# QUESTIONE INTERESSANTE

Su facebook sono apparse alcune note sulla traiettoria del Sole e, in particolare, sull'angolo ***j*** con cui tale traiettoria incide l'orizzonte astronomico, riferito ad un osservatore *O* in latitudine $\varphi$; ovvero con che angolo il Sole, nel suo percorso apparente, incontra l'orizzonte vero nell'istante del suo sorgere e del suo tramonto. Pare che sia stato scritto che questo angolo è costante per quella latitudine.

Pur non credendo che si tratti di un problema basilare, può rivestire comunque un certo interesse.

►Desidero quindi scrivere l'equazione che porge questo angolo; allo scopo riporto le seguenti figure dove appaiono:

- la stella *A* che percorre (apparentemente) il proprio parallelo di declinazione $\delta$,
- la stella *B* che percorre (apparentemente) l'equatore, per cui è $\delta = 0$,

viste da un ipotetico osservatore posto in latitudine $\varphi_N = M_s Z$ .

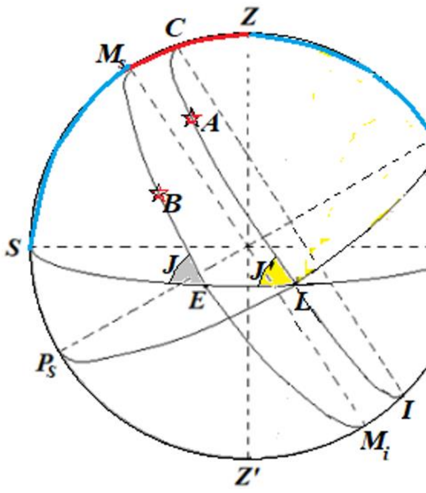


fig.1

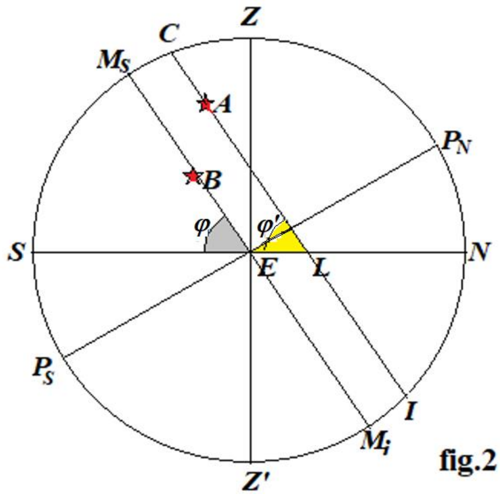


fig.2

**OSSERVAZIONE**. Nella fig.1 sono colorati:

- in rosso gli archi di ampiezza pari alla latitudine $\varphi$,
- in blu gli archi di ampiezza pari alla colatitudine $c = 90° - |\varphi|$

Mi soffermo sulla stella *B*, supposta nel suo punto del sorgere, cioè nel punto *E*. In questa circostanza prendo in considerazione il triangolo sferico $SEM_S$; questo triangolo e un *semi fuso* di cui l'arco $SM_S$ ne è la *sezione normale*. Ciò vuol dire che l'ampiezza dell'angolo *J* è uguale all'ampiezza dell'arco $SM_s = c$, per cui è:

$$j = c.$$

**OSSERVAZIONE.** Non avendo riconosciuto questo *semi fuso*, si può operare al modo come, forse, avrebbe operato uno studente.

Si considera il triangolo sferico $\boldsymbol{M_S\,S\,E}$; in esso è:

- $SE = 90°$,
- $M_SE = 90°$,
- $SM_s = c = 90° - |\varphi|$ ,
- $E\hat{S}M_S = 90°$,
- $S\hat{M}_S E = 90°$

quindi trattasi di un triangolo sferico *birettangolo* e *birettilatero*.

Applico ad esso il teorema di Eulero:

$$\cos c = \underbrace{\cos(M_sE)\cdot\cos(SE)}_{zero} + \underbrace{\sin(M_SE)\cdot\sin(SE)}_{uno}\cdot\cos j$$

da cui, è:

$$\cos c = \cos j \qquad (*)$$

La (*) è l'equazione che risolve il problema posto.

Ricordando che due coseni sono uguali se:

- hanno argomenti uguali, a meno di giri completi,
- hanno argomenti opposti, a meno di giri completi,

la soluzione della (*), è:

$$j = \pm[\arccos(\cos c)]^{\circ} \pm k\cdot 360°. \qquad (**)$$

Alla (**), per la natura di $\boldsymbol{j}$, tolgo il periodare e il segno meno, quindi il valore richiesto è:

$$j = [\arccos(\cos c)]^{\circ} \quad \Rightarrow \quad j = c\,.$$

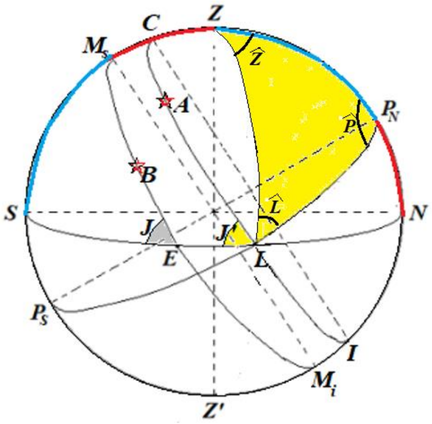
In definitiva, nella circostanza in cui la stella percorra l'equatore celeste, l'angolo acuto con cui incontra l'orizzonte astronomico è uguale alla colatitudine di quel luogo.

**OSSERVAZIONE.** La fig.2 è la rappresentazione della sfera celeste in "*proiezione ortografica meridiana*" in cui:

- l'*orizzonte astronomico* appare come diametro e gli *almicantarat* corde ad esso parallele,
- l'*equatore celeste* appare come diametro e i *paralleli di declinazione* corde ad esso parallele;

quindi è un modello similare a quello euclideo; in questa proiezione gli angoli $S\hat{E}M_S$ e $S\hat{L}C$ risultano uguali tra loro, infatti sono angoli corrispondenti formati dalle parallele $M_sM_i$ e $CI$, tagliate dalla trasversale $SN$; ma questa uguaglianza non fa testo perché tale proiezione è isogonica solo per gli angoli che si misurano sul circolo verticale (latitudini e colatitudini ) o sul meridiano dell'osservatore (declinazioni e distanze polari). (**OSSERVAZIONE.** In geometria il termine *circolo* è sinonimo, meno comune, di *circonferenza*, però molto usato in nautica)

► Ora vado a considerare la stella *A*, di declinazione $\delta$; l’angolo *j’*, segnato in colore giallo, non è un angolo sferico perché un suo lato non appartiene a una circonferenza massima, ma a un parallelo di declinazione che è una circonferenza minore (*j’* quindi non può essere un angolo di un triangolo sferico).
La trigonometria sferica è riservata ai triangoli sferici ed allora mi riferisco al triangolo sferico $Z\hat{L}P_N$, in cui $\hat{L}$, detto *angolo parallattico*, è l’angolo all’astro (angolo che non si usa mai nei calcoli nautici).




Il teorema di Eulero porge

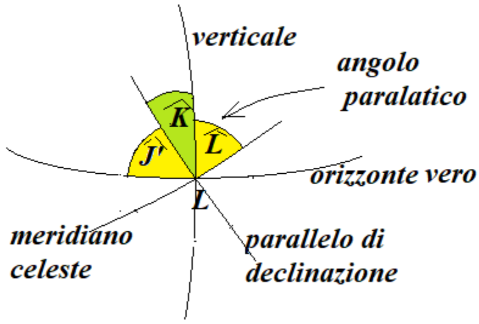
$$\cos c = \cos z \cdot \cos p + \sin z \cdot \sin p \cdot \cos \hat{L}$$

Ma, la distanza zenitale è $z$ = 90°, quindi, è:

$$\cos c = \sin p \cdot \cos \hat{L}$$

quindi è

$$\cos \hat{L} = \frac{\cos c}{\sin p} \qquad (1)$$




dalla figura emerge:

- $\hat{L} + \hat{K} = 90°$ infatti un meridiano celeste è perpendicolare a qualunque parallelo di declinazione,
- $\hat{J}' + \hat{K} = 90°$ infatti un qualunque verticale è perpendicolare all’orizzonte vero.

Segue $\hat{L} = \hat{J}'$ perché complementari dello stesso angolo $\hat{K}$ quindi, dalla (1), posso scrivere

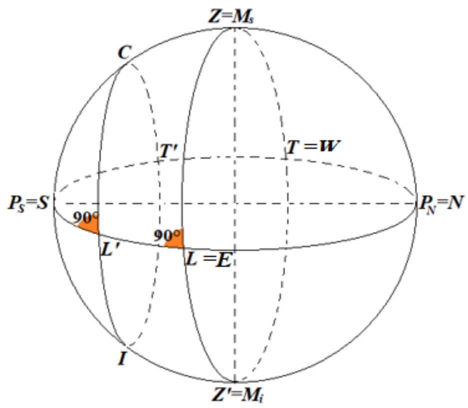
$$\cos \hat{J}' = \frac{\cos c}{\sin\ p}$$

Ma, $\hat{J}'$ è l'angolo acuto che il parallelo di declinazione di quella stella forma con l'orizzonte vero, pertanto in questo modo si trova che non dipende solo dalla colatitudine dell'osservatore ma anche dalla distanza polare (quindi dalla declinazione) di quell'astro.

L'angolo $\hat{J}'$ dipende solo dalla colatitudine se *p*=90°, ovvero per astri che percorrono l'equatore celeste, come prima visto.

## ►CASI PARTICOLARI SULLA POSIZIONE DEEL'OSSERVATORE

### 1. OSSERVATORE SULL'EQUATORE

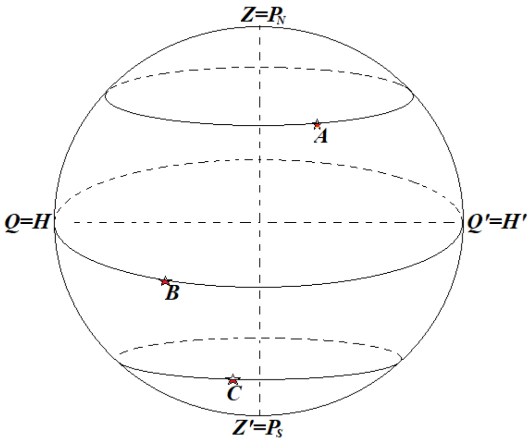



E' il caso della **sfera retta**, infatti l'*equatore celeste* e l'*orizzonte vero* si intersecano perpendicolarmente:

- lo *zenit Z* è un punto dell'equatore coincidente col *mezzocielo superiore* $M_s$
- il *nadir Z'*, anch'esso appartenente all'*equatore celeste,* coincide col *mezzocielo inferiore* $M_i$
- l'*equatore celeste*, contenendo lo *zenit Z*, il *nadir Z'* e i *punti cardinali E* e *W*, coincide col *primo verticale*
- i *poli celesti* $P_N$ e $P_S$ coincidono con gli omonimi *punti cardinali N* e *S*, perché quest'ultimi giacciono sull'*orizzonte vero*, pertanto, l'*orizzonte vero* coincide col *primo orario*
- tutti i piani dei *paralleli di declinazione* sono perpendicolari all'*orizzonte,* per cui non esistono *astri circumpolari* né *astri anticircumpolari*; tutti gli *archi diurni* sono uguali ai rispettivi *archi notturni*; ciò detto vale anche per la nostra stella per cui all'equatore le *notti* sono sempre uguali ai *di* (1)
- l'angolo di intersezione dei paralleli di declinazione con l'orizzonte vero è ***j*=90°**; infatti, essendo $\varphi$=0°, è *c*=90°=*j*.

### 2. OSSERVATORE IN UNO DEI DUE POLI GEOGRAFICI

La seguente figura è riferita ad un osservatore posto al polo nord geografico




E’ il caso della **sfera parallela**, infatti l’*equatore celeste* e l’*orizzonte vero* coincidono;

- lo *zenit* coincide col *polo nord celeste* e il *nadir* col *polo sud celeste*
- non esiste il meridiano dell’osservatore e quindi non esistono i punti cardinali (il primo passo che può fare l’osservatore è in direzione verso sud; non appena si sposterà da $P_n$, avrà la sua rosa dei venti perché dotato del proprio meridiano)
- la sfera celeste è divisa in due emisferi: quella degli *astri circumpolari* (avente per polo lo zenit) e quella degli *astri anticircumpolari* (avente per polo il nadir)
- ogni astro descrive, in un *giorno sidereo*, il proprio parallelo di declinazione coincidente con un *almicantarat*; in particolare nell’emisfero di polo $Z$ (osservatore al polo nord geografico), è visibile per l’osservatore sempre alla stessa altezza.
- non esistendo il *meridiano dell’osservatore* non si possono misurare gli *angoli orari* né gli *azimut* (però possono essere misurati se si conviene di assume un meridiano a piacere quale origine).

Per quanto concerne il problema in oggetto rilevo che è necessario riferirsi ad una stella che percorra l’equatore ovvero una stella di declinazione nulla; pertanto $\varphi = 90°$, $c = 0°$ e quindi $j$=0°.

Il risultato è giustificato dalla coincidenza delle sopradette circonferenze massime (equatore celeste e orizzonte vero) che, pertanto, danno luogo ad intersezione con angolo nullo o angolo piatto.

**OSSERVAZIONE.** Tra le stelle, così dette navigabili, non ve ne è nessuna con declinazione nulla; la più vicina all’equatore celeste è Alnilam la cui declinazione è poco più di un grado sud. Solo il Sole, nei giorni di equinozio, con buona approssimazione, può essere di esempio in questo secondo caso.

►A **Camogli**, mia città natale e di residenza, essendo $\varphi = 44.35662°N$, nel caso del Sole:

- ad uno degli equinozi, è:

$$J' = c = 90° - 44.35662° = 45.64338° = 45°38'36.17''$$

- ad uno dei solstizi, è:

$$\cos \hat{J}' = \frac{\cos 45.64338°}{\sin 66.565°} \approx 0.761976202\,,$$

risolvo l’equazione con lo stesso procedimento precedente e ottengo:

$$\hat{J}' \approx 40°21'41''$$

**(1)** In verità il *di* è più lungo della *notte* a causa della presenza dell'atmosfera che innalza gli astri facendoli sembrare sull'orizzonte quando ancora ne sono al di sotto; questo effetto è ancora più marcato da parte del Sole a causa del suo diametro angolare apparente (variabile dal valore minimo di 31' 31'' con la Terra all'afelio al valore massimo di 32' 35'' con la Terra al perielio) per cui il *di* inizia nell'istante del comparire del lembo superiore del Sole e termina quando scompare tale lembo.

## MEDIANTE L'USO DEL SOFTWARE DERIVE.6, OTTENGO I SEGUENTI PASSAGGI

Implemento la funzione della variabile J:

#1: $$\cos(j) = \frac{\cos(c)}{\sin(p)}$$

sostituisco la colatitudine di **Camogli**

#2: $$\cos(j) = \frac{\cos(45.64338°)}{\sin(p)}$$

clicco il bottone "="

#3: $$\cos(j) = \frac{0.6991221957}{\sin(p)}$$

La declinazione del Sole:

- agli equinozi è nulla e quindi la distanza polare corrispondente è 90° (in radianti è $\pi/2$),
- ai solstizi è 23°26.1′ e quindi la distanza polare corrispondente è 66°33′54′′= 66.565°;

ricordo che nei grafici dove intervengono funzioni goniometriche, si deve lavorare in radianti e quindi trasformo l'angolo 66.565 in radianti

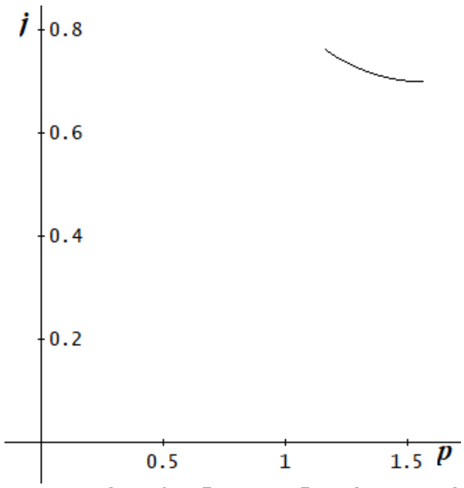
#4: $$\frac{66.565 \cdot \pi}{180} = 1.161778416$$

Per quanto detto, il campo di esistenza della funzione #3 è $[1.161778416, \pi/2]$ ($\pi/2$ approssimato alla nona cifra decimale è 1.57079326);

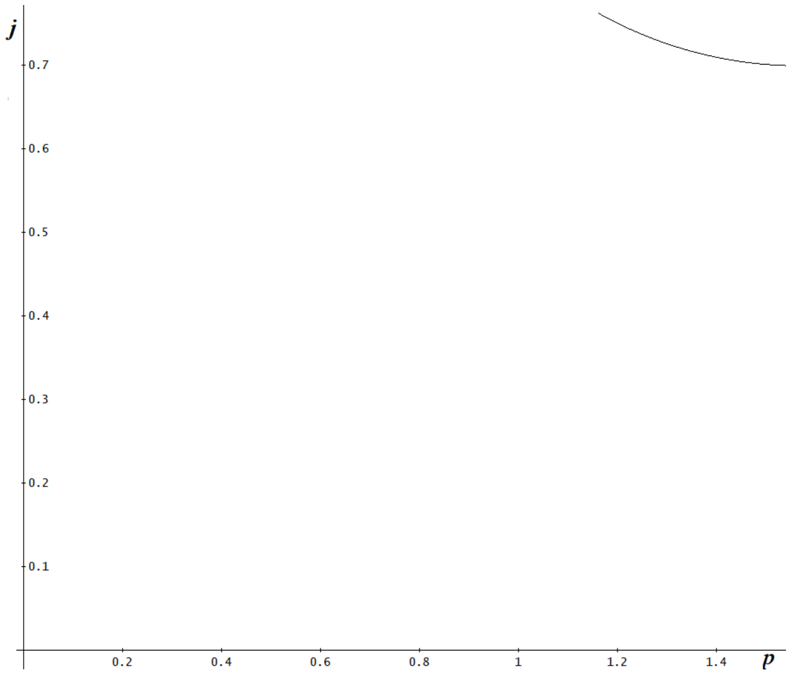
Implemento quindi l'equazione #3 (mediante il vincolo di maggiore od uguale) solo nell'ambito del suo dominio

#5: $$\mathrm{IF}\left(1.161778416 \le p \le \frac{\pi}{2}, \frac{0.6991221957}{\sin(p)}\right)$$

Mediante il bottone "Finestra Grafica 2D" entro in ambiente grafico; entrato in questo ambiente clicco il bottone "Traccia Grafico" e compare la seguente figura




Posso fare un ingrandimento, variando le scale in ascissa e in ordinata, al massimo possibile per mantenere ancora sulla finestra grafica anche gli assi cartesiani; ed ecco il massimo consentito




Riporto in grafico i punti A e B, estremi del dominio

#6: $A := [1.161778416,\ 0]$

#7: $B := \left[\dfrac{\pi}{2},\ 0\right]$

Implemento la matrice, mediante il comando "Crea Matrice", che consente di diagrammare l'intervallo che esprime il dominio

$$\#8: \quad \begin{bmatrix} 1.161778416 & 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

entro in ambiente grafico e col bottone "Traccia grafico" appare il segmento richiesto per il quale ho scelto il colore rosso.

Ora determino gli estremi del codominio; illumino il secondo membro dell'equazione #3 e sostituisco l'ascissa di A

$$\#9: \quad \frac{0.6991221957}{\mathrm{SIN}(1.161778416)} = 0.7619762027$$

ho così ottenuto l'estremo superiore dell'intervallo che esprime il codominio; implemento, allora, il punto D estremo superiore del segmento che rappresenta il codominio

$$\#10: \quad D := [0,\ 0.7619762027]$$

determino l'estremo inferiore, operando con lo stesso procedimento precedente

$$\#11: \quad \frac{0.6991221957}{\mathrm{SIN}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} = 0.6991221957$$

da cui il punto, estremo inferiore del codominio, è

$$\#12: \quad C := [0,\ 0.6991221957]$$

Pertanto il codominio è [0.6991221957, 0.7619762027]

Implemento la matrice, mediante il comando "Crea Matrice", che consente di diagrammare l'intervallo che esprime il codominio

$$\#13: \quad \begin{bmatrix} 0 & 0.6991221957 \\ 0 & 0.7619762027 \end{bmatrix}$$

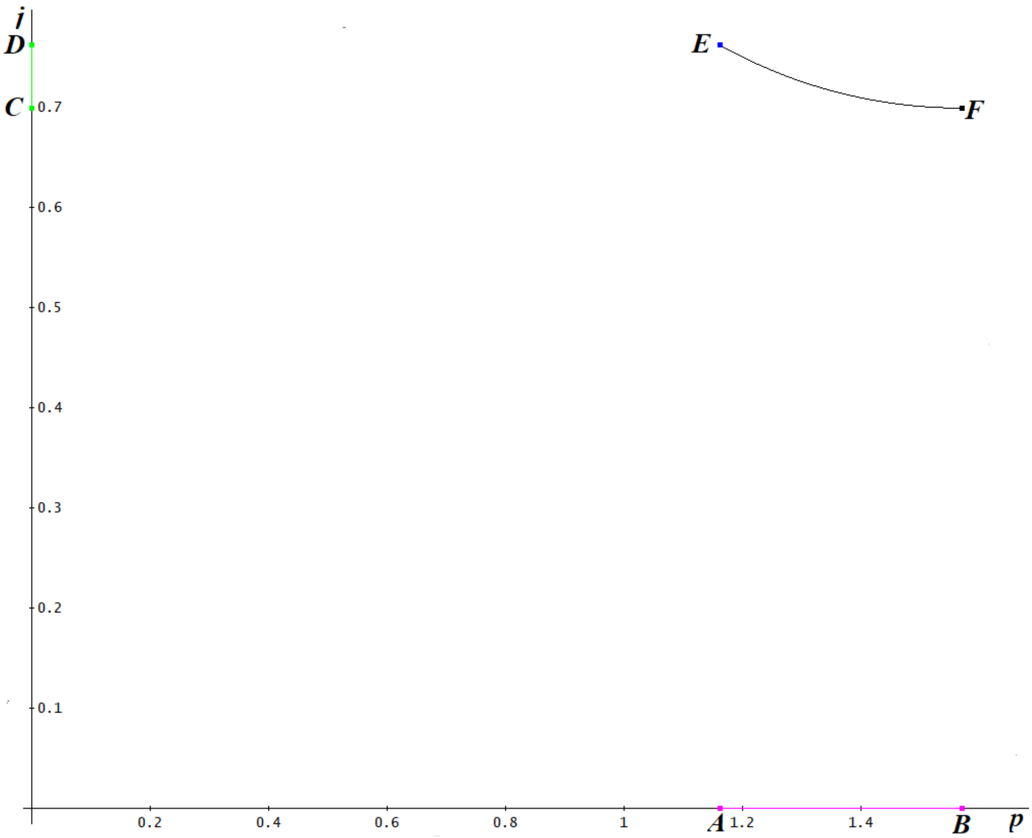
entro in ambiente grafico e col bottone "Traccia grafico" appare il segmento richiesto per il quale ho scelto il colore azzurro.

Scrivo le coordinate degli estremi dell'arco della curva, grafico della funzione #5

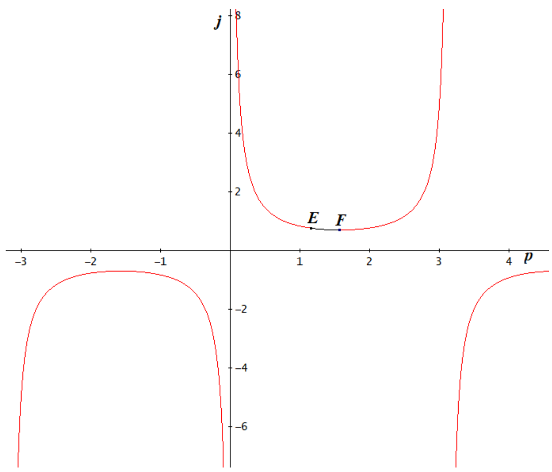
$$\#14: \quad E := [1.161778416,\ 0.7619762027]$$

$$\#15: \quad F := \left[\frac{\pi}{2},\ 0.6991221957\right]$$

Ed ecco il grafico definitivo




**OSSERVAZIONE.** Non è necessario coinvolgere l'analisi infinitesimale per verificare la crescenza e decrescenza della curva, nonché il verso della sua concavità, perché deve essere ben chiaro che la curva in oggetto non è altro che un arco di una secantoide; lo verifico graficamente: basta diagrammare la funzione #3 senza nessuna restrizione sullo stesso piano cartesiano al fine di rilevare chi il nostro arco ne fa parte, ed ecco:




la secante è decrescente nell'intervallo $]0,\pi/2[$ e ha minimo relativo in $\pi/2$, pertanto l'arco di curva EF è "*non crescente*" e quindi ad ogni valore p del dominio corrisponde un unico valore j del codominio e viceversa; quanto detto consente di determinare un valore in ordinata dato un valore in ascissa e viceversa.

**OSSERVAZIONE.** Il dominio della funzione è [66°33.9', 90°] infatti la variabile indipendente è la distanza polare p; questo intervallo, trasformato in declinazione è [23°26.1', 0°]; questo significa che la curva è riferita all'intervallo di tempo che va da un solstizio al successivo equinozio. A questo punto, per esempio, considero l'arco riferito all'intervallo di tempo che va dal solstizio d'estate all'equinozio di autunno; ed è in questo intervallo che porto due esempi mediante l'uso delle effemeridi del 2017 (le più recenti di cui dispongo).

## PRIMO ESEMPIO.

La declinazione media del Sole nel giorno 23 agosto è 11° 20'N (ho usato la media aritmetica dei valori orari letti selle effemeridi), per cui è p=78°40', che trasformo in radianti:

$$\#16: \quad \frac{\left(78 + \frac{40}{60}\right)\cdot\pi}{180} = \frac{59\cdot\pi}{135} = 1.372992344$$

sostituisco questo valore nell'equazione #3

$$\#17: \quad 0.7330382858 = \frac{0.6991221957}{\mathrm{SIN}(p)} = 0.7130258463$$

trasformo in gradi

$$\#18: \quad \frac{0.7130258463\cdot 180}{\pi} = 40.85337167$$

quindi l'angolo j è 40° 51.2' circa.

## SECONDO ESEMPIO

Assegno un valore a piacere all'angolo j, per esempio j=42°, che trasformo in radianti:

$$\#19: \quad \frac{42\cdot\pi}{180} = 0.7330382858$$

che sostituisco in #3

$$\#20: \quad \mathrm{SIN}(p) = \frac{0.6991221957}{0.7330382858} = 0.9537321709$$

mediante la funzione inversa, calcolo l'angolo p, in radianti

$$\#21: \quad \mathrm{ASIN}(0.9537321709) = 1.265414326$$

il punto di partenza è

$$\#22: \quad M := [0,\ 0.7330382858]$$

sostituisco il valore #21 in #3

$$\#23: \quad \mathrm{SIN}(p) = \frac{0.6991221957}{0.7330382858} = 0.9537321709$$

mediante la funzione inversa, calcolo l'angolo p, in radianti

$$\#24: \quad \mathrm{ASIN}(0.9537321709) = 1.265414326$$

pertanto il punto di arrivo sull'asse delle ascisse è

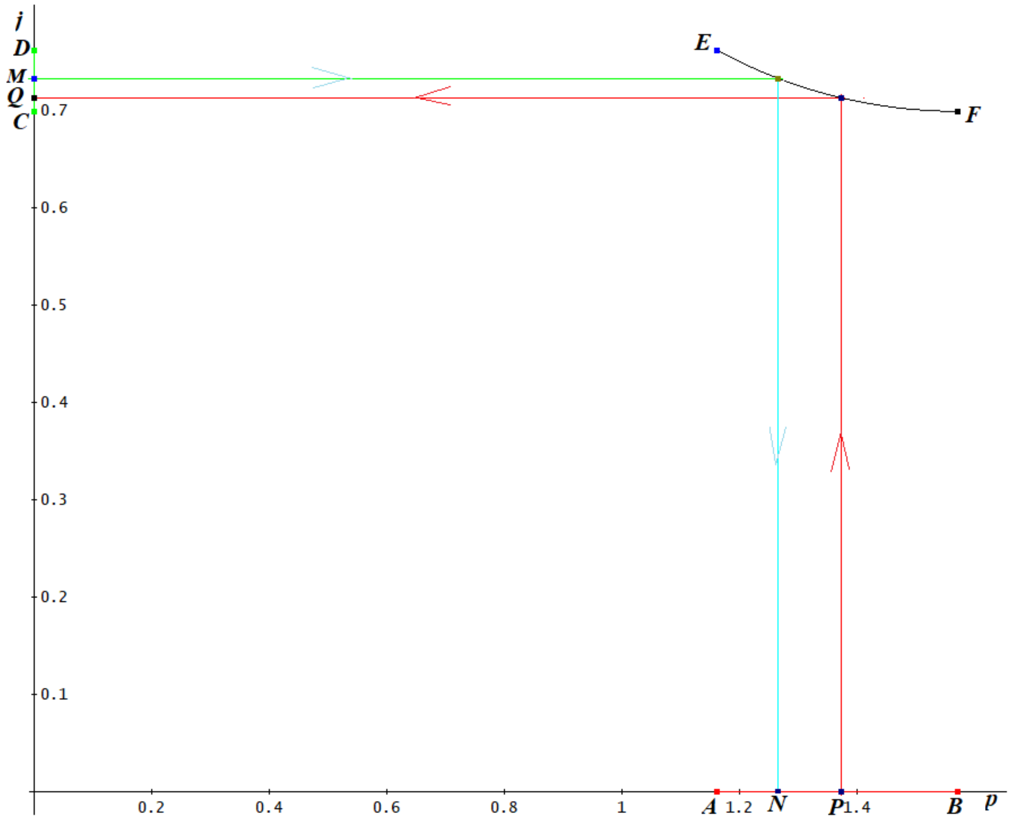
$$\#25: \quad N := [1.265414326, 0]$$

trasformo in gradi la distanza polare della riga #24

$$\#26: \quad \frac{1.224869823 \cdot 180}{\pi} = 70.17987131$$

la distanza polare è p= 70°10.8'; quindi la declinazione è δ= 19 49.2'N che corrisponde alla quinta ora del giorno lunedì 24 luglio 2017.

Ed ecco il grafico in cui riporto tutti i risultati ottenuti.



j
D
M
Q
C
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
E
F
0.2
0.4
0.6
0.8
1
A
1.2
N
P
1.4
B
p