INTERSEZIONE DI LOSSODROMIE

►EQUAZIONE DELLA LOSSODROMIA

PREMESSA

Siano $A(2;1)$ e $B\left(-1;\frac{5}{2}\right)$ due punti del piano cartesiano; per essi passa una ed una sola retta r del piano, la cui pendenza *m* è:

$$m=\frac{1-\frac{5}{2}}{2-(-1)}=-\frac{1}{2};$$

pertanto l'equazione della retta r è del tipo

$$y=-\frac{1}{2}x+q. \qquad (*)$$

ovvero è una delle infinite rette del fascio improprio (rette tra loro parallele) aventi la stessa pendenza $-\frac{1}{2}$.

OSSERVAZIONE. Abbiamo battezzato il *coefficiente angolare* (denominazione utilizzata in geometria analitica) *m* della retta con la locuzione "*pendenza*". Non è certo un caso, infatti la pendenza di una curva in un suo punto è il valore che la derivata prima della funzione assume in quel punto; nel nostro caso la derivata prima della funzione *y* è infatti $-\frac{1}{2}$ che è una costante e quindi esprime la pendenza in tutti i punti di quelle rette.

Osservazione: le rette, non parallele all'asse delle ordinate, sono le uniche curve, del piano cartesiano, aventi pendenza costante.

Ancora è importante non confondere la *pendenza* con l'*inclinazione* che, purtroppo, in alcuni testi sono considerati sinonimi. Sono, in realtà entità diverse, anche se tra loro legate matematicamente.

L'inclinazione è l'angolo α che la retta forma con l'asse delle ascisse misurato in senso antiorario, a partire dal semiasse positivo delle ascisse, ed il coefficiente angolare o pendenza è $m=\tan\alpha$.

Nel caso della retta di equazione (*) l'inclinazione è $\alpha=\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)\cong 153°26'06''$.

Ora sostituiamo le coordinate dei punti A e B nella (*) e risolviamo le due equazioni determinate rispetto al parametro *q*.

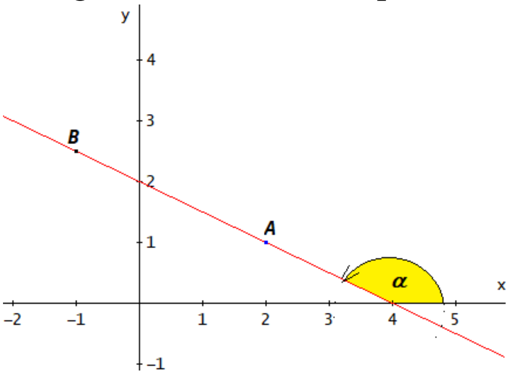
- Per il punto *A* abbiamo:

$$1 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + q \qquad \Rightarrow \quad q = 2\,;$$

- per il punto *B* abbiamo:

$$\frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \cdot (-1) + q \qquad \Rightarrow \quad q = 2\,.$$

Come si vede, ed era da aspettarselo, otteniamo la stessa ordinata all'origine. Riportiamo il grafico che, grazie a Cartesio, ci permette di "*vedere*" l'algebra.



► Questo procedimento lo possiamo usare anche per la lossodromia. Vediamo in che modo, utilizzando (per esempio) i dati del 1°*esempio* del testo " NAVIGAZIONE TRADIZIONALE " di Aldo Nicoli, alla pagina 139.

Riportiamo le ultime righe della pagina 121 dello stesso testo*: L'arco di lossodromia AB non è il minimo percorso tra i due punti; come è già noto la minima distanza tra due punti della sfera è misurata sull'arco di circolo massimo minore di π.*

Abbiamo rimarcato in colore rosso l'aggettivo *minima* che non avrebbe dovuto essere scritto; infatti la ***distanza*** tra due punti considerati in un determinato UNIVERSO è unica ed esprime il minimo percorso tra i suddetti punti in quel determinato UNIVERSO. È pertanto concettualmente non corretto parlare di *minima distanza.*

È invece corretto dire che la distanza sferica tra due punti *A* e *B* è l'arco di circolo massimo, minore di π, avente per estremi i due punti *A* e *B.*

NOTA. In navigazione questo arco viene chiamato *ortodromia*.

Dall'enciclopedia Treccani si legge; **ortodromìa** (o **ortodròmia**) s. f. [comp. dal gr. ὀρθός «**retto, diritto**» e -δρομία «**corsa**»; cfr. ὀρθοδρομέω «**correre dritto**»]. – In geometria sferica, linea che individua il più breve cammino tra due punti di una superficie sferica (in particolare, della superficie terrestre); è perciò il minore dei due archi di cerchio massimo che hanno per estremi i due punti. (ed è per questo che si chiama distanza sferica). Se i due punti sono diametralmente opposti, i due archi che individuano sono entrambi ortodromie: trattasi di caso limite, infatti la distanza sferica, in tale caso, è uno dei due archi individuati dai due punti diametralmente opposti.

E' importante ricordare che per due punti di una superficie sferica, non diametralmente opposti, passa uno ed un solo circolo massimo, allo stesso modo come avviene sul piano per due punti passa una ed una sola retta. Contrariamente, se i due punti sono diametralmente opposti le circonferenze massime della superficie sferica che individuano sino infinite, come avviene per i circoli meridiani della superficie terrestre.

Ora veniamo al problema di lossodromia. Per due punti della superficie terrestre passano infinite lossodromie, ma una ed una sola che individui un arco compreso nel fuso sferico limitato dai meridiani di *A* e di *B*; e noi ci riferiamo solo a questa lossodromia.

Come l'equazione di una retta dipende dai parametri *pendenza m e ordinata all'origine q*, allo stesso modo l'equazione di una lossodromia dipende dalla ***longitudine*** $\boldsymbol{\lambda_N}$ ***del nodo*** e dalla ***rotta vera circolare R***. Pertanto l'equazione, considerando la Terra sferica, è del tipo

$$\lambda = \lambda_N + \ln\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \tan R, \qquad (1)$$

nella quale φ e λ sono le coordinate del punto corrente.

La funzione

$$\ln\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) \qquad (2)$$

è espressa in radianti.

Preferendo lavorare nel sistema sessagesimale, moltiplichiamo la funzione (2) per $\frac{10800'}{\pi}$, così che esprimiamo tutti i tre termini della (1) in primi d'arco:

$$(\lambda)' = (\lambda_N)' + \ln\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \frac{10800'}{\pi} \tan R \qquad (3)$$

PROBLEMA.

Siano note le due seguenti traversate lossodromiche:

1. una nave parte da Taranto $(\varphi = 40°16'N; \lambda = 17°02'E)$ per giungere a Tobruk $(\varphi = 32°28'N; \lambda = 24°00'E)$
2. una nave parte da Smirne $(\varphi = 38°24'N; \lambda = 27°08'E)$ per giungere a Tripoli $(\varphi = 32°54'N; \lambda = 13°11'E)$ (con la supposizione che non esistano le isole Igee od altre isole su questo tratto di lossodromia)

Determinare le coordinate geografiche del punto *I* di intersezione delle due lossodromie.

SOLUZIONE

■ LOSSODROMIA TARANTO-TOBRUK

● PARTENZA DA TARANTO φ=40°16'*N* λ=17°02'*E*

►Latitudine crescente della latitudine di Taranto:

$$(\varphi_c)_{Taranto} = \ln\tan\left(45° + \frac{40°16'}{2}\right) \cdot \frac{10800'}{\pi} = 2643.617676'$$

- ARRIVO A TOBRUK φ=32°28'*N* λ=24°*E*

►Latitudine crescente della latitudine di Tobruk:

$$(\varphi_c)_{Tobruk} = \ln\tan\left(45° + \frac{32°28'}{2}\right)\cdot\frac{10800'}{\pi} = 2061.485341'$$

► Valore assoluto differenza latitudini crescenti:

$$\Delta\varphi_c = |2643.617676' - 2061.485341'| = 582.1323349'$$

►Valore assoluto differenza longitudine:

$$(\Delta\lambda)' = |1440' - 1022'| = 418'$$

► Rotta vera quadrantale:

$$\tan r = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi_c} = \frac{418'}{582.1323349'} = 0.7180497885$$

►Rotta vera quadrantale espressa in radianti

$$r = \arctan(0.7180497885) = 0.6227374789$$

►Rotta vera quadrantale espressa in gradi sessagesimali, avente prefisso *SUD* e suffisso *EST*:

$$r = S\,\frac{0.6227374789\cdot 180°}{\pi}\,E = S35.68022928°E = S35°40'49''E$$

►Rotta vera circolare:

$$R = 180° - 35°40'49'' = 144°19'11''$$

Risolviamo la (3) rispetto alla variabile $(\lambda_N)'$

$$(\lambda_N)' = (\lambda)' - \ln\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)\cdot\frac{10800'}{\pi}\tan R \qquad (4)$$

Con la (4) calcolo la longitudine del nodo:

- con le coordinate di Taranto:

$$(\lambda_N)' = 1022' - \ln\tan\left(45° + \frac{40°16'}{2}\right)\cdot\frac{10800'}{\pi}\tan 144°19'11'' = 2920.252504'$$

- con le coordinate di Tobruk

$$(\lambda_N)' = 1440' - \ln\tan\left(45° + \frac{32°28'}{2}\right)\cdot\frac{10800'}{\pi}\tan 144°19'11'' = 2920.251757'$$

I due valori, leggermente diversi, ottenuti ci suggeriscono di considerarne la loro media aritmetica per la longitudine del nodo

$$(\lambda_N)' = \frac{2920.252504' + 2920.251757'}{2} = 2920.25213' \quad\Rightarrow\quad \lambda_N = 48°40'15''E$$

►L’equazione della lossodromia Taranto-Tobruk è quindi:

$$2920.25213' = (\lambda)' - \ln\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)\cdot\frac{10800'}{\pi}\tan 144°19'11''$$

nella quale i parametri sono la longitudine del nodo 2920.25213’ e la rotta vera circolare 144°19’11’’mentre φ e λ sono le coordinate del punto corrente.

■ LOSSODROMIA SMIRNE-TRIPOLI

● PARTENZA DA SMIRNE φ=38°24'*N* λ=27°08'*E*

►Latitudine crescente della latitudine di Smirne

$$(\varphi_c)_{Smirne} = \ln\tan\left(45° + \frac{38°24'}{2}\right)\cdot\frac{10800'}{\pi} = 2498.80097'$$

● ARRIVO A TRIPOLI φ=32°54'*N* λ=13°11'*E*

►Latitudine crescente della latitudine di Tripoli

$$(\varphi_c)_{Tripoli} = \ln\tan\left(45° + \frac{32°54'}{2}\right)\cdot\frac{10800'}{\pi} = 2092.376519'$$

►Valore assoluto differenza latitudini crescenti

$$\Delta\varphi_c = |2498.80097' - 2092.376519'| = 406.424451'$$

valore assoluto differenza longitudine

$$(\Delta\lambda)' = |1628' - 791'| = 837'$$

►Rotta vera quadrantale

$$\tan r = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi_c} = \frac{837'}{406.424451'} = 2.059423339$$

► Rotta vera quadrantale espressa in radianti

$$r = \arctan(2{,}059423339) = 1.118756932$$

►Rotta vera quadrantale espressa in gradi sessagesimali, avente prefisso *SUD* e suffisso *OVEST*

$$r = S\,\frac{1.118756932\cdot 180°}{\pi}\,W = S64.1000505°W = S64°06'W$$

►Rotta vera circolare:

$$R = 64°06' + 180° = 244°06'$$

- Longitudine nodo con coordinate di Smirne

$$(\lambda_N)' = 1628' - \ln\tan\left(45° + \frac{38°24'}{2}\right) \cdot \frac{10800'}{\pi} \tan 244°06' = -3518.07749'$$

- Longitudine nodo con coordinate di Tripoli

$$(\lambda_N)' = 791' - \ln\tan\left(45° + \frac{32°54'}{2}\right) \cdot \frac{10800'}{\pi} \tan 244°06' = -3518.079369'$$

►VALORE MEDIO dei due valori calcolati

$$(\lambda_N)' = \frac{-3518.07749' + (-3518.079369)'}{2} = -3518.078429'$$

►L'equazione della lossodromia Smirne-Tripoli è:

$$-3518.078429' = (\lambda)' - \ln\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \frac{10800'}{\pi} \tan 244°06'$$

nella quale i parametri sono la longitudine del nodo -3518.078429 e la rotta circolare 244°06'mentre φ e λ sono le coordinate del punto corrente.

■ Determiniamo le coordinate del punto di *I* di intersezione delle due lossodromie mettendo a sistema le loro equazioni ovvero le espressioni:

$$\begin{cases} 2920.25213 = (\lambda)' - \ln\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \frac{10800'}{\pi} \cdot \tan 144°19'11'' \\ -3518.078429' = (\lambda)' - \ln\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \frac{10800'}{\pi} \cdot \tan 244°06' \end{cases}$$

OSSERVAZIONE.
La parola *sistema* è sinonimo della parola *simultaneità* nel senso che si vogliono ricercare solo quelle determinazioni degli argomenti che soddisfano contemporaneamente tutte le equazioni del sistema stesso, pertanto possiamo scrivere "*sistema=simultaneità*"; infatti, dal punto di vista etimologico abbiamo: *sistema* deriva dalla parola latina *systèma* che a sua volta deriva dalla parola greca *sỳstêma* formata dalle particelle *sỳn* (*con, insieme*) e *stêma*(*stare, collocare*), da cui ritorna nuovamente la parola "*simultaneità*".
L'inglese è priva di un termine sinonimo di sistema perché non ha il ceppo latino ed allora gli inglesi lo chiamano "*simultaneous equations*". Per noi è normale parlare oltre che di sistemi di equazioni, anche di sistemi di disequazioni, di sistemi misti; la domanda è "come si comportano, in questi due ultimi casi, gli inglesi?"

Risolviamo il sistema col metodo della sottrazione: sottraggo la seconda equazione dalla prima:

$$6438.330572 = 9548.237792 \cdot \ln \tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\ln \tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) = 0.6742951644$$

$$\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) = 1.962649143$$

$$\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) = 63°00'02' \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 36°00'03''\,N$$

che sostituita in una delle due equazioni del sistema otteniamo la longitudine

$$\lambda = 20°55'46''\,E$$

pertanto le coordinate del punto richiesto sono

$$I(36°00'03''\,N; 20°55'46''\,E)$$

■ Costruisco la Carta di Mercatore dello specchio acqueo interessato al problema