PROBLEMA

Alle $t_f = 12^h 00^m$ una nave *N* si trova a 2.0 *mg* ad est di un faro *F*. La nave, con velocità *v* = 12 *nodi*, punta al faro mantenendo il rilevamento polare costante $+30°$.

Determinare;

a) Il tipo di traiettoria che percorre la nave
b) Il cammino percorso dopo una accostata di 135°
c) L'ulteriore cammino che percorre per giungere in *F* (*diciamo punto di collisione*)
d) L'ora di collisione.

SOLUZIONE

1. Tenuto conto della limitata zona acquea in cui avviene la manovra, posso ritenere che la traiettoria descritta dalla nave avvenga su una superficie piana; con questa ipotesi la curva descritta dalla nave è una *spirale logaritmica* la cui equazione, in coordinate polari **(** ρ (raggio vettore); ϑ (anomalia)**)**, è del tipo

$$\rho(\vartheta) = a \cdot e^{b \cdot \vartheta} \qquad \textbf{(*)}$$

in cui a e b sono parametri.

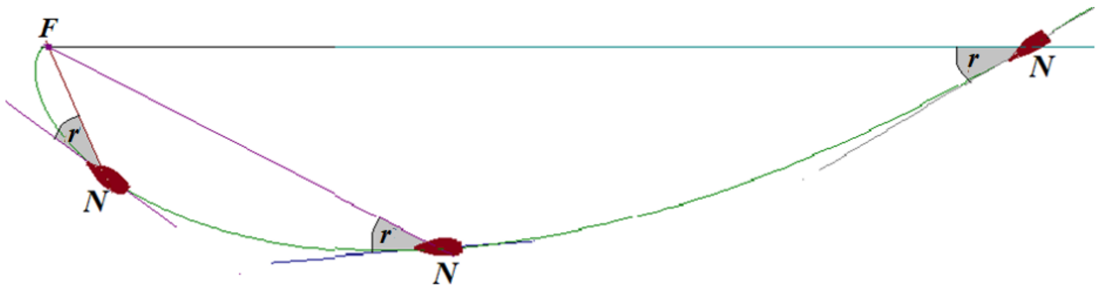
Nel nostro caso i parametri sono:

- $a = 2mg$
- $b = \tan(-30°) \cong -0.58$ (il segno negativo è giustificato dal fatto che le rotazioni sono contrarie al senso di rotazione ritenuto positivo ovvero antiorario)

Pertanto la traiettoria seguita dalla nave ha equazione

$$\rho(\vartheta) = 2 \cdot e^{-0.58 \cdot \vartheta} \qquad \textbf{(**)}$$

Ed ecco il grafico della traiettoria che segue la nave per giungere ad *F*, che, come si sa, è punto asintotico per la spirale logaritmica.



►**PREMESSA AL PUNTO** "b)". Per determinare i vari cammini $\mathcal{L}$ che percorre la nave partiamo dall'equazione (*), dove ρ è funzione continua assieme alla sua derivata prima ρ'; la lunghezza $\mathcal{L}$ di un suo arco AB, i cui estremi A e B abbiano rispettivamente anomalia ϑ_1 e ϑ_2, tale che $\vartheta_1 < \vartheta_2 \wedge 0 < \vartheta_2 - \vartheta_1 \leq 2 \cdot \pi$, è data dall'espressine (senza portarne la dimostrazione)

$$\mathcal{L} = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\rho^2(\vartheta) + (\rho'(\vartheta))^2}\, d\vartheta \qquad \textbf{(***)}$$

►Applico la (***) sulla (**):

PROCEDIMENTO

- la derivata prima della (**) è:

$$\rho'(\vartheta) = -1.16 \cdot \cdot e^{-0.58 \cdot \vartheta}$$

- la funzione integranda della **(***)**, è

$$\sqrt{\left(\left(2 \cdot e^{-0.58 \cdot \vartheta}\right)^2 + \left(-1.16 \cdot e^{-0.58 \cdot \vartheta}\right)^2\right)}$$

Così posso rispondere alle domande “b)” e “c)”:

a) Il cammino fino all'accostata di 135° espressa in gradi sessagesimali, a cui corrispondono $\frac{3}{4} \cdot \pi$ radianti, è

$$\int_0^{\frac{3}{4}\cdot\pi} \sqrt{\left(\left(2 \cdot e^{-0.58 \cdot \vartheta}\right)^2 + \left(-1.16 \cdot e^{-0.58 \cdot \vartheta}\right)^2\right)} \cdot d\vartheta = 2.969897983$$

b) L'ulteriore cammino fino alla collisione è

$$\int_{\frac{3}{4}\cdot\pi}^{+\infty} \sqrt{\left(\left(2 \cdot e^{-0.58 \cdot \vartheta}\right)^2 + \left(-1.16 \cdot e^{-0.58 \cdot \vartheta}\right)^2\right)} \cdot d\vartheta = 1.016404365$$

OSSERVAZIONE. L’estremo inferiore dell’integrale definito è giustificato per il fatto che il cammino calcolato nella riga #5 parte nell’istante del raggiungimento dell’accostata di 135°; l’estremo superiore è giustificato dal fatto che la spirale è una curva infinita il cui domino è $-\infty < \vartheta \le 0$ (ricordo la tendenza asintotica della curva, verso il punto *F*, per $\vartheta \to -\infty$)

■ Verifico il cammino totale fino alla collisione

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\left(\left(2 \cdot e^{-0.58 \cdot \vartheta}\right)^2 + \left(-1.16 \cdot e^{-0.58 \cdot \vartheta}\right)^2\right)} \cdot d\vartheta = 3.986302349$$

addiziono i valori numerici delle righe #4 e #5 e ottengo il valore della riga #6

$$2.969897983 + 1.016404365 = 3.986302348$$

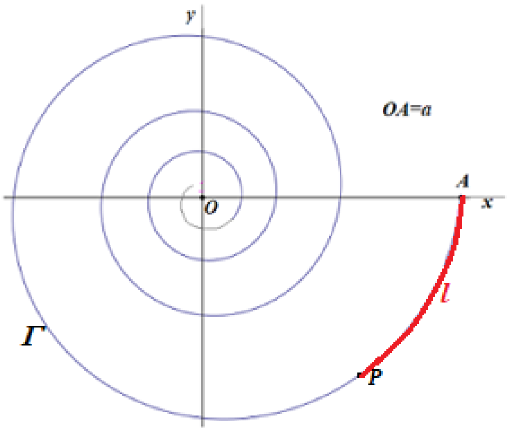
con una differenza solo sulla nona cifra decimale dovuta alle approssimazioni del calcolo dei vari integrali definiti.

c) L’ora di collisione, approssimando il cammino totale a 4 *mg*, si ottiene mediante l’espressione

$$t'_f = 12^h 00^m + 00^h 20^m = 12^h 20^m .$$

SOLO PER GLI APPASSIONATI DI MATEMATICA

■ Desidero scrivere una espressione che consenta di determinare la misura della lunghezza di tutta la spirale che dipenda, nella funzione (*), solo dalla conoscenza dei parametri *a* e *b*, nella quale poniamo $b > 0$ e $\vartheta \in R$; il grafico è del tipo:



Indicato con $P(\rho, \vartheta)$ il punto corrente della curva *Γ*, è:

$$O(0, -\infty) \quad \text{e} \quad A(a, 0);$$

il punto *O* è asintotico per la curva *Γ*.

▶ Le equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = a \cdot e^{b \cdot \vartheta} \cdot \cos \vartheta \\ y = a \cdot e^{b \cdot \vartheta} \cdot \sin \vartheta \end{cases} \qquad \text{\#2 e 3}$$

nelle quali è $\vartheta \in \left]-\infty, 0\right]$.

Costruisco la funzione:

$$F(\vartheta) = \sqrt{[x'(\vartheta)]^2 + [y'(\vartheta)]^2} \; . \qquad (*)$$

Ed allora calcolo x' e y'

$$x' = e^{b \cdot \vartheta} \cdot (a \cdot b \cdot \cos \vartheta - a \cdot \sin \vartheta)$$

$$y' = e^{b\cdot\vartheta}\cdot\left(a\cdot b\cdot\cos\vartheta + a\cdot b\cdot\cos\vartheta\right)$$

da cui, la (*) diventa

$$\sqrt{\left(\left(e^{b\cdot\vartheta}\cdot\left(a\cdot b\cdot\cos\vartheta - a\cdot\sin\vartheta\right)\right)^2 + \left(e^{b\cdot\vartheta}\cdot\left(a\cdot\cos\vartheta + a\cdot b\cdot\sin\vartheta\right)\right)^2\right)} = e^{b\cdot\vartheta}\cdot\sqrt{\left(b^2+1\right)}\cdot a$$

Indico ora con l l'arco di curva compreso tra il punto A ed il punto corrente P (vedi figura), allora è:

$$dl = (-e^{b\cdot\vartheta}\cdot a\cdot\sqrt{b^2+1})d\vartheta$$

nella quale il segno (-) è giustificato dal fatto che la funzione l è decrescente essendo misurata nel senso delle anomalie decrescenti.

Allora la misura dell'arco l=AP è data dall'integrale

$$l = -\int_0^{\vartheta}\left(e^{b\cdot\theta}\cdot a\cdot\sqrt{b^2+1}\right)d\vartheta \ .$$

Prendo sulla curva Γ un riferimento curvilineo con origine nel punto A e tale che l'arco l sia misurato nel senso delle anomalie decrescenti; quindi considero la funzione

$$-e^{b\cdot\vartheta}\cdot\sqrt{\left(b^2+1\right)}\cdot a$$

che integro

$$\int_0^{\vartheta} -e^{b\cdot\vartheta}\cdot\sqrt{\left(b^2+1\right)}\cdot a\cdot d\vartheta$$

in esecuzione ottengo

$$\frac{a\cdot\sqrt{b^2+1}}{b} - \frac{a\cdot e^{b\cdot\vartheta}\cdot\sqrt{b^2+1}}{b} \qquad (\#)$$

la lunghezza di tutta la spirale è data dal limite dell'espressione (#) per $\vartheta \to -\infty$.

Osservo che il primo termine dell'espressione (#) è indipendente da ϑ quindi mi soffermo sul secondo termine e rilevo; tenuto conto che b è una costante positiva, è: $\lim_{\vartheta\to-\infty} e^{b\cdot\vartheta} = 0$

Per cui, in virtù del teorema del limite di una costante, è:

$$l = \frac{a\cdot\sqrt{b^2+1}}{b}$$

Nel nostro caso per a =2 e |b|=0.58, è: $\quad l = \dfrac{2\cdot\sqrt{0.58^2+1}}{0.58} \cong 3.986302349$

ovvero circa 4 *mg*, come avevo trovato prima.

(Testo del Prof. Manlio Milazzo)