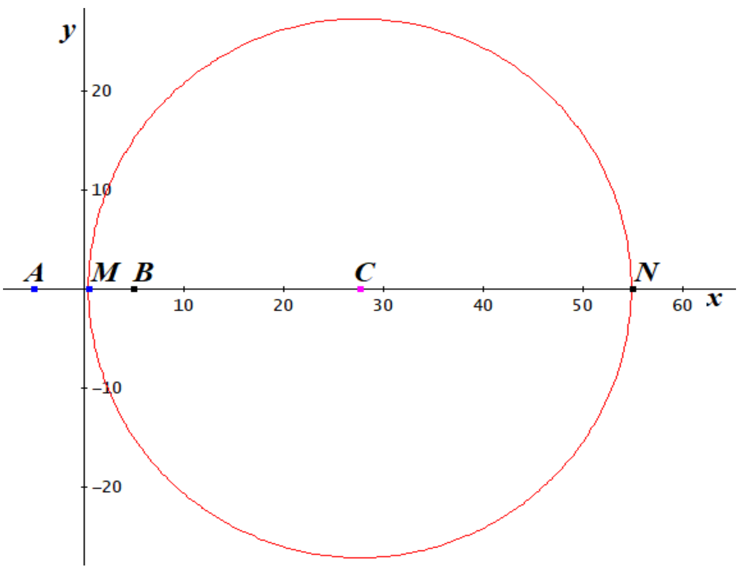
$$NA=55-(-5)=60 \quad ; \quad NB=55-5=50;$$

il loro rapporto è:

$$\frac{60}{50}=\frac{6}{5}.$$

► Nel primo caso le due navi, giungerebbero nello stesso istante nel punto *M*, dove avrebbero una collisione prua contro prua;

► Nel secondo caso le due navi giungerebbero il punto *N* nello stesso istante, dove la nave *A* darebbe una “*pruata*” alla poppa della nave *B*.



NOTA. Il termine "*pruata*" non esiste nella terminologia della marineria, ma porge pienamente l'evento "*colpire qualche cosa con la prua della nave*"; è un termine che ho sentito nel porto di Genova dai "*camàlli*", ovvero dagli scaricatori portuali.
La frase in lingua genovese "*dàghia unn-a prôa*", che si legge *"dagghe unna prua"* pronunciando la lettera *u* alla francese ovvero con le "labbra serrate", si traduce in lingua italiana "*dagli un colpo di prua*".