

PROBLEMA

Un osservatore, situato nell'emisfero boreale, osserva una stella al suo sorgere e rileva l'ampiezza:

$$\bullet \text{Ampl.} = E20^{\circ}48' N.$$

Successivamente osserva lo stesso astro al passaggio al primo orario orientale e ne misura l'angolo azimutale:

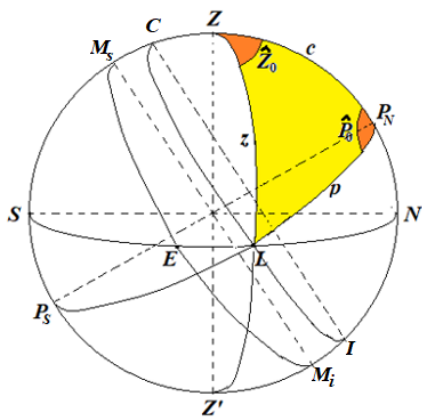
$$\bullet \hat{Z} = N75^{\circ}E$$

Calcolare:

1. la latitudine dell'osservatore,
2. la declinazione della stella,
3. l'angolo al polo della stella al suo passaggio al primo verticale orientale,
4. l'angolo al polo nell'istante in cui la stella assume, nell'emisfero occidentale, l'altezza vera $h_v = 40^{\circ}18.7'$

SOLUZIONE

1. e 2. La situazione astronomica iniziale è riportata nella seguente figura scenografica, in cui l'angolo azimutale ha pedice $_0$ (il pedice $_0$ è giustificato dal fatto che l'altezza h dell'astro, al suo sorgere, è nulla), così, per la stessa motivazione, mettiamo lo stesso pedice all'angolo polo.



Rileviamo che l'arco LN è la **sezione normale** del fuso formato dai verticali ZLZ' e $ZP_N Z'$, per cui l'arco LN e l'angolo azimutale $\hat{Z}_0$ hanno uguale ampiezza. Segue:

$$\hat{Z}_0 = 90^{\circ} - \text{Ampl.} = N(69^{\circ}12')E \quad (1)$$

■ Determiniamo una relazione che leghi c , p e $\hat{Z}$ utilizzando vari percorsi:

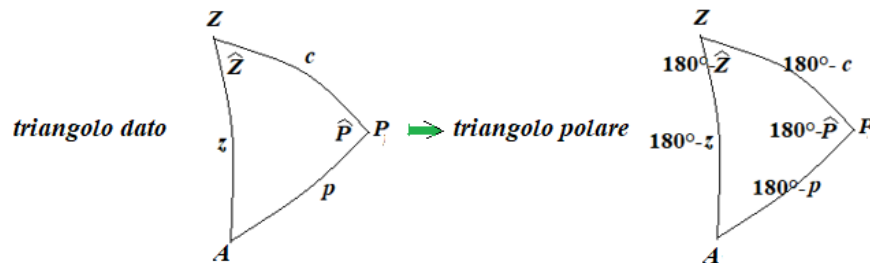
A) Mediante il teorema di **Eulero**:

$$\cos p = \cos c \cdot \cos z + \sin c \cdot \sin z \cdot \cos \hat{Z}$$

che, nel caso dell'astro al suo sorgere (astro nel punto L : punto del levante), essendo $z=90^{\circ}$, diventa

$$\cos p = \sin c \cdot \cos \hat{Z}_0 \quad (2)$$

B) Mediante il teorema di **Vieta** (relazione tra i tre angoli ed un lato); si utilizza il triangolo polare ottenuto da quello dato ai cui elementi si sostituiscono i propri supplementi: in figura è:



L'equazione è facile a scriversi perché la forma è analoga a quella di Eulero, con l'avvertenza di posizionare il segno “-” davanti al primo termine del secondo membro; così abbiamo:

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - p) &= -\cos(180^\circ - z) \cdot \cos(180^\circ - c) + \sin(180^\circ - z) \cdot \sin(180^\circ - c) \cdot \cos(180^\circ - \hat{Z}) \\ -\cos p &= -(-\cos z) \cdot (-\cos c) + \sin z \cdot \sin c \cdot (-\cos \hat{Z}) \\ -\cos p &= -\cos z \cdot \cos c - \sin z \cdot \sin c \cdot \cos \hat{Z} \\ \cos p &= \cos z \cdot \cos c + \sin z \cdot \sin c \cdot \cos \hat{Z} \end{aligned} \quad (3)$$

Nel caso in cui l'astro è all'orizzonte, è $z = 90^\circ$ e quindi $\cos z = 0 \wedge \sin z = 1$, per cui la (2) diventa

$$\cos p = \sin c \cdot \cos \hat{Z}_0 \quad (4)$$

C) mediante le regole mnemoniche di **Nepero** relative ai triangoli sferici rettilateri.

Basta seguire la seguente strategia:

1. si sopprime il lato retto,
2. si sostituisce ad ogni angolo adiacente al lato retto il suo complemento,
3. si sostituisce all'angolo opposto al lato retto il suo supplemento,

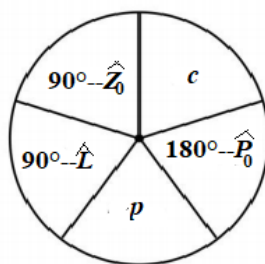
da cui scaturiscono le due regole mnemoniche:

► il **coseno** di uno qualunque dei cinque elementi è uguale al prodotto dei **seni** dei due elementi lontani

►► il **coseno** di uno qualunque dei cinque elementi è uguale al prodotto delle **cotangenti** dei due elementi adiacenti

Osservazione. L'applicazione di queste regole diventa più agevole se si utilizza un cerchio suddiviso in cinque settori in cui si scrivono, nell'ordine in cui si trovano, i cinque elementi suddetti.

Nel caso del problema in oggetto, riguardo al triangolo sferico ZLP_N , abbiamo



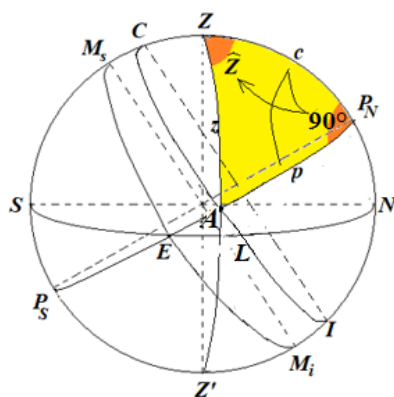
Per cui:

- dalla (►) è:

$$\cos p = \sin(90^\circ - \hat{Z}_0) \cdot \sin c \quad \Rightarrow \quad \cos p = \cos \hat{Z}_0 \cdot \sin c \quad (5)$$

Rileviamo che le (2), (4) e (5) sono la stessa equazione.

La seguente figura rappresenta la situazione astronomica dell'astro al passaggio al primo orario orientale



- Determiniamo una relazione che leghi p , c e $\hat{Z}$ utilizzando vari percorsi:

A) Mediante il teorema delle **cotangenti**

$$\cot p \cdot \sin c = \cos c \cdot \cos \hat{P} + \sin \hat{P} \cdot \cot \hat{Z},$$

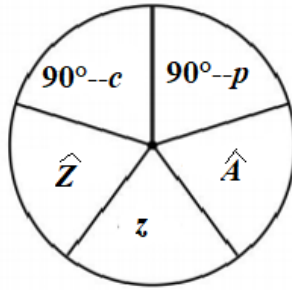
ed essendo

$$\cos \hat{P} = 0 \wedge \sin \hat{P} = 1,$$

abbiamo

$$\cot p \cdot \sin c = \cot \hat{Z} \quad (6)$$

- B) Mediante le regole mnemoniche di **Nepero** per i triangoli sferici rettangoli. Valgono per questi triangoli le stesse regole (►) e (►►), avendo l'avvertenza di sopprimere l'angolo retto e sostituire ai cateti i loro complementi. Costruiamo l'analogo cerchio diviso in cinque settori, come abbiamo fatto per i triangoli rettilateri:



Allora, per la regola (►►), abbiamo:

$$\cos(90^\circ - c) = \cot \hat{Z} \cdot \cot(90^\circ - p) \Rightarrow \sin c = \cot \hat{Z} \cdot \tan p \quad (7)$$

Le equazioni (6) e (7) sono equivalenti.

Ora possiamo impostare il sistema formato dalle equazioni (2) e (7)

$$\begin{cases} \cos p = \sin c \cdot \cos \hat{Z}_0 \\ \sin c = \cot \hat{Z} \cdot \tan p \end{cases} \quad (8)$$

nel quale sono noti gli angoli azimutali, per cui possiamo scrivere il sistema (8) come segue

$$\begin{cases} \cos p = \sin c \cdot m \\ \sin c = n \cdot \tan p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin c = \frac{\cos p}{m} \\ \sin c = n \cdot \frac{\sin p}{\cos p} \end{cases} \quad (9)$$

dove cui $m = \cos 69^\circ 12' \cong 0.355107$ ed $n = \cot 75^\circ \cong 0.267949$.

Risolviamo il sistema col metodo del confronto

$$\frac{\cos p}{m} = n \cdot \frac{\sin p}{\cos p} \Rightarrow \cos^2 p = m \cdot n \cdot \sin p \Rightarrow 1 - \sin^2 p = m \cdot n \cdot \sin p \Rightarrow \sin^2 p + m \cdot n \cdot \sin p - 1 = 0 \quad (10)$$

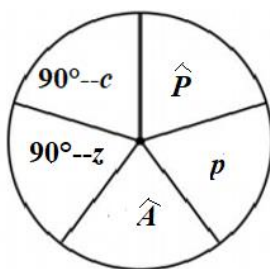
La (10) è una equazione goniometrica, ma possiamo anche dire che è una equazione algebrica di secondo grado, in forma canonica, considerandola nella variabile $\sin p$; pertanto risolviamola rispetto a tale variabile:

$$\sin p = \frac{-(m \cdot n) \pm \sqrt{(m \cdot n)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-(m \cdot n) \pm \sqrt{(m \cdot n)^2 + 4}}{2},$$

dove $m \cdot n \cong 0.095151$;

► Col segno “+”, abbiamo:

$$\sin p = \frac{-0.095151 + \sqrt{0.095151^2 + 4}}{2} \cong 0.953555 \Rightarrow p \cong 72^\circ 28' 09'' \Rightarrow$$



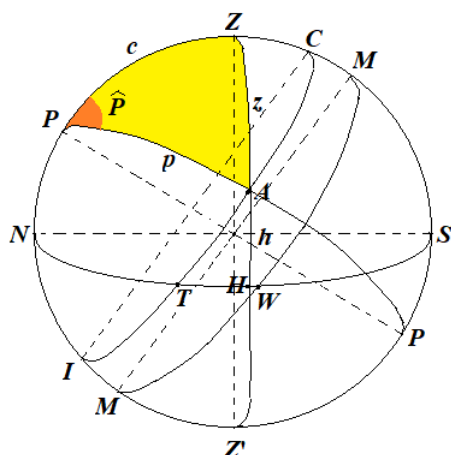
e, abbiamo

$$\cos \hat{P} = \cot(90^\circ - c) \cdot \cot p \quad \Rightarrow \quad \cos \hat{P} = \tan c \cdot \cot p \quad \Rightarrow$$

$$\cos \hat{P} \cong \tan 58^{\circ}01'18'' \cdot \cot 72^{\circ}28'09'' \Rightarrow \hat{P} \cong 59^{\circ}36'19'' E$$

4.

La situazione astronomica è nella seguente figura scenografica che mostra l'emisfero occidentale.



Il triangolo di posizione non ha nessuna particolarità, quindi applichiamo il teorema di Eulero:

$$\cos z = \cos c \cdot \cos p + \sin c \cdot \sin p \cdot \cos \hat{P}$$

$$\cos \hat{P} = \frac{\cos Z - \cos c \cdot \cos p}{\sin c \cdot \sin p}$$

$$\cos \hat{P} \cong \frac{\cos 49^{\circ}41'18'' - \cos 58^{\circ}01'18'' \cdot \cos 72^{\circ}28'09''}{\sin 58^{\circ}01'18'' \cdot \sin 72^{\circ}28'09''} \Rightarrow \hat{P} \cong 52^{\circ}56'35''W$$

Questa è l'unica possibile soluzione, perché la soluzione, a prescindere dal fatto astronomico, sarebbe

$$\hat{P} \cong \pm 52^{\circ}56'35'' + k \cdot 360^{\circ},$$

quindi per $k = 0$ le soluzioni sono $\hat{P} \cong 52^{\circ}56'35''$ e $\hat{P} \cong 307^{\circ}03'25''$; la seconda delle due non è accettabile nel caso del problema in oggetto.

OSSERVAZIONI.

- Il problema è piacevole e credo che sia pienamente gradito ai nostalgici, infatti viene assegnata l'amplitudine al posto dell'azimut. L'uso di questa coordinata veniva usata quasi esclusivamente quando l'astro è nel suo punto del levante L o nel suo punto del tramonto T .
- Durante lo svolgimento abbiamo, sovente, fatto riferimento a procedimenti matematici alternativi allo scopo di far rilevare che l'astronomia sferica è matematica. Invitiamo il lettore a fare le verifiche dei risultati utilizzando il teorema dei seni che, come si evince, non viene mai usato per determinare le incognite; infatti ad un valore naturale del seno corrispondono due angoli supplementari (a meno di giri completi).
- Infine nelle varie equazioni applicate abbiamo sempre usato gli elementi del triangolo sferico, come viene presentata la trigonometria sferica dal punto di vista matematico.

Nei tempi in cui si utilizzavano le tavole dei valori naturali delle funzioni goniometriche era necessario conoscere il problema della *riduzione al primo quadrante*.

La *riduzione di un dato angolo al primo quadrante* (**argomento che oggi non è più nei programmi di matematica**) significa determinare l'angolo del primo quadrante le cui funzioni goniometriche abbiano, in valore assoluto, gli stessi valori dell'angolo dato.

Successivamente il segno del valore naturale richiesto viene assegnato in virtù del quadrante di appartenenza dell'angolo dato.

Questa operazione era indispensabile allorché si usavano le tavole perché, come si sa, le tavole fornivano i valori naturali delle funzioni goniometriche per angoli del primo quadrante.

In navigazione ed in astronomia nautica si è agevolato lo studente introducendo le così dette "*convenzioni dei segni*"; oggi, sempre più mi convinco che se ne debba fare a meno, lasciando alla calcolatrice tascabile il compito di tenere conto dei segni dei valori naturali delle funzioni goniometriche.

Mi sembra che col perseverare dell'uso delle suddette convenzioni dei segni, si disconosca la potenzialità delle moderne calcolatrici tascabili (ed eventualmente dei computer) e si faccia una mescolanza tra il "*vecchio*" e il "*nuovo*".

Il problema, a volte^(*), si potrebbe porre anche con le calcolatrici se gli angoli che si manipolano avessero variabilità dell'angolo giro; questo non avviene mai nelle materie nautiche perché anche se esistono angoli con variabilità tutto l'angolo giro come gli azimut e i tempi dell'astro, nelle equazioni (che tutti chiamano, più comunemente, formule) non compaiono mai azimut e angoli orari ma, rispettivamente, angoli azimutali ed angoli al polo.

(*) non si pone il problema sulla determinazione del valore naturale di una funzione goniometrica; si pone nel problema inverso ovvero sulla determinazione dell'angolo corrispondente ad un valore naturale di una funzione goniometrica

Ora sarò più esplicito: è inammissibile perseverare sulla convenzione dei segni. E' come se, quando ho comprato il ciao (motorino munito di pedali) a mio figlio, gli avessi imposto di usarlo solo come bicicletta.

Utilizzando in tutte le equazioni gli elementi del triangolo si eliminano tutte le convenzioni dei segni.

Ne rimangono solo due che, però, sono indipendenti dalla goniometria e sono:

- quella della distanza polare nel triangolo sferico astronomico

$$p = 90^\circ - (\pm \delta)$$

nella quale si sceglie il segno “+” per φ e δ omonime, il segno “-” per φ e δ eteronime;

- quella della colatitudine del punto di arrivo

$$c = 90^\circ - (\pm \varphi)$$

nella quale si sceglie il segno “+” per latitudine del punto di arrivo omonima a quella del punto di partenza, il segno “-” per latitudine del punto di arrivo eteronima a quella del punto di partenza,

OSSERVAZIONE. Antola ha inventato una convenzione dei segni basata sulla funzione seno; questa convenzione è fuorviante perché il seno è positivo nel primo e secondo quadrante (è più giusto dire “non negativo” perché in 0° e 180° è nullo) ed è per questo che nei calcoli nautici non si usa il teorema dei seni se non per fare eventualmente delle verifiche sui risultati ottenuti.

Inoltre Antola ha stabilito (bontà sua) che il polo del triangolo ortodromico sia il polo nord ed inoltre misura la rotta iniziale (e quindi anche la finale) quadrantalmente. Tanto è vero che in Accademia vi è discordanza tra chi prepara i test: se li prepara Antola la risposta errata è 180° , se li prepara un altro docente la risposta errata è 90° . Che serietà!

Ma ciò che più mi sconcerta è l’atteggiamento dei docenti di navigazione che adottano i libri di Antola: o sono ignoranti o sono menefreghisti.

E’ passato quasi un anno e mezzo dall’incontro, avvenuto alla lega navale, con i colleghi Aldo Nicoli e Bruno Gazzale a cui presentai le mie idee su come si dovrebbero risolvere i triangoli sferici. Morale della favola, dopo aver loro mostrato alcuni problemi risolti, proprio Nicoli disse: “*quanti anni abbiamo perso*”.

Altre due considerazioni:

1. I teoremi di trigonometria sferica che, in generale, si utilizzano nelle materie nautiche sono quello di Eulero e quello delle cotangenti. Ma oggi, con l’utilizzo delle calcolatrici, può essere utilizzato due volte il teorema di Eulero. Mi spiego con un esempio: nella navigazione ortodromica date le coordinate del punto A di partenza e del punto B di arrivo, è uso calcolare il cammino ortodromico col teorema di Eulero e le rotte iniziale e finale mediante il teorema delle cotangenti, invece possiamo operare come segue:

$$\cos m_O = \cos c_A \cdot \cos c_B + \sin c_A \cdot \sin c_B \cdot \cos \Delta \lambda_{AB}$$

e, ancora col teorema di Eulero

$$\cos c_B = \cos c_A \cdot \cos m_O + \sin c_A \cdot \sin m_O \cdot \cos R_i \Rightarrow$$

$$\cos R_i = \frac{\cos c_B - \cos c_A \cdot \cos m_O}{\sin c_A \cdot \sin m_O}$$

Ebbene con quest’ultima equazione otteniamo la rotta iniziale che avremmo ottenuto col teorema delle cotangenti. Si tenga presente che le approssimazioni nelle calcolatrici tascabili vanno oltre ai valori numerici che appaiono sul display; pertanto la differenza tra il valore della rotta iniziale calcolata col teorema delle cotangenti e il valore determinato come prima descritto è minima, addirittura impercettibile.

2. Evviva Nepero che ha escogitato le sue, ormai famose, regole mnemoniche. E’ comunque importante che l’allievo, nell’usarle, si renda conto da che cosa quelle equazioni provengano. Nepero, anche se non era un grande matematico, era un personaggio che perseverava sulle sue idee: ed ecco la nascita dell’operatore logaritmo che ha rivoluzionato il “calcolo”. **Osservazione.** Si dicono logaritmi neperiani quelli la cui base è il numero e . Oggi non dobbiamo fare sforzi mnemonici per ricordare i suoi valori approssimati, ad un certo numero di decimali, perché qualunque programma matematico

ci consente di determinarne il valore approssimato al (si fa per dire) numero di cifre desiderato. Con Derive posso, per esempio scrivere il valore approssimato di e con 100 cifre decimali:

APPROX(e , 100)

ed in esecuzione, è

2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595

74966967627724076630353547594571382178525166427

Come sono cambiate le cose nel tempo: La rivista “Sapere” nel 1929 pubblicò la seguente filastrocca:

La	2
bambina	7
è	1
affamata,	8
la	2
minestra	8
è	1
squisita,	8
la	2
scodella	8
vien	4
tosto	5
terminata	9

con la caratteristica che il numero delle lettere di ogni parola è uguale alle cifre, nello stesso ordine, delle prime cifre che compongono il numero e , con l’avvertenza di mettere la virgola (o il punto) dopo la prima cifra.