UN PARADOSSO SULLA SUPERFICIE SFERICA

Definizione di **lossodromia:** curva gobba o sghemba, sulla superficie terrestre, che taglia con angolo costante i meridiani; tale angolo è chiamato rotta vera ed è indicata con la lettera *R*. [*una curva nello spazio è detta* ***piana*** *se giace tutta su un piano, è detta* ***gobba*** *o* ***sghemba*** *se non esiste nessun piano che la contenga*]

Etimologicamente. Deriva dal greco mediante la composizione della parola *loxòs = obliquo* e della parola *dromòs =corsa*, ovvero *loxodrómos = correre obliquamente*. E' detta anche *rombo obliquo* che significa *percorso obliquo* ovvero il percorso che compie una nave seguendo lo stesso *rombo di vento*.

Storicamente. Lo scopritore di questa linea fu il matematico e cosmografo portoghese **Pedro Nunes (1492-1577),** latinizzato *Petrus Nonius*, che nel 1542 riconobbe per primo che la traiettoria di una nave, la quale tagli sotto un angolo acuto costante i meridiani che incontra, è una curva gobba, chiamata successivamente *lossodromia* da Snell Willebrord van Roijen (1580?-1626) latinizzato Snellius (matematico, fisico e astronomo olandese).

Osservazione 1. Tutti gli scienziati di quel periodo avevano nomi latinizzati perché era il latino la lingua internazionale della scienza e della ricerca. Mia opinione: come sarebbe bello se non si fosse fatta morire questa lingua classica e si fosse continuata a studiare nelle scuole europee coniando le nuove parole che, di volta in volta, sarebbero state necessarie per tenerla viva ed attuale ……

Osservazione 2. Un arco di curva lossodromica è:

- il cammino *m* che una nave compie per andare da un punto *A* ad un punto *B* (entrambi di note coordinate geografiche: latitudine φ e longitudine λ), intersecando tutti i meridiani, che incontra, sotto lo stesso angolo.
- la porzione di una spirale a doppia curvatura che devia continuamente per mantenere costante l'angolo formato con i meridiani, tale che una nave che percorre questo arco non ha mai la prora rivolta verso il punto di arrivo, ad esclusione che nel punto d'arrivo stesso, ovvero alla conclusione della traversata.

Sono lossodromie i *meridiani* stessi ed i *paralleli* (quindi anche l'equatore) che corrispondono rispettivamente agli angoli di 0°e di 90°.

Diciamo che:

- i **meridiani** che passano per i poli, e
- i **paralleli**, tale che i punti di ciascuno di essi ha la stessa distanza sferica dai poli (un punto ha distanza sferica da un polo uguale al complemento *c* della latitudine, detta colatitudine, ovvero $c = 90° - |\varphi|$, e dall'altro polo $90° + |\varphi|$).

si dicono "*lossodromie degeneri*".

▶ Due sono i *problemi cardini* nella navigazione lossodromica:

PRIMO PROBLEMA.

Noti:

- le coordinate del punto di partenza $A(\varphi_A, \varphi_A)$
- la rotta lossodromica R
- la lunghezza dell'arco m di lossodromia da percorrere,

determinare la coordinate del punto $B(\varphi_B, \varphi_B)$, in cui viene a trovarsi la nave.

SECONDO PROBLEMA.

Noti:

- le coordinate del punto di partenza $A(\varphi_A, \varphi_A)$,
- le coordinate del punto di arrivo $B(\varphi_B, \varphi_B)$,

determinare la rotta lossodromica R ed il cammino lossodromico m per raggiungere il punto B, partendo dal punto A.

■ Per la nostra trattazione ci riferiamo al primo problema

PROBLEMA

Sulla superficie terrestre supposta sferica, siano $A(\varphi_A, \lambda_A)$ il punto di partenza, *R* la rotta lossodromica ed *m* il cammino percorso da una nave; si vuole determinare il punto $B(\varphi_B, \lambda_B)$ che si raggiungerà.

SOLUZIONE

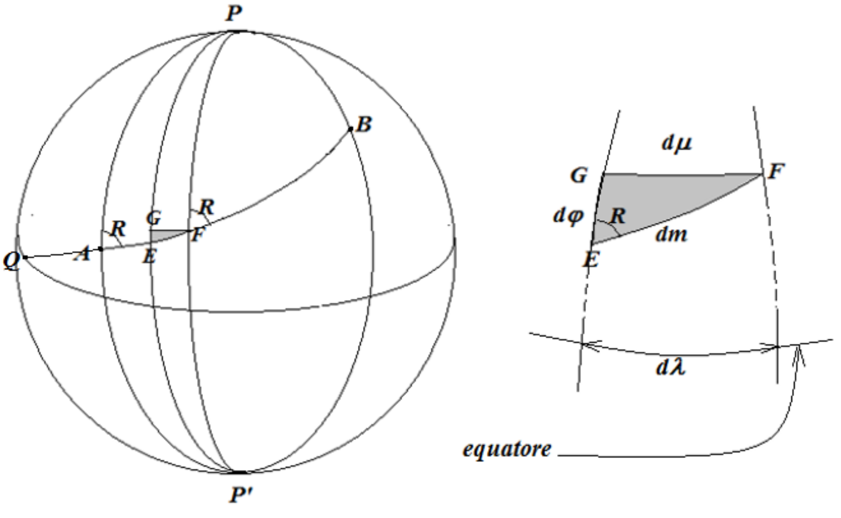
Come è noto, è:

$$\varphi_B = \varphi_A + \Delta\varphi \qquad \textit{algebrica}$$

$$\lambda_B = \lambda_A + \Delta\lambda, \qquad \textit{algebrica}$$

per cui il problema si riduce a determinare $\Delta\varphi$ e $\Delta\lambda$.

Allo scopo ci riferiamo alla seguente figura in cui AB è l'arco lossodromico da percorrere.



Presi su di essa due punti E ed F molto vicini tale da poter considerare infinitesimo l'arco EF e, tracciato il parallelo FG, dal triangolo rettangolo EFG, considerato piano per avere i lati infinitesimi, abbiamo:

$$d\varphi = dm \cos R$$

da cui, per integrazione definita $\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} d\varphi = \cos R \cdot \int_A^B dm$, otteniamo:

$$\Delta\varphi = m \cos R. \qquad (1)$$

Ancora abbiamo:

- dal triangolo rettangolo *EFG*:

$$d\mu = d\varphi \tan R \qquad (2)$$

- dalla relazione tra l'arco di parallelo *GF* con il corrispondente arco di equatore:

$$d\mu = d\lambda \cos\varphi \qquad (3)$$

  dove φ è la latitudine del parallelo di *F*.

Eguagliamo i secondi membri delle (2) e (3)

$$d\lambda \cos\varphi = d\varphi \tan R$$

e risolviamo rispetto a $d\lambda$:

$$d\lambda = \tan R \cdot \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

e, per integrazione definita:

$$\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda = \tan R \cdot \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{d\varphi}{\cos\varphi};$$

considerato l'arco lossodromico *AB* quale differenza tra i due archi lossodromici *QB* e *QA* (*Q* è il punto di incontro della lossodromia considerata con l'equatore); per un noto teorema sugli integrali definiti, abbiamo:

$$\Delta\lambda = \tan R \cdot \left[\int_0^{\varphi_B} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} - \int_0^{\varphi_A} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \right]$$

che scriviamo

$$\Delta\lambda = (\varphi_{c_B} - \varphi_{c_A}) \tan R \quad . \qquad (4)$$

nella quale φ_{c_A} e φ_{c_B} sono dette, rispettivamente, **latitudini crescenti** del punto di partenza *A* e di quello di arrivo *B*, cioè abbiamo posto:

$$\varphi_{c_A} = \int_0^{\varphi_A} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \qquad (5)$$

$$\varphi_{c_B} = \int_0^{\varphi_B} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \qquad (6)$$

Mediante integrazione indefinita integriamo, col metodo di sostituzione, la funzione $\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$, utilizzando la colatitudine:

$$c = 90° - \varphi \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} per \quad sostituzione: \quad \cos\varphi = \cos(90° - c) = \sin c \\ differenziando: \quad dc = -d\varphi \;\Rightarrow\; d\varphi = -dc \end{array} \right. ;$$

con queste posizioni otteniamo:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = -\int \frac{dc}{\sin c} = \left[per \;\; la \; formula \; di \; duplicazione \; del \; \text{“seno”} \right] = -\int \frac{dc}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}} = -\int \frac{d\,\frac{c}{2}}{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

=

$$= \left[moltiplicando \; numeratore \; e \; denominatore \; per \quad \cos\frac{c}{2} \right] = -\int \frac{1}{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \cdot d\,\frac{c}{2} =$$

$$= -\int \frac{1}{\tan\frac{c}{2}\cos^2\frac{c}{2}} \cdot d\,\frac{c}{2} = \left[ricordando \; la \; derivata \; della \; funzione \quad y = \ln\tan f(x) \right] =$$

$$= -\ln\tan\frac{c}{2} + k\,, \qquad (7)$$

dove k è la costante additiva nell'integrazione indefinita.

Ora effettuiamo alcuni "*virtuosismi*" al fine di scrivere la (7) in funzione della latitudine, e precisamente:

$$-\ln\tan\frac{c}{2} + k = \ln\left(\tan\frac{c}{2}\right)^{-1} + k = \ln\left(\frac{1}{\tan\frac{c}{2}}\right) + K = \ln\cot\frac{c}{2} + k = \left[essendo \right.$$

$$\left. c = 90° - \varphi \Rightarrow \frac{c}{2} = \frac{90° - \varphi}{2} \Rightarrow \frac{c}{2} = 45° - \frac{\varphi}{2} \right] = \ln\cot\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right) + k =$$

$\left[\textit{per una relazione sugli archi complementari}\right] = \ln \tan\left[90° - \left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)\right] + k =$

$$= \ln \tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) + k . \qquad (8)$$

Pertanto, in virtù della (8), le (5) e (6) diventano:

$$\varphi_{c_A} = \int_0^{\varphi_A} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \ln \tan\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right),$$

$$\varphi_{c_B} = \int_0^{\varphi_B} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \ln \tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right),$$

dalle quali la (4) si trasforma in:

$$\Delta\lambda = \left[\ln \tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right) - \ln \tan\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right)\right] \tan R =$$

$$\left[\text{ e } \textit{per il teorema del logaritmo di un rapporto}\right] = \ln \frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right)} \cdot \tan R$$

Ora, volendo $\Delta\lambda$ espresso in gradi sessagesimali, apportiamo il fattore correttivo $\frac{180°}{\pi}$, così che, abbiamo:

$$\Delta\lambda = \frac{180°}{\pi} \ln \frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right)} \cdot \tan R .$$

Supponiamo ora che il punto di arrivo *B* sia molto prossimo ad un polo, per esempio il Polo Nord che indichiamo semplicemente con la lettera *P*; pensiamo, cioè, ad una nave che parta da un punto *A* qualunque avente rotta nel primo o quarto quadrante; cosa succede se facciamo tendere il punto *B* al punto *P*?

Dal teorema del limite di una funzione moltiplicata per una costante, abbiamo:

$$\lim_{B \to P} \Delta\lambda = \frac{180°}{\pi} \cdot \tan R \cdot \lim_{\varphi_B \to 90°} \ln \frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right)} = +\infty,$$

infatti, per $\varphi_B \to 90° \Rightarrow \tan\left(45° + \dfrac{\varphi_B}{2}\right) \to +\infty$ ed il logaritmo, con base maggiore di 1, di un argomento che tende a +∞, tende a sua volta a +∞.

Calcoliamo ora il cammino; esso si ottiene dall'equazione (1) risolta rispetto ad m:

$$m = \frac{\Delta\varphi}{\cos R} \cdot 60 ,$$

che abbiamo moltiplicato per 60 al fine di ottenere il cammino espresso in miglia; per comodità la scriviamo come segue:

$$m = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\cos R} \cdot 60 ,$$

e ne facciamo il limite per $B \to P$:

$$\lim_{B \to P} m = \lim_{\varphi_B \to 90°} \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\cos R} \cdot 60 = \frac{90° - \varphi_A}{\cos R} \cdot 60 ,$$

che è un valore finito: questo è proprio il **paradosso** citato nel testo.

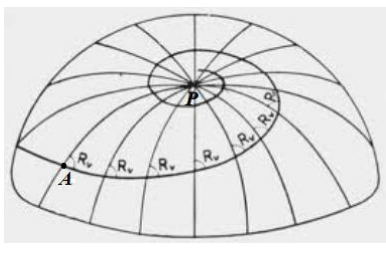
OSSERVAZIONE. Non è certo l'unico paradosso della matematica; per esempio nella curva chiusa di Koch (oggetto frattale ottenuto come limite di curve generate a partire da un triangolo equilatero), mentre il *perimetro diverge*, l'*area* (in esso contenuta) *converge*.

ESEMPIO. Sia $\varphi_A = 30°N$ la latitudine del punto di partenza A e sia R = 45° la rotta seguita dalla nave; in queste ipotesi, il cammino m per giungere al Polo Nord avrebbe, come visto, per limite:

$$m = \frac{\Delta\varphi}{\cos R} \cdot 60 = \frac{90° - 30°}{\cos 45°} \cdot 60 = \frac{60°}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 60 = 3600' \cdot \sqrt{2} \cong (5091.17)' = 5091.17 mg ,$$

mentre, **paradossalmente**, come prima detto, la variazione di longitudine tende ad infinito.

Questo ci dice che una lossodromia si avvolge indefinitamente attorno ai poli di cui i poli stessi ne sono gli asintoti; pertanto è una spirale a doppia curvatura (*spirale di Archimede*) che, dovendo mantenere costante l'angolo che forma con i meridiani, devia continuamente avvicinandosi sempre più ai poli, senza mai raggiungerli



Non dobbiamo meravigliarci di questo, perché una nave che percorre un tratto di questa spirale facendo più volte il giro del globo, alla fine, la sua variazione di longitudine sarà, come teoricamente è definita, minore di 180° con nome *Est* od *Ovest*. Per esempio sia la variazione di longitudine $\Delta\lambda = 2000°E$, allora è $\Delta\lambda$ = (5 ·

360° + 200°)E = 200°E = (360° – 200°)W = 160°W. Ciò si verifica per la peculiarità della geometria della circonferenza percorsa positivamente in un senso o nell'altro, come avviene, nella geometria goniometrica e nella geometria dell'orologio.

OSSERVAZIONE 1. Al limite finito dell'espressione del cammino, per $\varphi_B \to 90°$, corrisponderà un limite finito del tempo necessario a percorrere quel cammino (dipendente dalla velocità della nave); ma, queste considerazioni sono puramente teoriche perché sarebbero accettabili solo per una nave considerata **puntiforme**.

OSSERVAZIONE 2. Nel procedimento adottato per l'integrazione emerge che risulta agevole l'integrazione del reciproco del seno a fronte del reciproco del coseno; è per questa ragione che abbiamo utilizzato la colatitudine perché complementare della latitudine; si poteva procedere mantenendo la latitudine ricordando le relazioni goniometriche che legano angoli che differiscono dell'angolo retto, e precisamente:

$$\int \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi = \int \frac{1}{\sin(90° + \varphi)} d\varphi = \int \frac{1}{2\sin\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)} \right) dx \quad = \ln \tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) + k \,,$$

che è la (8).

L'ultima integrazione è avvenuta in virtù della seguente regola di integrazione del logaritmo di una funzione:

$$\int f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} dx = \ln\left| f(x) \right| + k$$

Oppure si poteva ricorrere ad un manuale di integrazione da cui, prescindendo dalla costante additiva, avremmo copiato la "*formula*"

$$\int \frac{1}{\cos(ax+n)} dx = \frac{\ln \cos(ax+b)}{a} - \frac{\ln(1 - \sin(ax+b))}{a} \;;$$

che, nel nostro caso, essendo a =1 e b = 0, diventa:

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \cos x - \ln(1 - \sin x) = \ln \frac{\cos x}{1 - \sin x} \;=$$

mediante le formule parametriche

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} = \ldots = \ln \frac{1+t}{1-t} = \ln \frac{1 + \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan\frac{x}{2}} = \ln \frac{\tan 45° + \tan 45° \tan\frac{x}{2}}{\tan 45° - \tan 45° \tan\frac{x}{2}} =$$

$$= \ln \tan\left(45° + \frac{x}{2}\right),$$

che, sostituendovi la lettera φ alla lettera x e addizionandovi la costante k, è la (8).