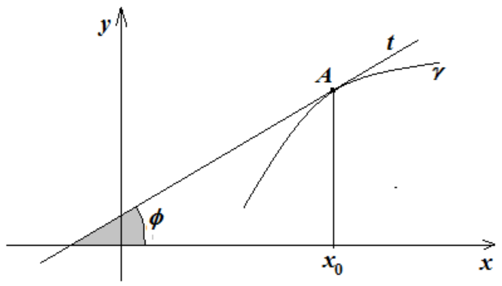
DETERMINAZIONE, PER VIA GRAFICA , DEL COEFFICIENTE DI RESISTENZA ALLE INCLINAZIONI TRASVERSALI

PREMESSA.

Se una funzione f è derivabile in un suo punto x_0, la derivata della funzione calcolata in quel punto è la *pendenza* della curva in quel punto ovvero è il *coefficiente angolare* della retta tangente alla curva in quel punto. Pertanto le locuzioni "*pendenza*" e "*coefficiente angolare*" hanno lo stesso significato, cioè sono la stessa cosa.

La seguente figura



riporta il grafico γ della funzione $y = f(x)$ e la tangente t alla curva γ nel suo punto $A(x_0; f(x_0))$.

Per quanto detto precedentemente, l'equazione della retta t è:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

La retta t interseca l'asse x formando con esso l'angolo ϕ; a questo angolo è stato assegnato il nome di *inclinazione*. Pertanto inclinazione e pendenza (di una curva in un suo punto) non sono sinonimi, ma legati dall'equazione:

$$\tan\phi = f'(x_0).$$

DIMOSTRAZIONE 1

Come sappiamo l'equazione del momento di stabilità trasversale di una nave è

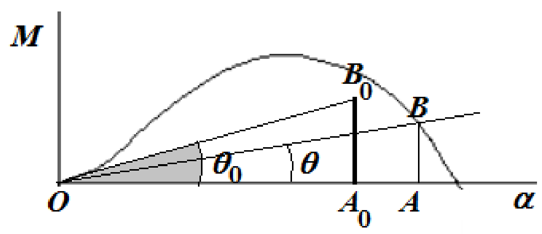
$$M = D(h - a)\sin\alpha$$

che diventa

$$M = D(r - a)\sin\alpha$$

nei casi dei limiti metacentrici.

Riferiamoci alla seguente figura



nella quale abbiamo assunto:

- in ordinata la *tonnellata per metro* come unità di lunghezza dei momenti;
- in ascissa una lunghezza σ che, nella stessa scala usata per i momenti, rappresenti l'unità di misura degli angoli di sbandamento, ovviamente espressi in radianti.

OSSERVAZIONE. Questo artificio consente di rendere monometrico il grafico, condizione assolutamente necessaria per poterlo *analizzare* (vedi studio funzioni goniometriche in analisi matematica).

In queste condizioni il generico punto B del grafico ha coordinate:

$$B(\sigma\cdot\alpha; D\cdot(h-a)\cdot\sin\alpha).$$

Nella figura consideriamo allora il triangolo rettangolo *OAB*; in esso è:

$$\tan\vartheta=\frac{AB}{OA},$$

da cui è:

$$\tan\vartheta=\frac{D\cdot(h-a)\cdot\sin\alpha}{\sigma\cdot\alpha}=\frac{D\cdot(h-a)}{\sigma}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\qquad(1).$$

Se nella (1) facciamo tendere a 0 l'angolo α, si ha.

$$\lim_{\alpha\to 0}(\tan\vartheta)=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{D\cdot(h-a)}{\sigma}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)=\frac{D\cdot(r-a)}{\sigma}\cdot 1 \quad \text{infatti} \quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1 \text{ (limite notevole),}$$

e quindi, è:

$$\lim_{\alpha\to 0}(\tan\vartheta)=\frac{D\cdot(r-a)}{\sigma}.$$

In queste condizioni la retta secante OB diventa la retta tangente, all'origine, OB_0 la quale forma con l'asse delle ascisse l'angolo θ_0.
Allora dal triangolo rettangolo OA_0B_0 abbiamo:

$$\tan\vartheta_0=\frac{D\cdot(r-a)}{\sigma};$$

ma, essendo σ il segmento unitario in ascissa, è $\sigma = 1$*radiante*, allora abbiamo

$$\tan\vartheta_0=D\cdot(r-a),$$

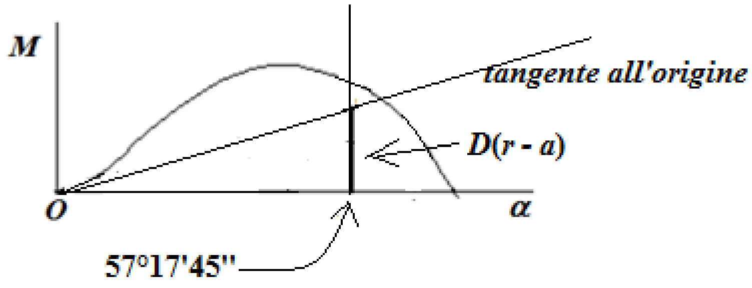
il che significa che il valore intensivo del momento di stabilità iniziale coincide con la tangente goniometrica dell'angolo θ_0 che la retta tangente, all'origine, forma con l'asse delle ascisse, cioè coincide col "*coefficiente angolare*" della retta tangente all'origine.

Vediamo ora come fare a determinare praticamente, dal grafico del momento di stabilità, il valore intensivo del momento di stabilità iniziale:

allo scopo, ritorniamo al triangolo OA_0B_0 della figura e rileviamo che il punto A_0 ha ascissa unitaria ovvero 1 *radiante* e un radiante espresso in gradi sessagesimali usualmente adoperati a bordo è:

$$1rad.=\frac{180°}{\pi}\equiv 57.29577951°\equiv 57°17'45''.$$

Ed allora, dal diagramma di stabilità si segna sull'asse delle ascisse l'angolo 57°17'45'' (in effetti, pur rimanendo il grafico monometrico, gli angoli di sbandamento sono espressi in gradi sessagesimali) e si stacca ivi la perpendicolare all'asse delle ascisse fino ad incontrare la retta tangente alla curva di stabilità all'origine



Il segmento segnato in "grassetto" esprime l'elemento cercato.

DIMOSTRAZIONE 2

Come si sa, la curva "*diagramma di stabilità*" ha origine nel centro del sistema di assi cartesiani. Tale curva, a partire da $\alpha = 0°$, ha un andamento che dipende, oltre che dalla forma della nave, anche dalla mutua posizione del centro di gravità e del metacentro.

Ora, rimanendo nel metodo metacentrico cioè per α piccolo $(\alpha \leq 10°$ o $12°)$ il momento di stabilità statica trasversale è $M = D \cdot (r - a) \cdot \sin\alpha$ e la sua derivata è $M' = D \cdot (r - a) \cdot \cos\alpha$.

La derivata calcolata nell'origine, ovvero la pendenza del diagramma di stabilità all'origine, è $D \cdot (r - a)$, infatti per $\alpha = 0$ è $\cos\alpha = 1$; pertanto, per quanto detto prima, si ha:

$$\tan\phi = D \cdot (r - a) \qquad (1)$$

Ricordiamo che in analisi matematica si lavora, con le funzioni goniometriche, in radianti. Allora, in questa circostanza il diagramma di stabilità trasversale di una nave avrebbe il seguente diagramma rappresentato in "grassetto":

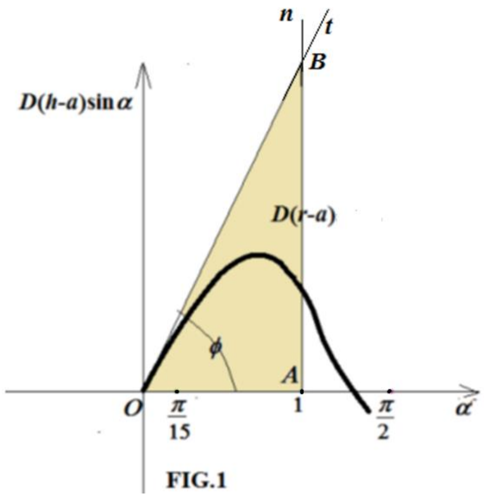


FIG.1

Tracciata la retta t tangente alla curva in O e la normale n all'asse delle ascisse nel punto

A(1;0), otteniamo il triangolo rettangolo OAB (ove B è l'intersezione delle rette t ed n) retto in A per costruzione; possiamo scrivere (in un triangolo rettangolo, la misura di un cateto è uguale il prodotto di quella dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo):

$$\overline{AB} = \overline{OA}\ \tan\phi \qquad (2)$$

Dal confronto della (1) con la (2), essendo $\overline{OA} = 1$, è:

$$\overline{AB} = D\,(r - a).$$

Ma, in teoria della nave si lavora con gli angoli di sbandamento espressi in gradi sessagesimali, per cui è giustificata la FIG.2

Ho supposto di rimanere nel metodo metacentrico entro $\frac{\pi}{15}$ radianti ovvero 12° sessagesimali, ed allora ad **un** radiante della FIG.1 corrispondono 57° 17' 44''.8 gradi sessagesimali della FIG.2

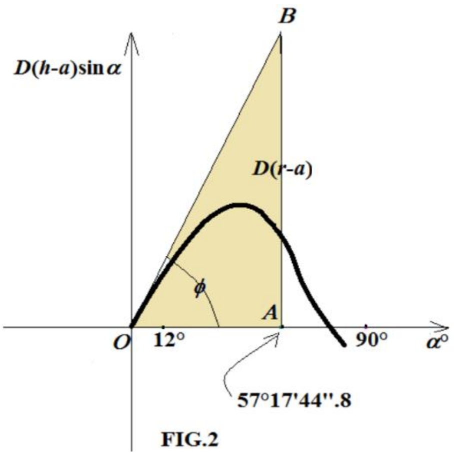


FIG.2

ALCUNE CONSIDERAZIONI

Il grafico della fig.2 consente di acquisire informazioni sulla tendenza iniziale della curva di stabilità, allorquando non si abbia questo diagramma: infatti, riportato un segmento di misura $D\cdot(r-a)$, perpendicolare all'asse delle ascisse nel suo punto $\alpha°$ = 57° 17' 44''.8 , e congiungendo l'estremo superiore di tale segmento con l'origine degli assi, otteniamo la tangente al diagramma di stabilità nell'origine, ovvero la pendenza del diagramma all'origine.

OSSERVAZIONE. Volendo determinare la pendenza in ogni punto della curva di stabilità, dobbiamo derivare la funzione

$$M = D\cdot(h-a)\cdot\sin\alpha \qquad (3)$$

rispetto ad α e calcolarla nel punto desiderato, ricordando che anche h è funzione di α.
La derivata della (3) è:

$$M' = \frac{dM}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left[D\cdot(h-\alpha)\cdot\sin\alpha\right] = D\cdot\left[\frac{d}{d\alpha}(h\cdot\sin\alpha) - \frac{d}{d\alpha}(a\cdot\sin\alpha)\right] =$$

$$= D\cdot\left[\left(\frac{d}{d\alpha}h\right)\cdot\sin\alpha + h\cdot\left(\frac{d}{d\alpha}\sin\alpha\right) - a\cdot\left(\frac{d}{d\alpha}\sin\alpha\right)\right]^{(*)} =$$

$$= D\cdot\left[\frac{d}{d\alpha}h\cdot\sin\alpha + h\cdot\cos\alpha - a\cdot\cos\alpha\right] \qquad (4)$$

►Vogliamo provare che dalla (4) si ottiene la (1):

per quanto detto nella premessa, è:

$$\tan\phi = \lim_{\alpha\to 0^\circ} M',$$

ma, per $\alpha \to 0^\circ$, si hanno le seguenti tendenze:

- $h \to r$
- $\sin\alpha \to 0$
- $\cos\alpha \to 1$

da cui

$$\tan\phi \to D\cdot(r-a)$$

(*)
1. La derivata del prodotto $f(x)\cdot g(x)$ ove f e g sono funzioni derivabili si ottiene applicando la regola di Leibniz

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{d}{dx}[g(x)]$$

E, come facilmente si ricorda: *il prodotto della derivata della prima funzione moltiplicata per la seconda tale e quale, più la prima tale quale moltiplicata per la derivata della seconda.*

2. La derivata del prodotto $k\cdot f(x)$ ove k è una costante ed f una funzione derivabile si ottiene mediante l'espressione

$$\frac{d}{dx}[k\cdot f(x)] = k\cdot\frac{d}{dx}f(x)$$