QUESITO E dell'ESAME DI STATO INDIRIZZO CAPITANI del 2009

Il giorno 16 giugno 2009, allo stesso istante le stelle Markab e Polluce hanno la stessa altezza rispetto ad un osservatore. La stella Polluce ha l'azimut di 60° mentre la stella Markab di 90°.

Il candidato calcoli la latitudine dell'osservatore.

SOLUZIONE

Indico con:

- δ_{MA} la declinazione della stella Markab,
- δ_{PO} la declinazione della stella Polluce,
- h l'altezza delle stelle, uguale per entrambe,
- φ la latitudine dell'osservatore, da determinare.

A) Considero il triangolo di posizione relativo alla stella Markab; in esso, essendo $a = 90°$, è:

$$\hat{Z} = N90°E\,; \qquad (1)$$

dal teorema di Eulero, è:

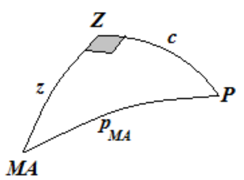
$$\cos p_{MA} = \cos z \cdot \cos c + \sin z \cdot \sin c \cdot \cos \hat{Z}$$

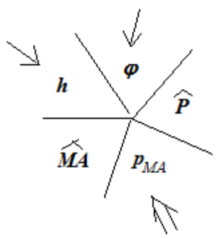
$$\sin \delta_{MA} = \sin h \cdot \sin \varphi + \cos h \cdot \cos \varphi \cdot \cos \hat{Z}\,,$$

che, per la (1), essendo $\cos \hat{Z} = \cos 90° = 0$, diventa:

$$\sin \delta_{MA} = \sin h \cdot \sin \varphi \qquad (2)$$

La (2) si può ricavare anche da una delle regole mnemoniche di Nepero per i triangoli sferici rettangoli





$\cos p_{MA} = \sin h \cdot \sin \varphi$, da cui la (2)

B) Considero il triangolo di posizione relativo alla stella Polluce, e ancora per il teorema di Eulero, è:

$$\cos p_{PO} = \cos z \cdot \cos c + \sin z \cdot \sin c \cdot \cos \hat{Z}\,,$$

$$\sin \delta_{PO} = \sin h \cdot \sin \varphi + \cos h \cdot \cos \varphi \cdot \cos \hat{Z}$$

la quale, per la (2), essendo inoltre $\hat{Z} = N60E$ da cui $\cos\hat{Z} = \frac{1}{2}$, diventa:

$$\sin\delta_{PO} = \sin\delta_{MA} + \cos h \cdot \cos\varphi \cdot \frac{1}{2}$$

ovvero

$$2(\sin\delta_{PO} - \sin\delta_{MA}) = \cos h \cdot \cos\varphi \qquad (3)$$

C) A questo punto necessitano alcuni virtuosismi matematici; in particolare, in virtù del primo criterio di equivalenza delle equazioni, possiamo

- **addizionare** ai due membri della (3), nell'ordine, i due membri della (2):

$$2(\sin\delta_{PO} - \sin\delta_{MA}) + \sin\delta_{MA} = \cos h \cdot \cos\varphi + \sin h \cdot \sin\varphi$$

$$2\sin\delta_{PO} - \sin\delta_{MA} = \cos(h-\varphi) \qquad (4)$$

- **sottrarre** ai due membri della (3), nell'ordine, i due membri della (2):

$$2(\sin\delta_{PO} - \sin\delta_{MA}) - \sin\delta_{MA} = \cos h \cdot \cos\varphi - \sin h \cdot \sin\varphi$$

$$2\sin\delta_{PO} - 3\sin\delta_{MA} = \cos(h+\varphi) \qquad (5)$$

D) Ora ci serviamo delle effemeridi per leggere nella pagina del 16 giugno 2009 le declinazioni dei due astri, così che la (4) con la (5) costituiscono un banale sistema lineare nelle variabili h e φ. Non disponendo delle effemeridi del 2009, concludo il problema con le effemeridi di cui dispongo: quelle del 2013. Questo fatto non cambia l'essenza del problema; produrrà una piccola discordanza sul risultato.

Dalle effemeridi rilevo $\delta_{MA} = 15°16'.7N$ e $\delta_{PO} = 27°59'.5N$, per cui imposto il sistema formato dalla (4) con la (5) sostituendovi i valori delle declinazioni:

$$\begin{cases} \cos(h-\varphi) = 0.675177997 \\ \cos(h+\varphi) = 0.148161439 \end{cases} \qquad (6)$$

il sistema (6) ammette infinite soluzioni, infatti se α è soluzione dell'equazione $\cos x = n$ (con $-1 \le n \le 1$), è soluzione anche l'angolo $-\alpha$, e così sono soluzioni tutti gli angoli

$$\pm\alpha + k \cdot 360°,$$

per cui, le infinite soluzioni del sistema (6) sono:

$$\begin{cases} h - \varphi = \pm 47°31'55'' + k \cdot 360° \\ h + \varphi = \pm 81°28'47'' + k \cdot 360° \end{cases} \qquad (7)$$

Ma, per la natura delle variabili in oggetto $(0 \le h \le 90° \wedge -90° \le \delta \le 90°)$, la soluzione del sistema (6) è:

$$\begin{cases} h-\varphi = \pm 47°31'55'' \\ h+\varphi = \pm 81°28'47'' \end{cases},$$

ovvero:

I) $\begin{cases} h-\varphi = +47°31'55'' \\ h+\varphi = +81°28'47'' \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2h = +129°00'42'' \\ 2\varphi = +33°56'54'' \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} h = +64°30'21'' \\ \varphi = +16°58'27'' \end{vmatrix}$

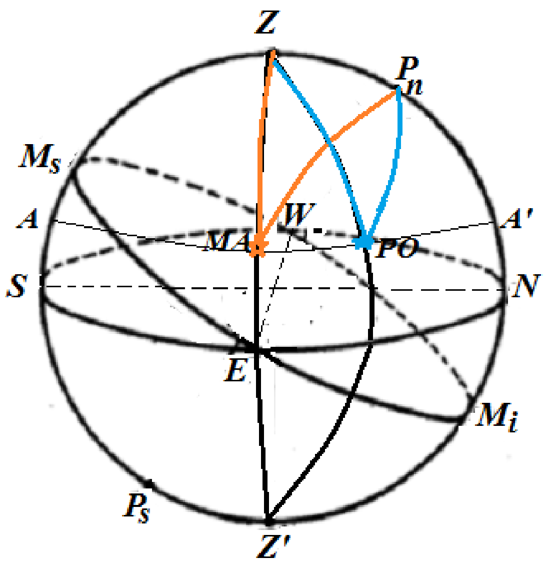
II) $\begin{cases} h-\varphi = -47°31'55'' \\ h+\varphi = +81°28'47'' \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2h = +33°56'54'' \\ 2\varphi = +129°00'42'' \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} h = +16°58'27'' \\ \varphi = +64°30'21'' \end{vmatrix}$

III) $\begin{cases} h-\varphi = +47°31'55'' \\ h+\varphi = -81°28'47'' \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2h = -33°56'54'' \\ 2\varphi = -129°00'42'' \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} h = -16°58'27'' \\ \varphi = -64°30'21'' \end{vmatrix}$

IV) $\begin{cases} h-\varphi = -47°31'55'' \\ h+\varphi = -81°28'47'' \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2h = -129°00'42'' \\ 2\varphi = -33°56'54'' \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} h = -64°30'21'' \\ \varphi = -16°58'27'' \end{vmatrix}$

Mentre le soluzioni III) e IV) sono da scartare per la natura delle variabili del problema (una altezza non può essere negativa) sono entrambe accettabili le soluzioni I) e II); pertanto vi è ambiguità sulla determinazione della latitudine che viene eliminata, ovviamente, se si conosce il punto stimato dell'osservazione che nel testo non è data. Pertanto, in virtù della latitudine del punto stimato del 16 giugno del 2009, la latitudine dell'osservatore è $\varphi = 16°58'27''\,N$ o (aut) $\varphi = 64°30'21''\,N$.

Nella seguente figura riporto la sfera celeste in forma scenografica relativa alla soluzione II)



In essa si notano i due triangoli sferici di posizione simultanei:

- $S\,P_n\,MA$ relativo alla stella Markab
- $S\,P_n\,PO$ relativo alla stella Polluce.

Come si vede i due astri giacciono, nello stesso istante, sul medesimo almicantarat *AA*' ed i due triangoli hanno in comune il lato $ZP_n = c = 90° - \varphi$.

COMMENTO.

La mia opinione, al di là del problema astronomico, è che il procedimento matematico necessario alla soluzione sia, per gli studenti attuali, improponibile per (purtroppo), la loro bassa attuale cultura scientifica. Ai miei tempi artifici tipo quello applicato nella soluzione del problema erano piuttosto ricorrenti; ora solo nei licei scientifici si continuano a fare, ma non nelle scuole di altro indirizzo.

Inoltre credo che l'ideatore del quesito:
A) o lo ha costruito partendo dal risultato (come spesso fanno gli autori) e successivamente non avendolo svolto ha perso le possibili altre soluzioni;
B) o era ben conscio della duplice soluzione auspicando che gli allevi che avessero voluto risolvere questo quesito si fossero accorti della indeterminatezza del risultato aspettandosi quindi un adeguato commento.
Forse è più plausibile la seconda mia opinione, suffragata dal fatto che nel 2008 era stato proposto il quesito, di non facile soluzione, che chiedeva di determinare la distanza angolare di due stelle.
Se quello che penso è vero e cioè che i due compiti siano opera dello stesso professore vuol dire che quel professore è veramente un " buon conoscitore della materia".
Mi rimane ancora un dubbio: è possibile che ci sia un istante, per un osservatore, in cui gli azimut simultanei di quelle due stelle possano essere rispettivamente 90° e 60°?
Penso che possa esistere un punto della superficie terrestre da cui si rilevi la distanza angolare in azimut di Markab e di Polluce pari a 30°; ma mi sembra poco probabile che quell'istante coincida con l'eventualità degli azimut assegnati nel testo: 90° e 60°.
Attendo fiducioso risposte in merito.