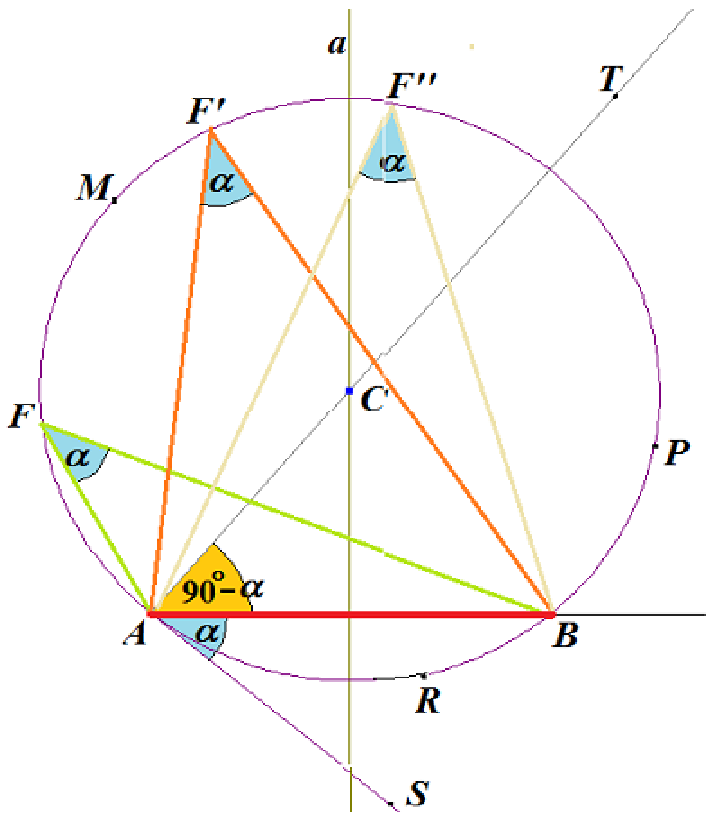
PREMESSA al problema che segue

ARCHI CAPACI

Definizione. Un arco si dice **capace** di un dato angolo α, quando gli angoli in esso inscritti risultano tutti uguali all'angolo dato α.

Problema. Determinare geometricamente il luogo geometrico dei punti del piano dai quali si rilevano gli estremi di un segmento assegnato *AB* sempre sotto lo stesso angolo dato α, con α minore dell'angolo piatto.

Costruzione
Tracciato il segmento *AB* e la semiretta *AS* formante con *AB* l'angolo α, si tracciano l'asse *a* del segmento *AB* e la semiretta *AT* perpendicolare alla semiretta *AS*. *AT* e *a*, perpendicolari rispettivamente a rette che si intersecano, si incontrano anch'esse in un punto che indichiamo con *C*. Così che l'arco capace richiesto è l'arco di circonferenza avente centro *C* e raggio *CA*, situato dalla banda opposta alla semiretta *AS*, rispetto al segmento *AB*.



Da ogni punto dell'arco *AMPB*, come ad esempio dai punti *F*, *F*', *F*'', si rileva la base *AB* sotto l'angolo *a*.
Ciò non si verifica per i punti appartenenti all'arco *esplementare* (o *replementare*) *ARB*; per questa ragione la dicitura "*cerchio capace*" (che comunque sarebbe meglio dire circonferenza capace) usata in marineria non è corretta, anche se ormai è diventata, in navigazione, di consuetudine.

Comunque il tracciamento del "*cerchio capace*" in nautica è velocemente determinabile, per quanto detto.
Tracciato il segmento avente per estremi i due punti *A* e *B* osservati, si traccia da uno dei due punti, dalla parte della nave (così è scritto su quasi tutti i testi di navigazione essendo che i "*cerchi capaci*" si utilizzano in navigazione costiera), l'angolo formante con *AB* pari a $90° - \Delta\alpha$ dove $\Delta\alpha$ è la differenza di rilevamento dei due punti *A* e *B*. L'intersezione di questa retta con l'asse del segmento *AB* è il centro della circonferenza richiesta.

Nel problema che presentiamo i due punti *A* e *B* sono due boe e quindi nasce il caso della simmetria: gli archi capaci sono due e precisamente speculari rispetto al segmento *AB*.

PROBLEMA. Due boe *A* e *B* si trovano sullo stesso meridiano e distano 600m tra loro. Una nave *N*, in movimento, segue rotta R_v = 90° e, agli istanti $10^h\ 00^m$, $10^h\ 02^m$, $10^h\ 04^m$, $10^h\ 06^m$, misura lo stesso angolo orizzontale *ANB*= 45°. Determinare la velocita della nave.

SVOLGIMENTO
Si tratta di un problema di pura geometria e di spicciola cinematica.

Sul piano cartesiano, per motivi didattici, prendiamo i punti *A* (0,0) e *B* (0,6) che esprimono le due boe, posizionate sullo stesso meridiano *y*, a distanza tra loro di 600 *m*.

Il problema si risolve mediante la costruzione dei due archi capaci dell'angolo di 45°; allo scopo tracciamo le due semirette Bs e Bt che formano con la base *BA* un angolo $90° - 45° = 45°$.

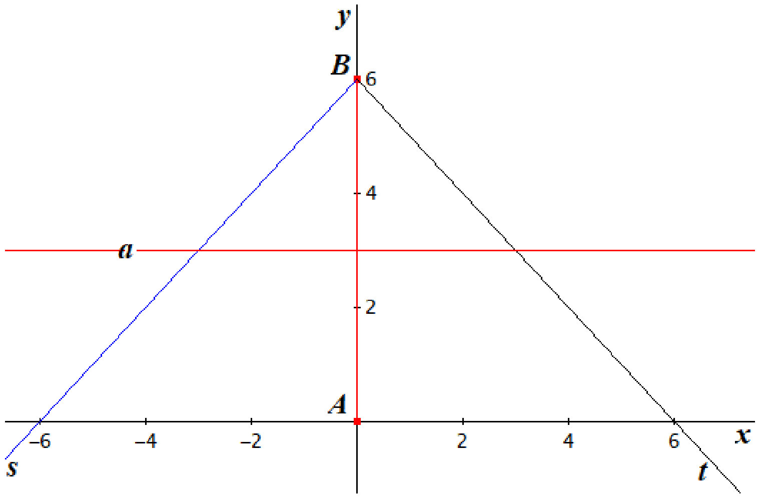
▸ La retta di inclinazione 45° (pendenza $m = \tan 45° = 1$) passante per *B* ha equazione

$$y - 6 = (\tan 45°) \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad y = x + 6$$

▶ La retta di inclinazione 135° (pendenza $m = \tan 135° = -1$) passante per *B* ha equazione

$$y - 6 = (\tan 135°) \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad y = -x + 6$$

L'asse *a* del segmento *AB* ha equazione $y = 3$.



Intersechiamo l’asse a rispettivamente con le semirette Bs e Bt, ottenendo così i centri E ed F dei due archi capaci.

1. Per la semiretta Bs, è:

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ y = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E(-3;3)$$

2. Per la semiretta Bt, è:

$$\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(3;3)$$

Il raggio dei due archi capaci è

$$\sqrt{(6-3)^2 + (0-3)^2} = 3 \cdot \sqrt{2}$$

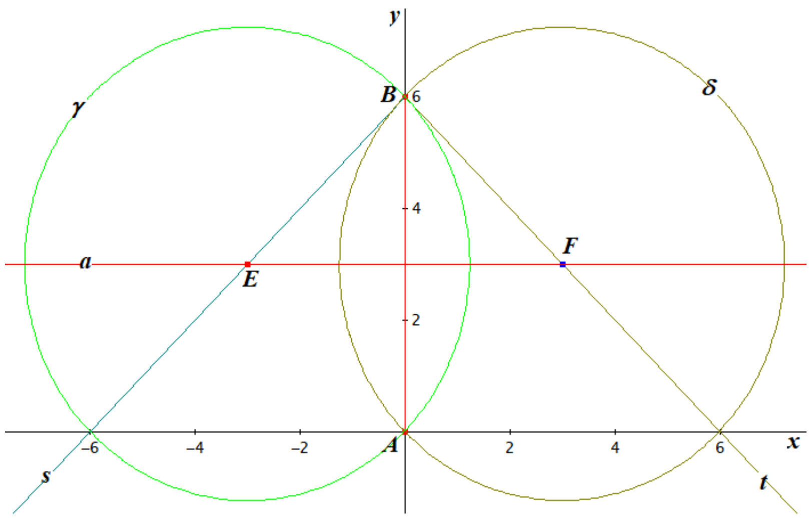
1. l'equazione della circonferenza di centro E è:

$$(x-(-3))^2 + (y-3)^2 = \left(3 \cdot \sqrt{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6 \cdot x + y^2 - 6 \cdot y = 0$$

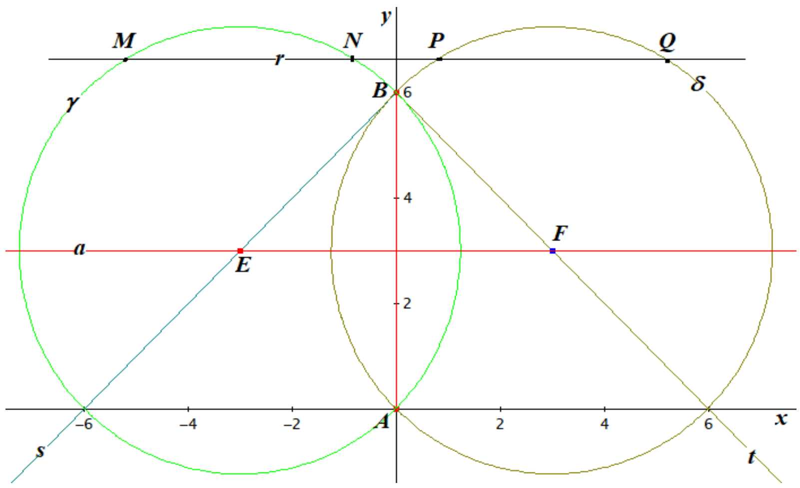
2. l'equazione della circonferenza di centro F è

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = \left(3 \cdot \sqrt{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6 \cdot x + y^2 - 6 \cdot y = 0$$

Riportiamo i grafici delle due circonferenze sul piano cartesiano



Ora intersechiamo i due archi con la retta generica *r* parallela all'asse delle ascisse, di equazione, $y = k$, con le limitazioni $0 \le k \le 3+3\cdot\sqrt{2}$



1. Prima intersezione: $\gamma \cap r$:

$$\begin{cases} x^2+6\cdot x+y^2-6\cdot y=0 \\ y=k \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+6\cdot x+k^2-6\cdot k=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x=-3-\sqrt{9-k^2+6\cdot k} \\ x=-3+\sqrt{9-k^2+6\cdot k} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M\left(-3-\sqrt{9-k^2+6\cdot k};k\right) \quad ; \quad N\left(-3+\sqrt{9-k^2+6\cdot k};k\right)$$

2. Seconda intersezione $\delta \cap r$:

$$\begin{cases} x^2 - 6\cdot x + y^2 - 6\cdot y = 0 \\ y = k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6\cdot x + k^2 - 6\cdot k = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = 3 - \sqrt{9 - k^2 + 6\cdot k} \\ x = 3 + \sqrt{9 - k^2 + 6\cdot k} \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P\left(3 - \sqrt{9 - k^2 + 6\cdot k}; k\right) \quad ; \quad Q\left(3 + \sqrt{9 - k^2 + 6\cdot k}; k\right)$$

La richiesta posta nel testo del problema ci conduce ad imporre *MN* = *NP* = *PQ*, infatti dalla nave *N* si misura la stessa differenza di azimut di 45°:

1. alle $10^h\ 00^m$
2. alle $10^h\ 02^m$
3. alle $10^h\ 04^m$
4. alle $10^h\ 06^m$

La triplice uguaglianza è giustificata dal fatto che la nave *N* ha velocità costante e quindi ad intervalli uguali di tempo corrispondono cammini uguali.

Allora i cammini nei tre intervalli di tempo sono:

$$MN = 2\cdot\sqrt{9 - k^2 + 6\cdot k}$$
$$NP = 6 - 2\cdot\sqrt{9 - k^2 + 6\cdot k}$$
$$PQ = 2\cdot\sqrt{9 - k^2 + 6\cdot k}$$

È sufficiente uguagliare tra loro, a due a due, le precedenti espressioni.
Iniziamo dall'uguaglianza *MN*=*NP*:

$$2\cdot\sqrt{9 - k^2 + 6\cdot k} = 6 - 2\cdot\sqrt{9 - k^2 + 6\cdot k} \quad \Rightarrow \quad 2\cdot\sqrt{9 - k^2 + 6\cdot k} = 3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4\cdot k^2 - 24\cdot k - 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 108}}{4} = \frac{12 \pm 6\cdot\sqrt{7}}{3} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{6 - 3\cdot\sqrt{7}}{2} \\ \dfrac{6 + 3\cdot\sqrt{7}}{2} \end{array} \right. =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 3 - \dfrac{3\cdot\sqrt{7}}{2} \\ 3 + \dfrac{3\cdot\sqrt{7}}{2} \end{array} \right.$$

la prima radice è da scartare perché la retta *r* ad essa corrispondente interseca gli archi esplementari degli archi capaci (infatti la prima radice è fuori del campo di esistenza definito a pag.4); pertanto è la seconda radice che soddisfa al nostro problema.

Determiniamo le coordinate dei punti M e N

■ punto M:

$$M\left(-\frac{9}{2};3+\frac{3\cdot\sqrt{7}}{2}\right)$$

■ punto N:

$$N\left(-\frac{3}{2};3+\frac{3\cdot\sqrt{7}}{2}\right)$$

■ punto P:

$$P\left(\frac{3}{2};3+\frac{3\cdot\sqrt{7}}{2}\right)$$

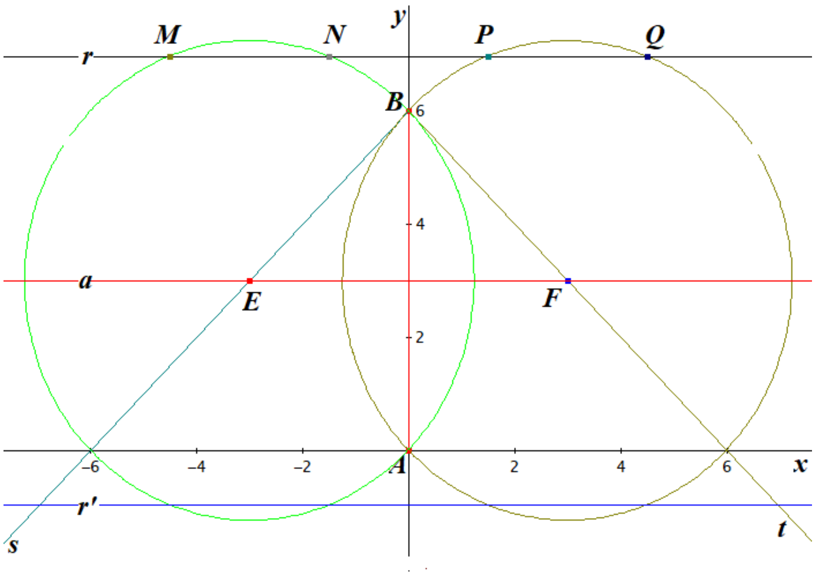
■ punto Q:

$$Q\left(\frac{9}{2};3+\frac{3\cdot\sqrt{7}}{2}\right)$$

La determinazione dei cammini MN, NP, PQ risulta facile perché punti sulla stessa retta parallela all'asse delle ascisse; inoltre sapendo il senso di crescenza delle ascisse non è necessario fare uso del "valore assoluto":

$$\overline{MN}=-\frac{3}{2}-\left(-\frac{9}{2}\right)=3 \quad ; \quad \overline{NP}=\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=3 \quad ; \quad \overline{PQ}=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}=3$$

Pertanto ogni due minuti la nave N percorre 300 metri (non dimentichiamo che abbiamo diviso, all'inizio, la base AB per 100) pertanto la velocità della nave è 9 Km/h = 4.32 nodi circa.



(Testo del Prof. Manlio Milazzo)