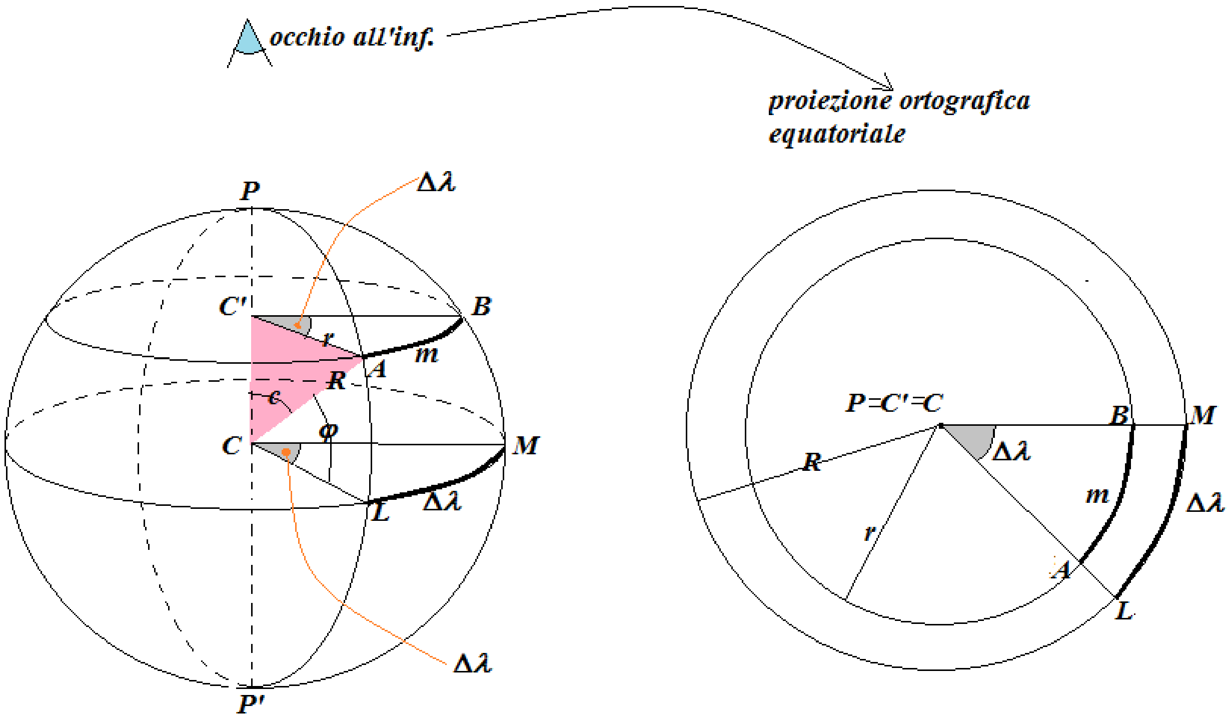
PREMESSA ALLA SOLUZIONE DEL QUESITO E ESAME STATO 2010

Relazione tra un arco di parallelo e l'arco di equatore compresi tra due meridiani

Siano *PAP'* e *PBP'* due meridiani; essi determinano sull'equatore l'arco *LM* e su un parallelo, di latitudine φ, l'arco *AB*.

Le **ampiezze** dei due archi sono **uguali** tra loro perché ampiezze di sezioni rette dell'angolo diedro formato dai piani meridiani *PAP'* e *PBP'* ; e, se l'ampiezza è minore dell'angolo piatto, esprimono la differenza di longitudine $\Delta\lambda$ che esiste tra i due meridiani.



Per contro, **non sono uguali** le **lunghezze**, espresse in una stabilita unità lineare, dei due archi.

Ci proponiamo di determinare una equazione che consenta di determinare la lunghezza di uno dei due archi conoscendo la lunghezza dell'altro.

Dalla prima figura rileviamo che nel triangolo *AC'C* si ha:

- l'angolo in *C'* è retto perché il piano del parallelo è normale all'asse polare e quindi risulta perpendicolare a tale asse il lato *AC'* che è il raggio *r* del parallelo considerato,
- l'ipotenusa *CA* è il raggio *R* della sfera,
- il cateto *C'A* è il raggio *r* del parallelo,
- l'angolo *C'CL* è la colatitudine *c* del parallelo.

Con queste precisazioni, abbiamo:

$$r = R\sin c \quad \Rightarrow \quad r = R\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{R} = \cos\varphi\,; \qquad (1)$$

ma, dalla geometria è noto che: "*il rapporto di due archi di circonferenza simili* (*appartenenti a circonferenze di raggi diversi*) *è uguale al rapporto fra i rispettivi raggi*" (vedi **NOTA1**, alla fine).

Osservando la seconda figura, possiamo scrivere:

$$\frac{arco(AB)}{arco(LM)} = \frac{r}{R}\,; \qquad (2)$$

dal confronto della terza delle (1) con la (2), abbiamo:

$$\frac{arco(AB)}{arco(LM)} = \cos\varphi\,, \qquad (3)$$

OSSERVAZIONE. Essendo $arco(LM) = \Delta\lambda$, in virtù della definizione di miglio marino, abbiamo:

$$arco(LM) = (\Delta\lambda)'\,mg,$$

per cui, dalla (3), abbiamo:

$$arco(AB) = (\Delta\lambda)'\cos\varphi\,mg.$$

Indicato con m la lunghezza, espressa in miglia marine, abbiamo l'equazione:

$$m = (\Delta\lambda)'\cos\varphi\,. \qquad (4)$$

Viceversa: data la lunghezza m di un arco di parallelo, ad una latitudine φ, l'equivalente variazione di longitudine in primi d'arco è:

$$(\Delta\lambda)' = \frac{m}{\cos\varphi} \qquad (5)$$

QUESITO E

Due navi X e Y navigano per parallelo in senso opposto.

La nave X parte dal punto $A(\varphi = 30°10'N; \lambda = 49°30'W)$ alle $t_f = 05^h30^m$ del 3 giugno 2010 con velocità $v_X = 18\,nodi$ e $R_v = 090°$.

La nave Y parte dal punto $B(\varphi = 50°06'N; \lambda = 15°32'W)$ alle $t_f = 07^h30^m$ del 3 giugno 2010 con $v_Y = 21\,nodi$ e $R_v = 270°$.

Il candidato determini il t_f al passaggio al meridiano contemporaneo delle due navi.

SOLUZIONE

Le due navi X e Y navigano per parallelo, in senso opposto, ma su latitudini diverse. Per risolvere il problema cominciamo a trasformare i rispettivi tempi fuso di partenza nei corrispondenti simultanei tempi medi T_m (oggi *UT*):

- per la nave X

$$
\begin{array}{ll}
t_{f_X} = 05^h 30^m & 3 \quad giugno \\
-\lambda_{f_X}^{(-)} = +03^h & \\
\hline
T_{m_X} = 08^h 30^m & 3 \quad giugno
\end{array}
$$

- per la nave Y

$$
\begin{array}{ll}
t_{f_Y} = 07^h 30^m & 3 \quad giugno \\
-\lambda_{f_Y}^{(-)} = +01^h & \\
\hline
T_{m_Y} = 08^h 30^m & 3 \quad giugno
\end{array}
$$

Dai risultati emerge

$$T_{m_X} = T_{m_Y}$$

per cui è comprovata la partenza simultanea (come pensavamo che così fosse) delle due navi.

OSSERVAZIONE. Ricordare che:

- la trasformazione della longitudine espressa in gradi alla equivalente longitudine espressa in ore e viceversa si ottiene con la proporzione

$$\lambda^{\circ} : 180^{\circ} = \lambda^h : 12^h$$

- il passaggio dalla longitudine locale λ alla longitudine λ_f del fuso al quale appartiene la λ data si ottiene arrotondando la longitudine λ, espressa in ore, all'ora più prossima.

Nella seguente proiezione ortografica sono riportati:

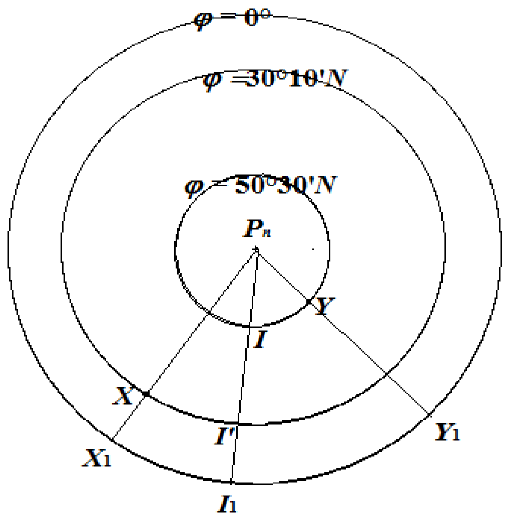
--- il punto X che rappresenta la nave A sul parallelo $\varphi = 30°10' N$ e sul meridiano di partenza,

--- il punto X_1 che è il piede sull'equatore del meridiano passante per X,

--- il punto Y che rappresenta la nave B sul parallelo $\varphi = 50°06' N$ e sul meridiano di partenza

--- il punto Y_1 che è il piede sull'equatore del meridiano passante per Y,

--- il meridiano $P_n I_1$ che è il meridiano contemporaneo di passaggio delle due navi



La soluzione del problema sarebbe stata più facile se le due navi avessero navigato, in contro corsa, sullo stesso parallelo. Provo a fare un esempio con un problema che gli allievi conoscono fin dalla scuola primaria: per addizionare due frazioni aventi denominatore diverso bisogna prima ridurle allo stesso denominatore; per comodità, scelgo il più piccolo dei denominatori comuni ovvero il "minimo comune multiplo dei denominatori".

Ebbene qui succede una cosa simile: è necessario pensare a due navi fittizie che navighino su uno stesso parallelo, con le stesse rispettive velocità angolari. Tra tutti i possibili paralleli comuni, per la (5) della "PREMESSA", scelgo l'equatore (vedi **NOTA2**, alla fine).

Consideriamo pertanto due navi fittizie X_1 e Y_1 che percorrono, in contro corsa l'arco X_1Y_1.

Dalla (5), abbiamo:

- mentre la nave X percorre l'arco XI' con velocità v_x, la nave X_1 percorre l'arco di equatore X_1I_1 con velocità $v_{x_1} = \dfrac{v_x}{\cos\varphi_X}$
- mentre la nave Y percorre l'arco YI con velocità v_Y la nave Y_1 percorre l'arco di equatore Y_1I_1 con velocità $v_{Y_1} = \dfrac{v_Y}{\cos\varphi_Y}$.

Pertanto l'intervallo i di tempo richiesto si determina con:

$$i = \frac{(\Delta\lambda)'}{v_{X_1} + v_{Y_1}}$$

cioè:

$$i = \frac{(\Delta\lambda)'}{\dfrac{v_X}{\cos\varphi_X} + \dfrac{v_Y}{\cos\varphi_Y}} \qquad (6)$$

Sostituiti i dati nella (6), essendo $(\Delta\lambda)' = 2038'$, ottengo:

$$i = 38^h 03^m 08^s .$$

Nell'intervallo di tempo i la nave X percorre il cammino XI':

$$XI' = v_X \cdot i \cong 604.94 mg \tag{7}$$

a cui corrisponde la variazione di longitudine

$$\Delta\lambda_{X_1 I_1} = \frac{604.94}{\cos 30°10'} = 792.23' E = 13°12'14'' E$$

OSSERVAZIONE. Verifico le dimensioni dei due membri della (7):

--- dimensione 1° membro = mg

--- dimensione 2° membro $= nodi \cdot h = \frac{mg}{h} \cdot h = mg$

Calcolo la longitudine al passaggio al meridiano contemporaneo

$$\begin{array}{lcl} \lambda_X & = & -49°30' \\ +\Delta\lambda_{X_1 I_1}^{(+)} & = & +13°12'14'' \\ \hline \lambda_{I_1} & = & -36°17'46'' = \lambda_{I'} \\ \lambda_{I_1} & = & 36°17'46'' W = 2^h 25^m 11^s W = \lambda_{I'} \end{array}$$

da cui:

$$\lambda_{f_{I'}} = 2^h W$$

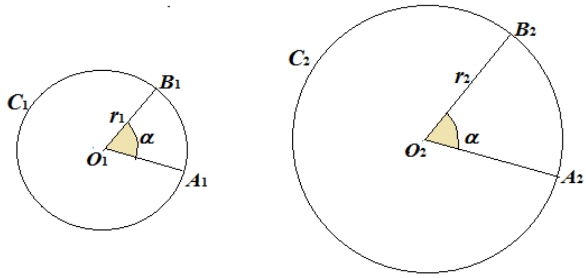
Calcolo il tempo medio al passaggio al meridiano contemporaneo:

$$\begin{array}{ll} T_{m_X} = 08^h 30^m & del \quad 3 \quad giugno \\ +i \ = 38^h 03^m 08^s & \\ \hline T_{m_{I'}} = 46^h 33^m 08^s & del \quad 3 \quad giugno \\ -24^h & \\ \hline T_{m_{I'}} = 22^h 33^m 08^s & del \quad 4 \quad giugno \end{array}$$

Calcolo infine i tempo fuso in I':

$$
\begin{array}{l}
T_{m_{I'}} \;=\; 22^h33^m08^s \qquad del \;\; 4 \;\; giugno \\
+\lambda_{f_{I'}}^{(-)} = -02^h \\
\hline
t_{f_{I'}} \;=\; 20^h33^m08^s \qquad del \;\; 4 \;\; giugno
\end{array}
$$

NOTA 1. Siano C_1 e C_2 due circonferenze rispettivamente di raggio r_1 e r_2; si prenda, su ciascuna di esse, un arco di ampiezza α:



si hanno le due proporzioni

$$\frac{A_1B_1}{\pi \cdot r_1} = \frac{\alpha}{180°} \qquad (*)$$

$$\frac{A_2B_2}{\pi \cdot r_2} = \frac{\alpha}{180°} \qquad (**)$$

i secondi membri delle (*) e (**) sono uguali e quindi risultano uguali (proprietà transitiva dell'uguaglianza) i primi membri:

$$\frac{A_1B_1}{\pi \cdot r_1} = \frac{A_2B_2}{\pi \cdot r_2},$$

da cui semplificando per π e ricordando che in una proporzione si possono scambiare i medi tra loro, si ottiene l'asserto:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

NOTA 2. Che cosa è la velocità nel linguaggio scientifico? E' la rapidità con cui una grandezza variabile varia in funzione della variabile da cui dipende. Nel nostro caso la grandezza variabile è un percorso e la variabile da cui dipende è il tempo. In riferimento all'ultima figura, è:

$$v_X = 18\frac{mg}{h} \quad \text{che possiamo scrivere} \quad v_X = \frac{18mg}{h},$$

ed allora:

$$v_{X_1} = \frac{\dfrac{18mg}{\cos\varphi_X}}{h} = \frac{\dfrac{18mg}{h}}{\cos\varphi_X} = \frac{v_X}{\cos\varphi_X} \qquad \text{(c.v.d.)}$$