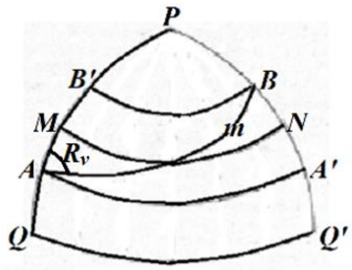
LOSSODROMIA: METODO APPROSSIMTO O METODO ESATTO?

L'accettazione del metodo approssimato per determinare la differenza di longitudine è vincolata da determinati valori del cammino *m*, della latitudine media φ_m e dalla rotta vera R_v.

Vogliamo determinare l'espressione dell'errore che si commette col metodo approssimato.

Partiamo dalla seguente figura



nella quale sono segnati:

- i punti $A(\varphi_A, \lambda_A)$ e $B(\varphi_B, \lambda_B)$, estremi di un arco lossodromico avente lunghezza *m* miglia,
- l'arco di parallelo *AA*' di latitudine φ_A,
- l'arco di parallelo *BB*' di latitudine φ_B,
- l'arco di equatore *QQ*'$=\Delta\lambda_{AB} = \lambda_B - \lambda_A$ *(algebrica)*,
- l'arco di parallelo *MN* di latitudine media $\varphi_m = \dfrac{\varphi_A + \varphi_B}{2}$ *(algebrica)*.
- R_v la rotta vera supposto *A* il punto di partenza di una nave.

I problemi della navigazione lossodromica sono due:

1. Noto il punto di partenza $A(\varphi_A, \lambda_A)$, determinare le coordinate del punto *B* in cui si troverà la nave dopo avere percorso, con rotta vera R_v, un cammino di *m* miglia.
2. Noto il punto di partenza $A(\varphi_A, \lambda_A)$ e il punto di arrivo $B(\varphi_B, \lambda_B)$ determinare la rotta vera R_v da seguire ed il cammino *m* da percorrere.

Il metodo approssimato si basa sull'utilizzo della lunghezza dell'arco di parallelo *MN*, che approssima l'*appartamento* o *allontanamento* μ (vedi dimostrazione in un libro di testo); pertanto non si fa uso delle "latitudini crescenti". Indicando semplicemente $\Delta\lambda_{AB}$ con $\Delta\lambda$, la relazione che lega $\Delta\lambda$ con μ, è:

$$\mu = \Delta\lambda \cdot \cos\varphi_m \qquad (1)$$

Si dimostra che le equazioni della navigazione lossodromica nel metodo approssimato sono:

$$\Delta\varphi = m \cdot \cos r_v \qquad (2) \qquad \text{e} \qquad \mu = m \cdot \sin r_v \qquad (3)$$

nelle quali riteniamo opportuno esprimere la rotta R_v nella corrispondente rotta quadrantale r_v

- Il primo problema viene risolto dalla (2) e dalla (1) risolta rispetto a $\Delta\lambda$ tenendo conto della (3), ovvero:

$$\Delta\lambda = \mu \cdot \sec\varphi_m = m \cdot \sin r_v \cdot \sec\varphi_m \qquad (4)$$

- Per il secondo problema si opera come segue:
  si dividono membro a membro la (3) con la (2)

$$\frac{\mu}{\Delta\varphi} = \frac{m \cdot \sin r_v}{m \cdot \cos r_v} \quad \Rightarrow \quad \tan r_v = \frac{\mu}{\Delta\varphi} \qquad (5)$$

  e, tenuto conto della (1), è:

$$\tan r_v = \frac{\Delta\lambda \cdot \cos\varphi_m}{\Delta\varphi};$$

  dalla (2) otteniamo il cammino *m*:

$$m = \Delta\varphi \cdot \sec r_v .$$

►Nel metodo esatto vale ancora la (2), mentre la (4) va sostituita con:

$$\Delta\lambda = \left[\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_B}{2}\right) - \ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_A}{2}\right)\right] \cdot \tan r_v \qquad (6)$$

nella quale, per una latitudine qualunque φ, l'espressione $\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$ si dice *latitudine crescente* e si indica con φ_c; pertanto la (6) si può scrivere:

$$\Delta\lambda = \left[(\varphi_B)_c - (\varphi_A)_c\right] \cdot \tan r_v \qquad (7)$$

e, indicando semplicemente $(\Delta\varphi_{AB})_c$ con $\Delta\varphi_c$, la (7) si scrive:

$$\Delta\lambda = \Delta\varphi_c \cdot \tan r_v . \qquad (8)$$

►Ora proviamo a confrontate la (4) con la (8).

La latitudine crescente, come visto, è funzione della corrispondente latitudine ed allora per le latitudini $\varphi_A = \varphi_m - \frac{\Delta\varphi_{AB}}{2}$ e $\varphi_B = \varphi_m + \frac{\Delta\varphi_{AB}}{2}$ possiamo scrivere le funzioni:

$$(\varphi_A)_c = f\left(\varphi_m - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \qquad (9)$$

$$(\varphi_B)_c = f\left(\varphi_m + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \qquad (10)$$

le (9) e (10) sono del tipo $y = f(x+h)$ il cui sviluppo in serie di Taylor è:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(x)}{3!} \cdot h^3 + \frac{f^{IV}(x)}{4!} \cdot h^4 \ldots\ldots; \qquad (11)$$

così la (9) può scriversi

$$(\varphi_A)_c = f\left(\varphi_m - \frac{\Delta\varphi_{AB}}{2}\right)$$

$$f(\varphi_m) = \varphi_{m_c} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{m_c} = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_m}{2}\right)$$

$$(\varphi_{m_c})' = \frac{\dfrac{1}{2\cdot\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi_m}{2}\right)}}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi_m}{2}\right)} = \frac{\dfrac{1}{2\cdot\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi_m}{2}\right)}}{\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi_m}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi_m}{2}\right)}} = \frac{1}{2\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi_m}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi_m}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

da cui facilmente si calcolano le due successive derivate, volendoci fermare ai primi 4 termini della serie:

$$(\varphi_{m_c})'' = \frac{\sin\varphi_m}{\cos^2\varphi_m}$$

$$(\varphi_{m_c})''' = \frac{\sin^2\varphi_m + 1}{\cos^3\varphi_m}$$

$$(\varphi_A)_c = f(\varphi_m) - \frac{1}{\cos\varphi_m}\cdot\frac{\Delta\varphi}{2} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{\sin\varphi_m}{\cos^2\varphi_m}\cdot\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{\sin^2\varphi_m+1}{\cos^3\varphi_m}\cdot\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^3 =$$

$$= f(\varphi_m) - \frac{\Delta\varphi}{2\cdot\cos\varphi_m} + \frac{(\Delta\varphi)^2\cdot\sin\varphi_m}{8\cdot\cos^2\varphi_m} - \frac{(\Delta\varphi)^3\cdot(\sin^2\varphi_m+1)}{48\cdot\cos^3\varphi_m};$$

in modo analogo, è:

$$(\varphi_B)_c = f(\varphi_m) + \frac{\Delta\varphi}{2\cdot\cos\varphi_m} + \frac{(\Delta\varphi)^2\cdot\sin\varphi_m}{8\cdot\cos^2\varphi_m} + \frac{(\Delta\varphi)^3\cdot(\sin^2\varphi_m+1)}{48\cdot\cos^3\varphi_m}$$

$$(\Delta\varphi_{AB})_c = (\varphi_B)_c - (\varphi_A)_c = \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi_m} + \frac{(\Delta\varphi)^3\cdot(\sin^2\varphi_m+1)}{24\cdot\cos^3\varphi_m} \qquad (12)$$

Tenuto conto della (8), dalla (12) abbiamo

$$\Delta\lambda_{AB} = \frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi_m}\cdot\tan r_v + \frac{(\Delta\varphi)^3\cdot(\sin^2\varphi_m + 1)}{24\cdot\cos^3\varphi_m}\cdot\tan r_v$$

Tenuto conto della (5), abbiamo:

$$\Delta\lambda_{AB} = \mu\cdot\sec\varphi_m + \frac{(\Delta\varphi)^3\cdot(\sin^2\varphi_m + 1)}{24\cdot\cos^3\varphi_m}\cdot\tan r_v \qquad (13)$$

Nella (13) il primo termine è la differenza di longitudine calcolata col metodo approssimato; pertanto l'accettazione di questo valore comporta un errore (pur in difetto rispetto al vero errore per esserci fermati al quarto termine della serie di Taylor) espresso dal secondo termine che riscriviamo introducendo il cammino *m*:

$$\frac{(m\cdot\cos r_v)^3\cdot(\sin^2\varphi_m + 1)}{24\cdot\cos^3\varphi_m}\cdot\tan r_v$$

o, meglio

$$\frac{1}{24}\cdot m^3\cdot(\sin r_v\cdot\cos^2 r_v)\cdot\frac{1+\sin^2\varphi_m}{\cos^3\varphi_m} \qquad (14)$$

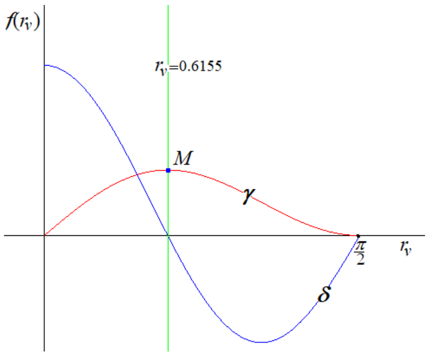
- il primo fattore è una costante moltiplicativa e quindi non influisce sulla variabilità dell'errore;
- il secondo fattore è il cubo del cammino, pertanto l'errore aumenta col crescere del cammino,
- il terzo fattore dipende dalla variabilità della rotta, pertanto bisogna analizzare la funzione $f(r_v) = \sin r_v\cdot\cos^2 r_v$:

$$f'(r_v) = 3\cdot\cos^3 r_v - 2\cdot\cos r_v$$

per $0 \le r_v \le \frac{\pi}{2}$ si ha $\quad f'(r_v) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_v \cong 0.6155\, radianti$

$$f''(r_v) = 2\cdot\sin r_v - 9\cdot\sin r_v\cdot\cos^2 r_v \quad \Rightarrow$$

$2\cdot\sin 0.6155 - 9\cdot\sin 0.6155\cdot\cos^2 0.6155 \cong -2.309 < 0 \quad \Rightarrow$ il terzo fattore ha il massimo in $r_v \cong 0.6155\, radianti$, ovvero in $r_v \cong 35°$; indicando con γ la curva grafico della funzione *f* e con δ quella della funzione *f'*, abbiamo sul piano cartesiano



- il quarto fattore dipende dalla variabilità della latitudine media, pertanto bisogna analizzare la funzione $f(\varphi_m)=\frac{1+\sin^2\varphi_m}{\cos^3\varphi_m}$ nel dominio $0\le\varphi_m<\frac{\pi}{2}$:

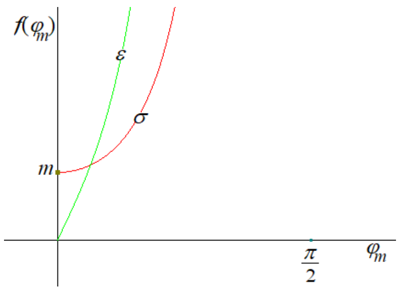
$$f'(\varphi_m)=\frac{2\cdot\sin\varphi_m}{\cos^2\varphi_m}+\frac{3\cdot\sin^3\varphi_m+3\cdot\sin\varphi_m}{\cos^4\varphi_m}$$

per $0\le\varphi_m<\frac{\pi}{2}$ si ha $f'(\varphi_m)=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi_m=0\,radianti$ ovvero, in gradi sessagesimali $\varphi_m=0°$.

La derivata prima è positiva in $0<\varphi_m<\frac{\pi}{2}$ ed è nulla in $\varphi_m=0$, infatti è:

$$f'(\varphi_m)\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \sin\varphi_m\ge 0.$$

Graficamente è:



in cui sono indicate con σ la curva grafico della funzione f e con ε quella della funzione f'.

OSSERVAZIONE. Si rileva immediatamente che il quarto fattore costituisce una funzione crescente, tendente all'infinito per $\varphi_m\to\frac{\pi}{2}$ e avente minimo uguale a 1 per $\varphi_m=0$.

ESEMPIO.

Dati:

- punto di partenza $A(\varphi_A=70°04'N;\lambda_A=29°44'E)$,
- rotta vera $R_v=330° \quad\Rightarrow\quad r_v=N30°W$,
- velocità v = 17,5 *nodi*.

Determinare le coordinate del punto B dopo avere navigato per 20 ore.

SOLUZIONE.

Il cammino è: $m=v\cdot\Delta t=(17.5\cdot 20)mg=350mg$

Per entrambi i metodi vale l'equazione per determinare la variazione di latitudine

$\Delta\varphi=m\cdot\cos r_v \quad\Rightarrow\quad \Delta\varphi_{AB}=350\cdot\cos 30°\cong 303.1'N\cong 5°3.1'N$ (il suffisso è il primo nome della rotta quadrantale)

$\varphi_B=\varphi_A+\Delta\varphi_{AB}$ $(algebrica)$ $\quad\Rightarrow\quad \varphi_B=70°04'+5°03.1'=75°7.1'N$

$\varphi_m = 72°35.6'$

■ I due metodi differiscono nel calcolo della differenza di longitudine.

►METDODO APPROSSIMATO

$$\varphi_m = \frac{70°04' + 75°7.1'}{2} \cong 72°35.6'$$

$\Delta\lambda = m \cdot \sin r_v \cdot \sec\varphi_m \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda_{AB} = 350 \cdot \sin 30° \cdot \sec 72°35.6' \cong 585°W = 9°45'W$ (il suffisso è il secondo nome della rotta quadrantale)

$$\lambda_B = \lambda_A + \Delta\lambda_{AB}\ (algebrica) \quad \Rightarrow \quad \lambda_B = +29°44' + (-9°45') = 19°59'\,E$$

►METODO ESATTO

$\Delta\lambda_{AB} = [(\varphi_B)_c - (\varphi_A)_c] \cdot \tan r_v$ nella quale è $\varphi_c = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$, espressa in radianti; gli studenti preferiscono operare con angoli in gradi sessagesimali piuttosto che in radianti ed allora scriviamo l'espressione della latitudine crescente nel seguente modo:

$$\varphi_c = \frac{180°}{\pi} \ln\tan\left(45° + \frac{\varphi°}{2}\right).$$

$$\varphi_B = 75°7.1'\,N \quad \Rightarrow \quad \varphi_{A_c} = \frac{180°}{\pi} \ln\tan\left(45° + \frac{75°7.1'}{2}\right) = 116°37.5' = 6997.5'$$

$$\varphi_A = 70°04'\,N \quad \Rightarrow \quad \varphi_{B_c} = \frac{180°}{\pi} \ln\tan\left(45° + \frac{70°04'}{2}\right) = 99°37.4' = 5977.4' \quad (*)$$

$$\Delta\lambda_{AB} = [(\varphi_B)_c - (\varphi_A)_c] \cdot \tan r_v \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda_{AB} = [6997.5' - 5977.4'] \cdot \tan 30° \cong 589'W = 9°49'W$$

$$\lambda_B = \lambda_A + \Delta\lambda_{AB} = +29°44' + (-9°49') = 19°55'\,E$$

(*) Verifica del risultato mediante l'uso dell'espressione $\varphi_c = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$:

$$|\varphi_A|° = 75°7.1' \cong 80.03333333° \quad \Rightarrow \quad \varphi_c = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1.31106225}{2}\right) = 1.440929286\ \textit{radianti}$$

$$|\varphi_A|^{(r)} = \frac{80.03333333° \cdot \pi}{180°} \cong 1.396845177$$

$$\tan(1.396845177) \cong 5.690639362$$

$$\ln(5.690639362) \cong 1.738822607$$

$$\frac{1.738822607 \cdot 180°}{\pi} \cong 99.62711967° = 99.6271967° \cdot 60 \cong 5977.6'$$

OSSERVAZIONE.

Nel metodo approssimato la longitudine del punto *B* è più ad est di quella ottenuta col metodo esatto, ovvero l'errore assoluto è $\varepsilon = \left| \lambda_{B_{appr.}} - \lambda_{B_{esatto}} \right| = 4'$.

Verifichiamo questo risultato con la (14):

tenuto conto che un angolo di ampiezza 1 radiante equivale a circa $57°17'44.8'' \cong 3437.7'$, dalla (14) otteniamo:

$$\frac{1}{24} \cdot \frac{m^3}{3437.7^2} \cdot \left(\sin r_v \cdot \cos^2 r_v \right) \cdot \frac{1 + \sin^2 \varphi_m}{\cos^3 \varphi_m} \cong \frac{1}{24} \cdot 3.628 \cdot 0.375 \cdot 71.3631 \cong 4'.$$

La sostituzione, nel metodo approssimato, dell'allontanamento μ con l'arco di parallelo medio compreso tra i meridiani dei punti di partenza e di arrivo è accettata per cammini minori di 500 *mg*. e latitudini non troppo elevate; ciò è vero se i punti di partenza e di arrivo sono situati nello stesso emisfero; infatti in questa circostanza vi è una compensazione che avviene, nella somma degli archetti che formano μ, fra le differenze in difetto e le differenze in eccesso rispetto ai corrispondenti archetti, tra loro uguali, che formano l'arco di parallelo medio.

Tale compensazione diminuisce se i punti di partenza e di arrivo sono situati in emisferi opposti e non avviene per nulla se le latitudini dei sopradetti punti sono opposte (uguali in valore assoluto ma discordi); in questo particolare caso è φ_m=0°.
Alla domanda: *per brevi cammini e meglio usare il metodo approssimato o il metodo esatto*? Il prof. Oscar Sergi rispondeva: *il metodo esatto è sempre esatto.*

In realtà, in quei tempi, si prediligeva il metodo approssimato, per brevi cammini, per sveltire il procedimento di calcolo. Oggi, personalmente, non vedo la grande utilità di usare il metodo approssimato potendo utilizzare calcolatrici programmabili che, inserendo solo i dati, porgono i risultati desiderati utilizzando il metodo esatto.

OSSERVAZIONE. Stabilito che il metodo approssimato possa essere utilizzato per cammini non superiori alle 500 miglia, si può utilizzare questo metodo anche per punti, estremi dell'arco lossodromico, che abbiano latitudini opposte.

Verifichiamo quanto detto nell'osservazione mediante un programmino informatico; otteniamo la seguente matrice a due colonne di cui la prima è intestata con "$\pm\,\varphi$" che significa una coppia di latitudini opposte e la seconda è intestata con "$\Delta\,\varphi_c$" che significa differenza delle due latitudini crescenti corrispondenti alle sopradette latitudini opposte della prima colonna

$\pm\varphi$	$\Delta\,\varphi_c$
0	0
±1	120.0060927
±2	240.0487536
±3	360.1646062
±4	480.3903860
±5	600.7629966
±6	721.3195665
±7	842.0975072
±8	963.1345720
±9	1084.468916
±10	1206.139158
±11	1328.184446
±12	1450.644517
±13	1573.559772
±14	1696.971342
±15	1820.921164
±16	1945.452053
±17	2070.607790
±18	2196.433199
±19	2322.974242
±20	2450.278107
±21	2578.393311
±22	2707.369805
±23	2837.259084
±24	2968.114305
±25	3099.990419
±26	3232.944299
±27	3367.034894
±28	3502.323375
±29	3638.873312
±30	3776.750847
±31	3916.024894
±32	4056.767346
±33	4199.053303
±34	4342.961324
±35	4488.573687
±36	4635.976691
±37	4785.260969
±38	4936.521840
±39	5089.859688
±40	5245.380385
±41	5403.195751
±42	5563.424058
±43	5726.190598
±44	5891.628297
±45	6059.878405
±46	6231.091262
±47	6405.427150
±48	6583.057243
±49	6764.164675
±50	6948.945736
±51	7137.611222
±52	7330.387955
±53	7527.520513
±54	7729.273186
±55	7935.932218
±56	8147.808369
±57	8365.239852
±58	8588.595738
±59	8818.279883
±60	9054.735514

Con lo stesso programmino estraiamo la matrice dalla riga “0” alla riga “± 10” e la matrice dalla riga “± 51” alla riga “± 60” con l’accorgimento di inserire una colonna intesta “$\Delta\,\varphi$”, ed accoppiamo a ciascuna di esse la matrice che ha la seconda colonna intestata con “$\Delta\,\varphi_c - \Delta\,\varphi$”

$\pm\varphi$	$\Delta\,\varphi$	$\Delta\,\varphi_c$
0	0	0
±1	120	120.0060927
±2	240	240.0487536
±3	360	360.1646062
±4	480	480.3903860
±5	600	600.7629966
±6	720	721.3195665
±7	840	842.0975072
±8	960	963.1345720
±9	1080	1084.468916
±10	1200	1206.139158

$\pm\varphi$	$\Delta\,\varphi_c - \Delta\,\varphi$
0	0
±1	0.006092793906
±2	0.04875366361
±3	0.1646062199
±4	0.3903860382
±5	0.7629966313
±6	1.319566519
±7	2.097507234
±8	3.134572002
±9	4.468916192
±10	6.139158805

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \pm\varphi & \Delta\varphi & \Delta\varphi_c \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\pm 51 & 6120 & 7137.611222 \\
\pm 52 & 6240 & 7330.387955 \\
\pm 53 & 6360 & 7527.520513 \\
\pm 54 & 6480 & 7729.273186 \\
\pm 55 & 6600 & 7935.932218 \\
\pm 56 & 6720 & 8147.808369 \\
\pm 57 & 6840 & 8365.239852 \\
\pm 58 & 6960 & 8588.595738 \\
\pm 59 & 7080 & 8818.279883 \\
\pm 60 & 7200 & 9054.735514
\end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \pm\varphi & \Delta\varphi_c - \Delta\varphi \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\pm 51 & 1017.611222 \\
\pm 52 & 1090.387955 \\
\pm 53 & 1167.520513 \\
\pm 54 & 1249.273186 \\
\pm 55 & 1335.932218 \\
\pm 56 & 1427.808369 \\
\pm 57 & 1525.239852 \\
\pm 58 & 1628.595738 \\
\pm 59 & 1738.279883 \\
\pm 60 & 1854.735514
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Le seconde due matrici avvalorano quanto detto nell'osservazione.

ESEMPIO.
Determinare il cammino m e la rotta vera R_v di una nave che parte dal punto $A(\varphi = 6°S; \lambda = 3°W)$ per giungere al punto $B(\varphi = 6°N; \lambda = 2°E)$.

SOLUZIONE.

$$\Delta\varphi = 12°N = 720'N$$

$$\Delta\lambda = 5°E = 300'E$$

▶ Metodo esatto

$$\varphi_{A_c} = 6°0'39.59''S = 360.6597933'S$$

$$\varphi_{B_c} = 6°0'39.59''N = 360.6597933'N$$

$$\Delta\varphi_c \cong 721.32' \quad \Rightarrow \quad \tan r_v = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi_c} \cong \frac{300'}{731.32'} \quad \Rightarrow \quad r_v \cong N22°35'E \quad \Rightarrow \quad R_v \cong 22°35'$$

$$m = \Delta\varphi \cdot \sec r_v \cong 800mg$$

▶ Metodo approssimato

$$\varphi_m = 0°$$

$$\tan r_v = \frac{\Delta\lambda \cdot \cos\varphi_m}{\Delta\varphi} = \frac{300' \cdot 1}{720'} \quad \Rightarrow \quad r_v \cong N22°37'E$$

$m = \Delta\varphi \cdot \sec r_v \cong 800mg$

NOTA. Molti libri di navigazione pongono il massimo valore del cammino nelle 500 miglia affinché si possa usare il metodo approssimato.
Però in nessuno di questi testi viene giustificata tale scelta; allora mediante il calcolo, stabilita la massima latitudine media pari a 60° *N*/*S*, calcoliamo l'errore massimo $(r_v = 35°)$ per:

1. m = 500 mg
2. m=1000mg

- Nel primo caso è: $\varepsilon \cong 4.7'$
- Nel secondo caso è: $\varepsilon \cong 37.8'$

Non è certamente una dimostrazione ma è pur sempre una certa giustificazione della scelta delle 500 miglia.