## DETERMINAZIONE DELLA LATITUDINE E DELLA LONGITUDINE SENZA L’USO DELLE “RETTE D’ALTEZZA”

►Quando si osserva un astro nell'istante del suo passaggio al meridiano dell'osservatore si parla di **osservazioni meridiane**. Un astro, in questi istanti, raggiunge:

1. la massima altezza quando passa al *meridiano superiore dell'osservatore* (**culminazione superiore *C***);
2. la minima altezza quando passa al *meridiano inferiore dell'osservatore* (**culminazione inferiore *I***).

Dalla seguente proiezione ortografica meridiana,

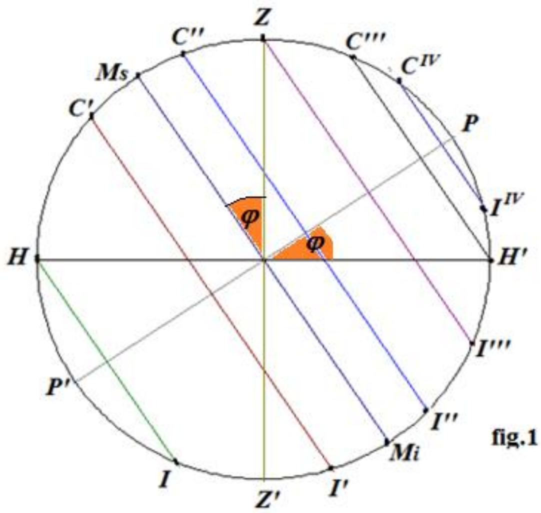



fig.1

indicati con:

- $\varphi$ la latitudine dell’osservatore,
- $h$ e $z$ rispettivamente l’altezza vera e la distanza zenitale vera corrispondente dell’astro,
- $\delta$ la declinazione dell’astro,

rileviamo che le culminazioni, nell'emisfero visibile, possono essere:

1. in $H$: $h = 0°$ , $z = 90°$, $|\delta| = c$;
2. tra l'orizzonte vero e l'equatore celeste $C'$: in questa circostanza $\varphi$ e $\delta$ hanno nome discorde ed il valore assoluto di $\delta$ è minore della colatitudine $c$ ;
3. in $M_s$ : $h = c$ , $z = |\varphi|$ , $\delta = 0°$;
4. tra l'equatore celeste e lo zenit $C''$: in questa circostanza $\varphi$ e $\delta$ hanno nome concorde e $\delta$ è minore di $\varphi$;
5. in $Z$: $h = 90°$ , $z = 0°$, $\varphi = \delta$ (l'osservatore ha l'astro sulla sua verticale e quindi si trova nel punto *subastrale* dell'astro)
6. tra lo zenit ed il polo elevato $C'''$ e $C^{IV}$ : in questa circostanza $\varphi$ $\delta$ hanno nome concorde e $\delta$ è maggiore di $\varphi$ ;
7. tra il polo elevato e l'orizzonte $I^{IV}$ (*culminazione inferiore*): in questa circostanza l'astro è circumpolare ovvero la sua distanza polare $p$ è minore o uguale a $\varphi$ .

**Osservazione**. Si dicono circumpolari gli astri che nel loro moto apparente non tramontano mai; nella figura sono quelli i cui paralleli di declinazione sono nella calotta sferica avente base il parallelo di diametro *H’C’’’*.

● Per le **culminazioni superiori**, non considerando l'astro in posizioni particolari, abbiamo:

caso 2. $|\varphi| = C'Z - C'M_s = |z| - |\delta|$;

caso 4. $|\varphi| = M_s C'' + C''Z = |\delta| + |z|$;

caso 6. $|\varphi| = M_s C''' - C'''Z = |\delta| - |z|$.

La seguente **relazione algebrica**

$$\varphi_{mer} = z_{mer} + \delta_{mer}$$

consente di determinare $\varphi$, in funzione di $\delta$ e $z$, senza l'uso dell'operatore "*valore assoluto*", adottando la seguente *convenzione* sul segno di $z$ e precisamente a $z$ si assegna:

- il *segno* " + " se l'osservatore vede la culminazione verso sud,
- il *segno* " – " se l'osservatore vede la culminazione verso nord,

mantenendo per $\delta$ e $\varphi$ i segni e nomi come stabilito dalle loro definizioni.

●● Per le **culminazioni inferiori** abbiamo:

$$M_sZ + ZI''' + I'''M_i = 180° \quad \Rightarrow \quad \varphi_{mer} + z_{mer} + \delta_{mer} = 180°$$

e, risolvendo rispetto alla latitudine, otteniamo:

$$\varphi_{mer} = 180° - (z_{mer} + \delta_{mer})$$

**ESEMPI.**
La fig.1 si modifica nella fig.2 se il polo elevato è il polo nord celeste:

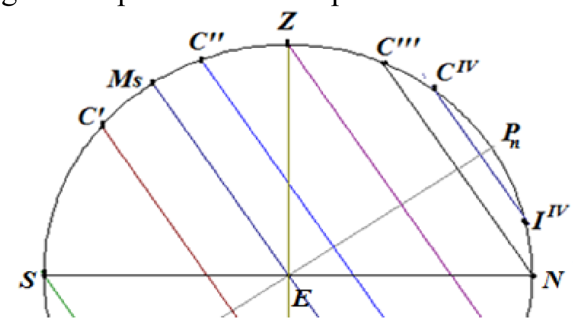


fig.2

In questa ipotesi consideriamo:

● le culminazioni superiori in *C'*, *C'''* e *S*

1. Per la culminazione in *C'* sia $h_{mer}$= 36°, da cui $z_m$=64° e $\delta_{mer}$= 14°S; allora si ha:

$$\varphi_{mer} = +54° + (-14°) = +40° \quad \Rightarrow \quad \varphi_{mer} = 40N$$

2. Per la culminazione in *C'''* sia $h_{mer}$ = 62°, da cui $z_m$ =28° e $\delta_{mer}$= 68°N; allora si ha

$$\varphi_{mer} = -28° + (+68°) = +40° \quad \Rightarrow \quad \varphi_{mer} = 40N$$

3. Per la culminazione in $S$ sia $h_{mer}$= 50°, da cui $z_{mer}$=40° e $\delta_{mer}$= 0°; allora si ha

$$\varphi_{mer} = 40° + 0° = +40° \quad \Rightarrow \quad \varphi_{mer} = 40N$$

●● la culminazione inferiore $I^{IV}$

Per la culminazione in $I^{IV}$ sia $h_m$ = 8°, da cui $z_m$=82° e $\delta_{mer}$= 58°; allora si ha

$$\varphi_{mer} = 180° - (82° + 58°) = 40° N.$$

**OSSERVAZIONE**. L'**altezza meridiana** e **l'altezza di culminazione** coincidono solamente per quegli astri che non hanno apprezzabile variazione in declinazione come le stelle e, in buona approssimazione, anche i pianeti. La declinazione del Sole varia di ora in ora e quindi le due altezze non coincidono, ma, l'errore che si commette è minore delle approssimazioni delle apparecchiature usate a bordo.
Le cose cambiano notevolmente per la Luna che ha una variabilità rilevante in declinazione tale che tra le due altezze vi può essere un errore che può raggiungere valori attorno ai 5'; pertanto osservazioni meridiane di Luna sono da evitarsi.

► Compreso che si può determinare, con buona approssimazione, la latitudine di un punto qualunque della superficie terrestre mediante osservazioni meridiane di astri (ad esclusione della Luna), ci domandiamo come possiamo determinare la corrispondente longitudine.
Infatti:

- per la latitudine non v'è nessun problema in virtù del moto in declinazione dell'astro nei pressi del suo passaggio in meridiano: nelle vicinanze del meridiano dell'osservatore l'altezza dell'astro varia di pochissimo tale che, per un piccolo intervallo di tempo, l'astro sembra spostarsi orizzontalmente.
- per la longitudine le cose non sono così semplici come per la latitudine perché è pressoché impossibile stabilire l'istante in cui l'astro raggiunge esattamente la massima altezza, visto che per alcune decine di secondi l'altezza dell'astro varia in modo impercettibile.

**NOTA**. Durante il dì ci serviamo del Sole risolvendo il problema del passaggio al meridiano mobile della nave. Durante la notte si può ricorrere alla determinazione di una latitudine media (la media aritmetica è la più semplice elaborazione di dati di carattere additivo) utilizzando altezze meridiane di più astri, e ciò è possibile tra la fine del crepuscolo vespertino e l'inizio di quello mattutino se si dispone di un sestante con orizzonte artificiale (per esempio il sestante Plath, dotato di una livella torica che consente, quando la bolla è centrata, di trovarsi perfettamente in posizione orizzontale).

Pertanto, per determinare la longitudine, conoscendo la latitudine, si ricorre all'osservazione di un astro extra-meridiano abbastanza lontano dal meridiano dell'osservatore, preferibilmente nelle vicinanze del primo verticale.
Dopo di ché è la matematica che ci consente di risolvere il problema; basterà utilizzare il teorema di Eulero per i triangoli sferici (relazione che lega i tre lati con un angolo) ed applicarlo al triangolo astronomico:

$$\cos z = \cos c \cdot \cos p + \sin c \cdot \sin\ p \cdot \sin\ \hat{P}$$

che, risolta rispetto all'angolo al polo, ci porge

$$\cos \hat{P} = \frac{\cos z - \cos c \cdot \cos p}{\sin c \cdot \sin\ p};$$

da cui calcoliamo $\hat{P}$ .
Ora saranno le effemeridi che ci consentiranno di risalire alla longitudine desiderata.

**ESEMPIO.** Si supponga che la latitudine sia $\varphi = 26°44'.6\ N$, calcolata mediante osservazioni meridiane di almeno due astri e si osservi la stella Regolo la cui altezza vera sia $h_v = 26°44'.6$; calcolare la longitudine λ, sapendo UT = $0^h\ 38^m\ 41^s$ del 3/10/2013. Si è scelta Regolo perché l'azimut è 83°, quindi prossimo al primo verticale orientale.

**SOLUZIONE.**

Dalle pagine bianche delle effemeridi

MAR. 1, MER. 2, GIO. 3 — ottobre 2013

| UT d | UT h | SOLE T ° ' | SOLE Dec. ° ' | γ T ° ' | STELLE Nome | STELLE 360°−α ° ' | STELLE Dec. ° ' | .................... | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 22 | 152 42.9 | 54.5 | 341 46.8 | Nunki | 75 58.0 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| | 23 | 167 43.1 | 55.4 | 356 49.3 | Peacock | 53 18.7 | S56 41.4 | 45 | 17 39 | 18 08 | 18 42 | 15 14 | 15 43 | 16 11 | 16 38 |
| 3 | 0 | 182 43.3 | S3 56.4 | 11 51.8 | Phact | 274 57.6 | S34 3.9 | N40 | 17 41 | 18 08 | 18 39 | 15 06 | 15 38 | 16 08 | 16 39 |
| | 1 | 197 43.5 | 57.4 | 26 54.2 | Polare | 317 18.0 | N89 19.2 | 35 | 17 43 | 18 08 | 18 37 | 15 00 | 15 33 | 16 07 | 16 40 |
| | 2 | 212 43.7 | 58.3 | 41 56.7 | Polluce | 243 27.6 | N27 59.4 | 30 | 17 44 | 18 08 | 18 36 | 14 54 | 15 30 | 16 05 | 16 40 |
| | 3 | 227 43.9 | 3 59.3 | 56 59.2 | Procyon | 244 59.6 | N5 11.3 | 20 | 17 47 | 18 09 | 18 35 | 14 44 | 15 23 | 16 02 | 16 41 |
| | 4 | 242 44.1 | 4 00.3 | 72 01.6 | Rasalhague | 96 06.4 | N12 33.4 | N10 | 17 50 | 18 11 | 18 35 | 14 35 | 15 17 | 15 59 | 16 42 |
| | 5 | 257 44.3 | 01.2 | 87 04.1 | Regolo | 207 43.6 | N11 53.9 | N0 | 17 53 | 18 13 | 18 37 | 14 27 | 15 12 | 15 57 | 16 43 |
| | 6 | 272 44.4 | S4 02.2 | 102 06.6 | Rigel | 281 11.7 | S8 11.1 | S10 | 17 55 | 18 16 | 18 41 | 14 18 | 15 06 | 15 55 | 16 44 |
| | 7 | 287 44.6 | 03.2 | 117 09.0 | Rigil Kent | 139 52.0 | S60 53.5 | 20 | 17 58 | 18 20 | 18 46 | 14 09 | 15 00 | 15 52 | 16 45 |
| | 8 | 302 44.8 | 04.1 | 132 11.5 | Sabik | 102 12.4 | S15 44.3 | 30 | 18 02 | 18 26 | 18 54 | 13 58 | 14 54 | 15 49 | 16 46 |
| | 9 | 317 45.0 | 05.1 | 147 13.9 | Saiph | 272 53.6 | S9 39.9 | 35 | 18 04 | 18 30 | 18 59 | 13 53 | 14 50 | 15 47 | 16 46 |
| | 10 | 332 45.2 | 06.1 | 162 16.4 | Schedar | 349 38.6 | N56 36.9 | 40 | 18 06 | 18 34 | 19 06 | 13 46 | 14 45 | 15 45 | 16 47 |

e dalle pagine azzurre

**$38^m$**

| Sec | SOLE PIANETI ° ' | ♈ ° ' | LUNA ° ' | v/d ' | pp ' | v/d ' | pp ' | v/d ' | pp ' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 9 30.0 | 9 31.6 | 9 04.0 | 0.0 | 0.0 | 6.0 | 3.9 | 12.0 | 7.7 |
| 01 | 9 30.3 | 9 31.8 | 9 04.2 | 0.1 | 0.1 | 6.1 | 3.9 | 12.1 | 7.8 |
| 02 | 9 30.5 | 9 32.1 | 9 04.5 | 0.2 | 0.1 | 6.2 | 4.0 | 12.2 | 7.8 |
| 03 | 9 30.8 | 9 32.3 | 9 04.7 | 0.3 | 0.2 | 6.3 | 4.0 | 12.3 | 7.9 |
| 04 | 9 31.0 | 9 32.6 | 9 05.0 | 0.4 | 0.3 | 6.4 | 4.1 | 12.4 | 8.0 |
| 05 | 9 31.3 | 9 32.8 | 9 05.2 | 0.5 | 0.3 | 6.5 | 4.2 | 12.5 | 8.0 |
| 06 | 9 31.5 | 9 33.1 | 9 05.4 | 0.6 | 0.4 | 6.6 | 4.2 | 12.6 | 8.1 |
| 07 | 9 31.8 | 9 33.3 | 9 05.7 | 0.7 | 0.4 | 6.7 | 4.3 | 12.7 | 8.1 |
| 08 | 9 32.0 | 9 33.6 | 9 05.9 | 0.8 | 0.5 | 6.8 | 4.3 | 12.8 | 8.2 |
| 09 | 9 32.3 | 9 33.8 | 9 06.2 | 0.9 | 0.5 | 6.9 | 4.4 | 12.9 | 8.3 |
| 40 | 9 40.0 | 9 41.6 | 9 13.3 | 4.0 | 2.6 | 10.0 | 6.4 | 16.0 | 10.3 |
| 41 | 9 40.3 | 9 41.8 | 9 13.6 | 4.1 | 2.6 | 10.1 | 6.5 | 16.1 | 10.3 |
| 42 | 9 40.5 | 9 42.1 | 9 14.1 | 4.2 | 2.7 | 10.2 | 6.5 | 16.2 | 10.4 |
| 43 | 9 40.8 | 9 42.3 | 9 14.3 | 4.3 | 2.8 | 10.3 | 6.6 | 16.3 | 10.5 |
| 44 | 9 41.0 | 9 42.6 | 9 14.5 | 4.4 | 2.8 | 10.4 | 6.7 | 16.4 | 10.5 |

**$39^m$**

| Sec | SOLE PIANETI ° ' | ♈ ° ' | LUNA ° ' | v/d ' | pp ' | v/d ' | pp ' | v/d ' | pp ' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 9 45.0 | 9 46.6 | 9 18.3 | 0.0 | 0.0 | 6.0 | 4.0 | 12.0 | 7.9 |
| 01 | 9 45.3 | 9 46.9 | 9 18.6 | 0.1 | 0.1 | 6.1 | 4.0 | 12.1 | 8.0 |
| 02 | 9 45.5 | 9 47.1 | 9 18.8 | 0.2 | 0.1 | 6.2 | 4.1 | 12.2 | 8.0 |
| 03 | 9 45.8 | 9 47.4 | 9 19.1 | 0.3 | 0.2 | 6.3 | 4.1 | 12.3 | 8.1 |
| 04 | 9 46.0 | 9 47.6 | 9 19.3 | 0.4 | 0.3 | 6.4 | 4.2 | 12.4 | 8.2 |
| 05 | 9 46.3 | 9 47.9 | 9 19.5 | 0.5 | 0.3 | 6.5 | 4.3 | 12.5 | 8.2 |
| 06 | 9 46.5 | 9 48.1 | 9 19.8 | 0.6 | 0.4 | 6.6 | 4.3 | 12.6 | 8.3 |
| 07 | 9 46.8 | 9 48.4 | 9 20.0 | 0.7 | 0.5 | 6.7 | 4.4 | 12.7 | 8.4 |
| 08 | 9 47.0 | 9 48.6 | 9 20.3 | 0.8 | 0.5 | 6.8 | 4.5 | 12.8 | 8.4 |
| 09 | 9 47.3 | 9 48.9 | 9 20.5 | 0.9 | 0.6 | 6.9 | 4.5 | 12.9 | 8.5 |
| 40 | 9 55.0 | 9 56.6 | 9 27.9 | 4.0 | 2.6 | 10.0 | 6.6 | 16.0 | 10.5 |
| 41 | 9 55.3 | 9 56.9 | 9 28.1 | 4.1 | 2.7 | 10.1 | 6.6 | 16.1 | 10.6 |
| 42 | 9 55.5 | 9 57.1 | 9 28.4 | 4.2 | 2.8 | 10.2 | 6.7 | 16.2 | 10.7 |
| 43 | 9 55.8 | 9 57.4 | 9 28.6 | 4.3 | 2.8 | 10.3 | 6.8 | 16.3 | 10.7 |
| 44 | 9 56.0 | 9 57.6 | 9 28.8 | 4.4 | 2.9 | 10.4 | 6.8 | 16.4 | 10.8 |

abbiamo (attenzione: nella pag. azzurra non si legge bene il numero 9; sembra “zero”):

$$T_m = 0^h \quad \rightarrow \quad T_{s_0} = 11°51'.8$$
$$\mathrm{I} = 38^m\, 41^s \quad \rightarrow \quad I_s = 9°41'.8$$
$$T_s = 21°33'.6$$

Determiniamo le ampiezze dei lati del triangolo astronomico onde evitare, nei calcoli, qualunque (inutile) convenzione dei segni:
distanza zenitale: $z = 90° - h = 63°15',4$,
distanza polare: $p = 90° - \delta = 78°06',1$,
colatitudine: $c = 90° - \varphi = 77°40'.4$

e, calcoliamo il tempo dell’astro:

$$\cos \hat{P} = \frac{\cos z - \cos c \cos p}{\sin c \sin p} \quad \Rightarrow \quad \hat{P}_E = 64°52'.1 \quad \Rightarrow \quad t_* = 295°07'.8$$

Calcoliamo il corrispondente tempo sidereo $t_s$:

$$t_* = 295°07'.8$$
$$-\ \ \mathrm{co}\alpha = 207°43'.6$$
$$t_s = 87°24'.2.$$

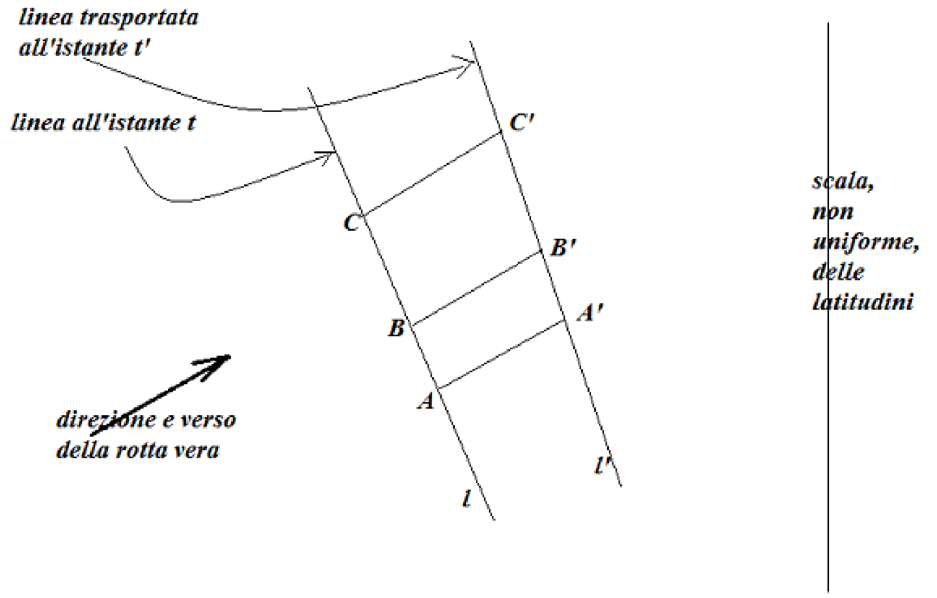
Calcoliamo la longitudine richiesta mediante la differenza dei due tempi siderei:

$$t_s = 87°24'.2.$$
$$-\ T_s = 21°33'.6$$
$$\lambda = 65°50'.6\ E.$$

**OSSERVAZIONE.** Non è detto che le osservazioni meridiane debbano assolutamente precedere l’osservazione extra-meridiana. Per le osservazioni meridiane bisogna attendere istanti propizi, mentre per quella extra-meridiana è necessario scegliere una stella che non sia molto lontana dal primo verticale. Il problema viene risolto con i necessari trasporti.

**NOTA**. Una qualunque linea di posizione della nave (una retta di allineamento, una retta di rilevamento, una retta d'altezza, ….) si ottiene mediante una osservazione eseguita in un certo istante $t$ ; ma, essa può costituire un'altra linea di posizione per un istante successivo $t'$ mediante l'esecuzione del **trasporto** della stessa.

Precisamente, da una linea di posizione $l$ relativa ad un istante $t$, tracciata sulla carta di Mercatore (la carta nautica per antonomasia), si può determinare un’altra linea $l'$ dello stesso tipo, relativa ad un istante successivo $t'$, traslando (**trasporto**) ogni punto della prima nella direzione e verso della rotta vera seguita dalla nave, pari a $v(t' - t)$ miglia, in cui $v$ (velocità della nave) è espressa in nodi e $t' - t$ è espresso in ore.




Così, nella figura, i punti *A*, *B*, *C* della linea *l* vengono **trasportati** nei corrispondenti punti *A'*, *B'*, *C'* della linea *l'*.

Teoricamente le due linee risultano divergenti a causa della scala, non uniforme, delle latitudini (vedi il problema delle latitudini crescenti); infatti le distanze vanno misurate sulla scala delle latitudini in funzione della latitudine di quel sito e, come è noto, le lunghezze dei *primi* di questa scala variano aumentando con l'aumentare della latitudine. Per quanto detto, le distanze *AA'*, *BB'*, *CC'* sono tutte uguali, ma sulla carta nautica sono rappresentate da segmenti diversi, crescenti col crescere della latitudine.

La divergenza tra le due linee *l* ed *l'* è più marcata :

1. alle latitudini più elevate perché in queste circostanze le lunghezze dei *primi* della scala sono più dilatate;
2. se la linea *l* è orientata con direzione prossima al meridiano perché, in questo caso, la zona considerata risulta più estesa in latitudine.

Per contro, la divergenza diminuisce quando la linea *l* è orientata pressoché per parallelo, diventando nulla se orientata proprio per parallelo.

Nei casi pratici della nautica il trasporto di una linea *l* si effettua misurando le distanze con i *primi*. sulla scala delle latitudini, alla latitudine media e traslandola parallelamente a sé stessa, della quantità calcolata in virtù della velocità della nave e dell'intervallo di tempo *t' – t*.

Comunque nel nostro caso il trasporto non crea nessun problema se i luoghi di posizione delle meridiane si trasportano all'istante dell'osservazione extra-meridiana, ovviamente assumendo per latitudine del punto nave la media delle latitudini meridiane.