PIANETI E SATELLITI

1..PREMESSA

►La fisica tratta i fenomeni naturali che non producono grandi alterazioni dei corpi. Tra i tanti fenomeni il più semplice è costituito dall'evento che i corpi si muovono, ovvero che cambiano posizione gli uni rispetto agli altri. Sappiamo che la branca della fisica che studia il movimento dei corpi è la *meccanica*, in particolare la *cinematica* che studia il movimento indipendentemente dalle cause che lo producono e la *dinamica* che considera anche le cause che producono tale movimento.

Ovviamente nelle scienze applicate è indispensabile rispettare le dimensioni delle varie entità in gioco, nel caso del moto abbiamo:

- uno spostamento s che è una grandezza che rappresenta una lunghezza ovvero si dice che ha dimensione di una lunghezza e ciò si esprime simbolicamente

$$[s] = [L];$$

- in modo analogo un tempo t ha la dimensione di tempo e simbolicamente si scrive:

$$[t] = [T].$$

- e, così pureun corpo ha la dimensione di una massa m(proprietà intrinseca della materia) e si scrive:

$$[m] = [M].$$

Così si ottengono le dimensioni derivate, per esempio quella della velocità $v$che ha dimensione

$[v] = [LT^{-1}]$;

inoltre, in qualunque equazione deve verificarsi, non solo l'identità numerica, ma anche quella dimensionale, per esempio, nell'equazione $s = \frac{1}{2}at^2$che porge lo spazio percorso da un punto materiale con moto uniformemente accelerato, è:

- dimensione primo membro: $[L]$
- dimensione secondo membro: $[LT^{-2}T^2] = [L]$

  da cui si evince l'identità dimensionale.

OSSERVAZIONE. Un corpo ha una massa e un peso; mentre la massa di un corpo è una invariante, ovvero è una caratteristica intrinseca e universale dei corpi (non cambia da luogo a luogo), il peso esprime la forza con cui il centro di un pianeta attira quel corpo ovvero cambia, da luogo a luogo, col cambiare dell'accelerazione di gravità.

Dalla seconda legge della dinamica $F = m\,a$, il peso P di un corpo di massa m, sulla Terra, è espresso dall'equazione:

$$P = m\,g, \qquad (1)$$

in cui g rappresenta l'accelerazione di gravità sul nostro pianeta; pertanto la dimensione di P è una dimensione derivata e precisamente:

$$[P] = [MLT^{-2}] \qquad (2)$$

OSSERVAZIONE. Un dato oggetto non altera la sua essenza spostandosi da un luogo ad un altro infatti, esercitandogli la stessa forza in entrambi i luoghi, esso oppone un'uguale resistenza inerziale ovvero alla variazione del proprio stato di quiete o di moto. Pertanto sarebbe più corretto usare la locuzione di "massa inerziale" per denominare la proprietà intrinseca della materia che, per quanto detto, risulta definita dal rapporto costante $\frac{F}{a}$.

► Il sistema di misura che si utilizza in fisica è il "*Sistema Internazionale*" nel quale il movimento si esprime in metri, il tempo in secondi e la massa in chilogrammi: sistema*SI*.

OSSERVAZIONE1. Il Sistema Internazionale di unità di misura si impiegò durante l'undicesima conferenza internazionale sulle unità di misura, tenutasi a Parigi nel 1960(lo scrivente frequentava, in quel tempo, il quarto anno del corso di Macchinisti Navali all'Istituto Nautico C. Colombo di Camogli); in esso vengono stabilite sette dimensioni fondamentali:

- il *metro* per la lunghezza, simbolo *m*;
- il *chilogrammo* per la massa, simbolo *Kg*;
- il *secondo* per il tempo, simbolo *s*;
- l'*ampere* per l'intensità di corrente,simbolo *A*;
- il *Kelvin* per la temperatura, simbolo *K*;
- la *mole* per la quantità di sostanza, simbolo *mol*;
- la *candela* per l'intensità luminosa, simbolo *cd*.

Già nel 1935 fu adottato il sistema Giorgi, espresso dall'acronimo *MKSΩ.*, perché venne introdottauna quarta grandezza fondamentale e precisamente l'*hom* che è la misura della resistenza elettrica il cui simbolo è la lettera maiuscola greca omega, si può ritenere, pertanto, che il sistema Giorgi sia il precursore del *S.I.*

L'unità di misura della forza e quindi di un peso, nel sistema internazionale, è il newton (simbolo N), pari alla forza che, applicata ad un corpo di massa 1 Kg, imprime ad essa l'accelerazione di $1\frac{m}{s^2}$.

Quindi la massa si misura in chilogrammi (Kg) mentre il peso si misura in Newton (N) e dalle (1) e (2), è:

$$P = (mg)Kg \cdot m \cdot s^{-2} = (mg)N$$

Cerchiamo di ulteriormente precisare questo concetto, allo scopo pensiamo di disporre di una bilancia a due piatti; su uno dei piatti poniamo un oggetto e sull'altro poniamo tante unità campione di massa fino araggiungere l'equilibrio con piatti sullo stesso piano orizzontale: il numero di unità campione posizionate su uno dei due piatti indica la massa, espressa in Kg, dell'oggetto posizionato sull'altro piatto. Ebbene il risultato di questa operazione non cambia se l'esperimento viene eseguito tanto sulla Terra quanto su un altro pianeta; come dire che la quantità di materia di un oggetto non dipende dalla posizione dello stesso.

Cosa cambia, invece, è il peso che, come detto, dipende dall'accelerazione di gravità che muta da pianeta a pianeta e, anche se di poco, da punto a punto di uno stesso pianeta a causa della non perfetta sfericità dello stesso.

Nel gergo comune, quando si parla di un chilogrammo, va inteso come "chilogrammo peso (Km_p)" ovvero l'equivalente della forza che bisogna esercitare per reggere un "chilogrammo massa(Km_m)" che la Terra (o qualunque altro pianeta) esercita su quell'oggetto, cioè:

$$1Kg_p = (1Kg_m \cdot g_{pianeta})N$$

nel caso della Terra:

$$1Kg_p = (1Kg_m \cdot 9.81)N = 9.81N\ ,$$

pertanto risulta

$$1N \cong \text{(per eccesso)}\ \frac{1}{10}Kg_p$$

che esprime la percezione tangibile che si ha nel sostenere, equilibrando la forza di gravità, un oggetto avente massa pari a circa $\frac{1}{10}Kg_m$.

Quindi un corpo di massa 1 Kg pesa $1\cdot 9.81 = 9.81N$; teoricamente, quando compriamo, per esempio, 1 Kg di zucchero, dovremmo chiedere 9.81 N di zucchero. Sulla Terra quindi un newton è quasi un decimo di chilogrammo.

Una persona avente massa m=70Kg, pesa:

- $(70\cdot 9.81)N = 686.7N$ sulla Terra,
- $(70\cdot 8.872)N = 621.04N$ su Venere essendo $8.872ms^{-2}$ l'accelerazione di gravità in questo pianeta.
- $(70\cdot 3.728)N = 260.96N$ su Marte essendo $3.728ms^{-2}$ l'accelerazione di gravità in questo pianeta.

In fig.1viene riportato un dinamometro con appeso un corpo di massa m, posto una volta sulla Terra ed una volta su Marte;

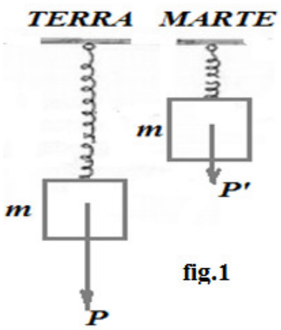


fig.1

sulla Terra quel corpo pesa 686.7N, su Marte pesa 260.96N, pertanto lo stesso oggetto di massa m, pesa sulla Terra circa 2.6 volte di più che su Marte.

2..PROBLEMA DEGLI *n* CORPI

►Tra i più svariati moti, noi siamo interessatial moto di un sistema materiale libero formato da n punti$C_h (h=1, 2, 3, 4, \ldots, n-1, n)$ rispettivamente di massa M_h, isolato nello spazio tridimensionale e sottoposto solamente alle scambievoli forze gravitazionali di tipo newtoniano. Ciò significa che due corpi C_he $C_k$del sistema sono soggetti ad una forza il cui valore assoluto è

$$F_{h,k} = G\frac{M_h M_k}{R_{h,k}^2} \qquad (3)$$

nella quale M_h e M_k sono rispettivamentele masse dei due punti C_h e C_k la cui distanza è $R_{h.k}$ e G è la costante di gravitazione universale di Cavendish, detta così perché è stato il primo scienziato che, in laboratorio, ha misurato la forza di gravità ottenendo un valore soddisfacentemente corretto, pari a $6.67\cdot 10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$.

Henry Cavendish col suo esperimento attuato negli anni 1797-1798 misurò la forza di gravità tra masse; supposto che avesse usato due masseM_1 e M_2, la (3) diventa:

$$F_{1,2} = G\frac{M_1 M_2}{R_{1,2}^2}, \qquad (3')$$

dalla quale, essendo noti a priori M_1, M_2, $R_{1,2}$ ed $F_{1.2}$ determinata sperimentalmente, ha calcolato il valore della costante G.

Giustifico la dimensione della costante G, ricordando che una equazione è una uguaglianza tra due membri, non solo numerica, ma anche dimensionale; allo scopo risolvo la (3) rispetto a G:

$$G = \frac{F_{1,2} \cdot R_{1,2}^2}{M_1 \cdot M_2} = \frac{M_1 \cdot a \cdot R_{1,2}^2}{M_1 \cdot M_2} = \frac{a \cdot R_{1.2}^2}{M_2}\left(\frac{\frac{m}{s^2} \cdot m^2}{kg} = m^3 s^{-2} kg^{-1} \right)$$

►I pianetinon sono puntiformi, ma, in virtù del teorema del moto del centro di massa, possiamo sostituire ad essi i rispettivi baricentri o centri di massa ove si considera concentrata tutta la loro massa stessa; questo non solo nei riguardi delle loro traiettorie orbitali (vedi leggi di Keplero), ma anche nei riguardi del campo gravitazionale perché, per le grandi distanze tra i vari corpi celesti, si può supporre che la distribuzione delle massein essi sia a simmetria sferica.

Mentre rimane valida la prima considerazione sulle orbite satellitari attorno alla Terra, cade in difetto la seconda per la piccola distanza dei satelliti artificiali dalla Terra, i quali risentono delle variazioni del campo gravitazionale, anche se modeste, dovute alla non perfetta simmetria sferica delle massecostituenti la Terra.

In definitiva lo studio del moto di un corpo rigido consiste nello studio del moto del suo baricentro e del moto di tutti gli altri punti attorno al baricentro.

Ad esempio nel salto libero di uno sciatore, il suo centro di massa (circa nei pressi dell'ombelico) percorre una traiettoria parabolica mentre tutti gli altri punti del corpo hanno traiettorie tra loro diversificate. Consegue che lo studio del moto di un corpo consiste nell'analizzare il moto del suo baricentro e il moto di tutti gli altri suoi punti attorno albaricentro.

Il problema degli n corpi ha avuto considerevole rilevanza a partire dall'astronomo polacco Mikolaj Koppernik (1473-1543), italianizzato Niccolò Copernico. E' soddisfacente rilevare la concordanza dei risultati sulle osservazioni delle orbite che i pianeti compiono attorno al Sole, fatte dall'astronomo tedesco Johannes von Kepler, italianizzato Giovanni Keplero e riassunte nelle sue tre leggi,con i calcoli teorici effettuati successivamente.

Newton, dal terzo principio della dinamica e dalle leggi di Keplero, intuì che la traiettoria che descrive un corpo nel moto attorno ad una massa centrale è un percorso che è una **conica**, ovvero una **ellisse** o una **parabola** o una **iperbole**. Queste traiettorie assumono il nome di orbite.

Le ellissi, le parabole e le iperboli vengono dette coniche perché sono sezioni coniche, come viene evidenziato nella fig.2

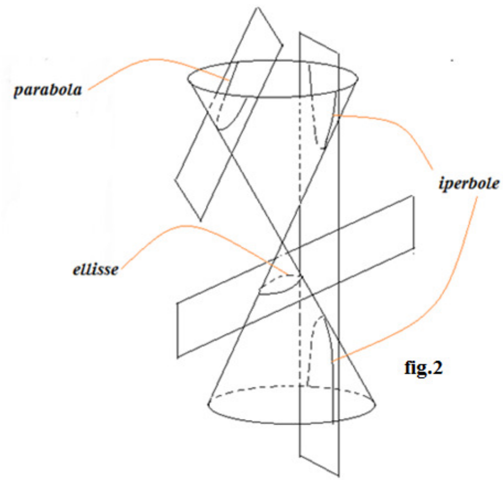


fig.2

Le coniche possono essere definite anche come luoghi geometrici di punti sul piano ed in particolare per l'ellisse si ha la definizione:

Una ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi. In fig.3, detti *F* e *F'* i fuochi, per un qualunque punto *P* dell'ellisse, per definizione, è: $\overline{PF} + \overline{PF'} = cost$. dove, facilmente, si dimostra che è *cost*.=2*a*, essendo *a* e il semiasse maggiore. Nella fig.3 sono riportatigli elementi caratteristici dell'ellisse; in essa sono segnati anche il semiasse minore *b* e la distanza *c* di ciascun fuoco dal centro. Si definisce eccentricità dell'ellisse il rapporto

$e = \frac{c}{a}$, in cui è $0 \le e < 1$.

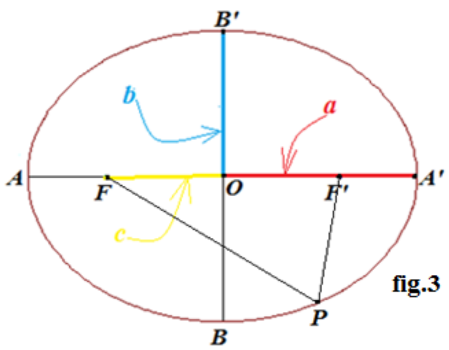


fig.3

Il caso in cui è $c = 0$, si ha una circonferenza, il che significa che la circonferenza è un caso particolare di ellisse: in questo caso i due fuochi coincidono col centro e tutti i raggi vettori sono tra loro uguali(raggio della circonferenza).

E' noto che le leggi che governano il moto dei pianeti attorno al Sole sono quelle dell'astronomo Keplero e precisamente:

- **Prima legge**: i pianeti descrivono orbite chiuse, a forma di ellisse, delle quali il Sole occupa uno dei due fuochi.

- **Seconda legge**: i raggi vettori (raggio vettore è il segmento che congiunge il centro del pianeta con il centro del Sole) descrivono aree uguali in tempi uguali.

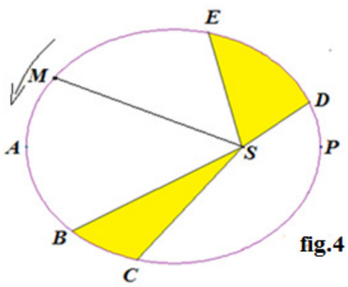


fig.4

In fig.4 è riportata una ellisse che rappresenta l'orbita di un ipotetico pianeta (per motivi didattici l'ellisse della figura ha una eccentricità vicina a 0.5, maggiore di 0.3488 che è l'eccentricità di Plutone , la massima di tutti i pianeti); se le aree dei triangoli mistilinei *SBC* e *SDE* sono equivalenti, allora quel pianeta percorre i tratti *BC* e *DE* nello stesso intervallo di tempo per cui è più veloce nel secondo tratto (Fig.4).

- **Terza legge**: i quadrati dei tempi *T* di rivoluzione dei pianeti attorno al Sole sono proporzionali ai cubi dei semiassi *a* maggiori delle orbite:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \qquad (4)$$

La fig.5 riporta le orbite ellittiche della Terra, del pianeta interno Venere e del pianeta esterno Marte; dalla figura, proporzionata alla realtà, vengono evidenziate le piccole eccentricità delle orbite, infatti:

__ *eccentricità Terra*= 0,0167

___ *eccentricità Venere* = 0,0068

___ *eccentricità Marte* = 0,0934

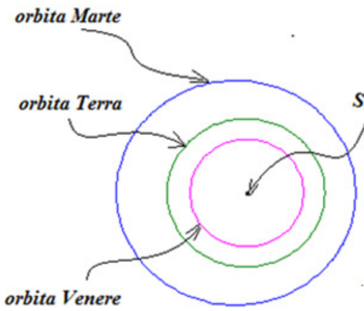


fig.5

3 ..SATELLITI ARTIFICIALI

I satelliti artificiali sono oggetti mandati in orbita dall'uomo attorno ad un corpo celeste: pianeta (Terra, Marte, …), satellite (Luna), stella (Sole); all'oggetto inviato in orbita attorno al Sole si da il nome di *pianeta artificiale*.

Per portare un satellite in orbita attorno alla Terra è necessario disporre di un complesso di lancio idoneo a trasmettergli la velocità necessaria per portarlo in una certa orbita, imprimergli una velocità tangenziale, tal che la forza centrifuga sia equilibrata dalla forza di attrazione terrestre; questo avviene con un missile detto razzo vettore.

Le leggi che governano il moto dei satelliti artificiali attorno alla Terra sono le stesse che regolano il moto dei pianeti attorno al Sole: le leggi di Keplero. La Terra quindi occupa un fuoco dell'orbita ellittica di ciascun satellite. Ma, l'eccentricità di ciascuna ellisse, orbita dei satelliti artificiali, è così piccola tal da poterla ritenere nulla, perciò tali orbite si possono considerare circolari. In queste condizioni la (4) diventa:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \qquad (5)$$

Dove r è il raggio di rotazione del satellite attorno al centro della Terra, ovvero, detto R il raggio della Terra e q la quota del satellite, è (fg.6):

$r = \overline{CP} = \overline{CO} + \overline{OP} = R + q$.

.

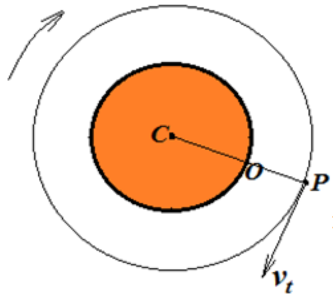


fig.6

Per fare orbitare il satellite sulla traiettoria voluta, è necessario portarlo a tale quota; allo scopo si ci serve di un razzo vettore che, raggiunta quella quota q, sgancia il satellite imprimendogli una opportuna velocità tangenziale v_t, ovvero perpendicolare alla forza di gravità; con questa velocità il satellite, per inerzia, prosegue la sua corsa attorno alla Terra mantenendo costantemente da essa, la quota q.

Affinché il satellite percorra la sua orbita, occorre che in ogni istante risultino uguali i valori intensivi delle due forze agenti su di esso, la forza centrifuga F_ce la forza gravitazionale F_g:

$$\left|F_g\right| = \left|F_c\right| ;$$

indicate con M ed m le masse, rispettivamente, della Terra e del satellite, è:

$$G\frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{m \cdot v_t^2}{r},$$

$$v_t^2 = \frac{G \cdot M}{r} = \frac{G \cdot M}{R+q},$$

$$v_t = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R+q}}. \qquad (6)$$

La (6) esprime la velocità tangenziale nella quale l'unica variabile è la quota q che, a sua volta, dipende dalla potenza del razzo vettore.

4..CALCOLO DELLA PRIMA VELOCITA' COSMICA

Determino la velocità di un ipotetico satellite avente quota nulla, supposta la Terra a superficie perfettamente sferica ed omogenea, in cui si assumono i seguenti valori per gli elementi che appaiono nel radicando:

$G = 6.67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ $M = 5.98 \cdot 10^{24} kg$ $R = 6376000m$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{6376000}} \cong 7909\left(m \cdot s^{-1}\right) \cong 7.9\left(Km \cdot s^{-1}\right). \qquad (7)$$

Quest'ultima assume la dicitura "*prima velocità cosmica*".

Osservazione. La dimensione del radicando della (7) è:

$$\frac{\left(m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}\right) \cdot kg}{m} = m^2 \cdot s^{-2},$$

pertanto la dimensione di v_{t_0} è $\sqrt{m^2 \cdot s^{-2}} = m \cdot s^{-1}$.

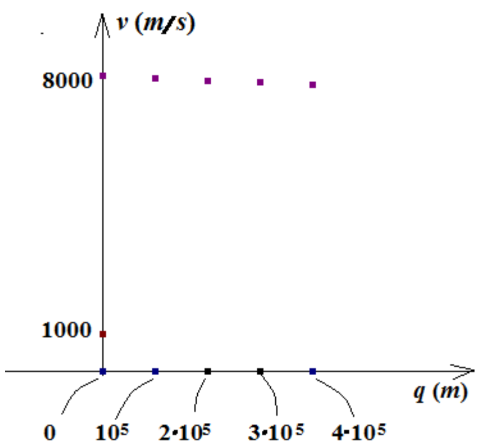
Mediante il sistema "Computer Algebra System Derive.6" scriviamo il programmino #1 nel quale chiediamo la velocità tangenziale v per valori di quota q che vanno da 0 m a 400000 m, con passo 100000 m e che, in esecuzione, porge la matrice #2

#1: $\text{VECTOR}\left(\left[q, \sqrt{\left(\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{6376000 + q}\right)}\right], q, 0, 400000, 100000\right)$

#2:

q in metri	v in metri al secondo
0	7909.32
10^5	7848.02
$2 \cdot 10^5$	7788.12
$3 \cdot 10^5$	7729.57
$4 \cdot 10^5$	7672.32

Con una opportuna scala rappresentiamo il grafico (discreto) relativo:



La (6) è una funzione reale continua il cui dominio è $[0,+\infty[$; all'estremo sinistro del dominio, come già detto, la funzione vale $v_{t_0} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}$, mentre $\lim_{q\to+\infty} \sqrt{\frac{G \cdot M}{R+q}} = 0^+$, ovvero la curva, grafico della funzione, tende all'asse delle ascisse (per valori positivi) che ne è quindi asintoto orizzontale.

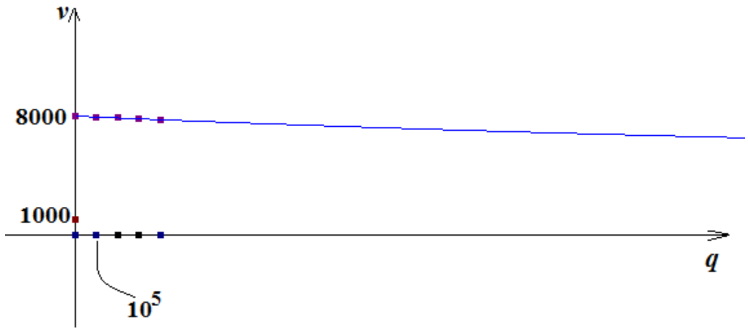
Viene confermata la decrescenza dal segno negativo della derivata prima

$$-\frac{\sqrt{\frac{GM}{R+q}}}{2(R+q)},$$

e la concavità rivolta verso l'alto data dal segno positivo della derivata seconda

$$\frac{3\sqrt{\frac{GM}{R+q}}}{4(R+q)^2};$$

pertanto il grafico della (6) è:



► Nella (3') esaminiamo il caso in cui M_1 sia la massa M della Terra e M_2 sia la massa m di un oggetto posizionato in un punto della superficie terrestre; allora $R_{1,2}$ è il raggio R della Terra. Per cui è:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}\ ; \qquad\qquad (3'')$$

Nella (3'') G, M ed R sono costanti per cui possiamo scrivere:

$$\frac{GM}{R^2} = costante;$$

posto $costante = g$, possiamo scrivere.

$$F = mg. \qquad\qquad (3''')$$

Determiniamo l'unità di misura di g:

$$\frac{m^3 kg^{-1} s^{-2} kg}{m^2} = ms^{-2}$$

Ovvero ha la dimensione di una accelerazione; la (3'''), pertanto è in concordanza con la seconda legge della dinamica; g assume la dicitura "*accelerazione di gravità*".

Nella (3''') F esprime la forza con cui la Terra e quell'oggetto, sito sulla superficie terrestre, mutuamente si attraggono, pertanto la forza Fè il peso dell'oggetto.

E' da evidenziare che $g$non è propriamente una costante; la sua variabilità, anche se di piccola entità, dipende:

- dalla non perfetta sfericità della superficie terrestre
- dalla disomogeneità della distribuzione delle masse nella Terra
- dall'influenza della rivoluzione della luna
- dall'influenza della rivoluzione della Terra attorno al Sole
- …..

Calcolati i valori di g ai poli e all'equatore rispettivamente $9.823ms^{-2}$ e $9.789ms^{-2}$, si è ritenuto di considerare il valore $9.81ms^{-2}$ che è il l'approssimazione, per eccesso, $9.80665ms^{-2}$ calcolato alla latitudine normale $(\varphi = 45° N/S)$, sul livello del mare.

Tornando all'oggetto di massa m, posto sulla superficie terreste possiamo esprimerne il suo peso P:

- $P = mg$ in virtù della seconda legge della dinamica
- $P = G\frac{Mm}{R^2}$ in virtù della forza di attrazione universale

Pertanto, è:

$$mg = G\frac{Mm}{R^2},$$

da cui:

$$GM = gR^2;$$

Allora la (6) si può scrivere:

$$v_t = \sqrt{\frac{gR^2}{R+q}} = R\sqrt{\frac{g}{R+q}} \,. \qquad (8)$$

Al fine di verificare l'equivalenza delle due espressioni (6) e (8), riproponiamo lo stesso programmino di pag. … , utilizzando la (8) al posto della (6):

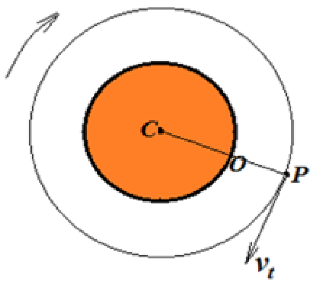
#3: $\text{VECTOR}\left(\left[q,\ 6376000\cdot\sqrt{\left(\frac{9.81}{6376000 + q}\right)}\right],\ q,\ 0,\ 400000,\ 100000\right)$

#4:

q in metri	v in metri al secondo
0	7908.76
10^5	7847.47
$2\cdot 10^5$	7787.57
$3\cdot 10^5$	7729.02
$4\cdot 10^5$	7671.78

e, rileviamo piccolissime differenze tra i valori delle velocità della matrice #2 con i corrispondenti valori della matrice # 4, dovute alle approssimazioni fatte sui valori delle costanti G, R e g.

►consideriamo un oggetto di massa m, posto una volta nel punto O ed un'altra volta nel punto P(fig.7);



$\overline{CO} = R$

$\overline{OP} = q$

$\overline{CP} = R + q$

fig.7

Ovviamente il suo peso è diverso nei due luoghi perché è diversa l'accelerazione di gravità g nel punto O dall'accelerazione di gravità g' nel punto P; la relazione tra g e g' è data dall'equazione

$$\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{r^2}, \qquad (9)$$

ovvero le accelerazioni di gravità sono inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze dal centro della Terra.

Risolviamo la (9) rispetto alla variabile g':

$$g' = \frac{gR^2}{r^2} = \frac{gR^2}{(R+q)^2}\,. \qquad (10)$$

Mediante la (10) possiamo determinare una ulteriore espressione della velocità tangenziale del satellite in quota q.

La forza di gravità F_g che la Terra esercita su un oggetto di massa m in un punto lontano dalla superficie terrestre è il peso di quel corpo i quel sito (esempio il corpo P nella fig.7), in cui l'accelerazione di gravità è g' alla quota q. Il satellite si mantiene in orbita circolare attorno alla Terra dalla condizione stabilita dal sistema

$$\begin{cases} F_g = mg' \\ F_c = m\dfrac{v^2}{r} \\ F_g = F_c \end{cases},$$

la cui risolvente è

$$\frac{v^2}{r} = g'$$

che risolviamo rispetto alla variabile v, che prende il nome di velocità tangenziale indicata col simbolo v_t :

$$v_t = \sqrt{g' \cdot r} = \sqrt{g' \cdot (R+q)} \qquad (11)$$

5.. Il PRIMO SATELLITE ARTIFICIALE

Il primo satellite artificiale inviato nello spazio fu lo Sputnik 1; il lancio, avvenuto nell'ottobre del 1957, fu il coronamento di un programma dell'Unione Sovietica, iniziato nel 1948 dopo che si era rilevata la possibilità di modificare i missili militari in razzi vettori per il lancio dei satelliti artificiali.

Nel programma di lancio si scelse la quota$q = 900Km = 900000m$, pertanto è:

$r = R + q = (6376000 + 900000)m = 7276000m$;

consegue che la velocità tangenziale è:

1. $v_t = \sqrt{\dfrac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}}{7276000}} \cong 7404.01 ms^{-1}$ *mediante la* (6)
2. $v_t = 6376000 \cdot \sqrt{\dfrac{9.81}{7276000}} \cong 7403.48 ms^{-1}$ *mediante la* (8)
3. $g' = \dfrac{9.81 \cdot 6376000^2}{(6376000 + 900000)^2} \cong 7.5332 ms^{-2} \Rightarrow$

$$v_t = \sqrt{7.5332 \cdot 7276000} \cong 7403.48 ms^{-1} \textit{ mediante le } (10) \text{ e } (11)$$

6..CALCOLO DELLA SECONDA VELOCITA' COSMICA

L'energia necessaria che deve aver il razzo-vettore per portare un satellite in orbita circolare alla distanza q dalla superficie terrestre, per ipotesi considerata omogenea e a superficie perfettamente sferica, è:

$$E = m\int_0^q g' dq \qquad (12)$$

che, dalla (10), diventa:

$$E = mgR^2 \int_0^q \frac{1}{(R+q)^2} dq =$$

$$= mgR^2 \int_0^q (R+q)^{-2} = mgR^2 \left[\frac{(R+q)^{-1}}{-1} \right]_0^q = mgR \left[-\frac{1}{R+q} \right]_0^q = mgR^2 \left[-\frac{1}{R+q} + \frac{1}{R} \right] =$$

$$= mgR^2 \frac{-R+R+q}{R(R+q)} = mgR \frac{q}{R+q};$$

nella (12) l'unità di misura, in funzione delle dimensioni fondamentali del *SI* è

$kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$,

ma, essendo $kg \cdot m \cdot s^{-2} = N$, è:

$N \cdot m = J$,

infatti 1 Joule (simbolo *J*) è il prodotto di 1 newton per uno spostamento di 1metro.

Questa energia deve equilibrare l'energia cinetica del satellite alla quota *q*, quindi:

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgR \frac{q}{R+q}$$

da cui:

$$v = \sqrt{2gR \frac{q}{R+q}} . \qquad (13)$$

Vediamo quale è la velocità v all'aumentare indefinitamente della quota *q*:

$$v_2 = \lim_{q \to +\infty} v = \lim_{q \to +\infty} \sqrt{2gR\frac{q}{R+q}} = \sqrt{\lim_{q \to +\infty}\left(2gR\frac{q}{R+q}\right)} =$$

$$= \sqrt{2gR \lim_{q \to +\infty} \frac{q}{R+q}} = \sqrt{2gR \cdot 1} = \sqrt{2gR}.; \qquad (14)$$

Pertanto la seconda velocità cosmica, con i valori già noti di g ed$R$,è:

v_2= 11184.68 Kms^{-1}.

Pertanto si chiamano *prima velocità cosmica*v_1e *seconda velocità cosmica*$v_2$rispettivamente la velocità dell'orbita circolare radente la superficie terrestre e la minima velocità di fuga ovvero la velocità minima con cui il satellite sfugge all'attrazione terrestre.

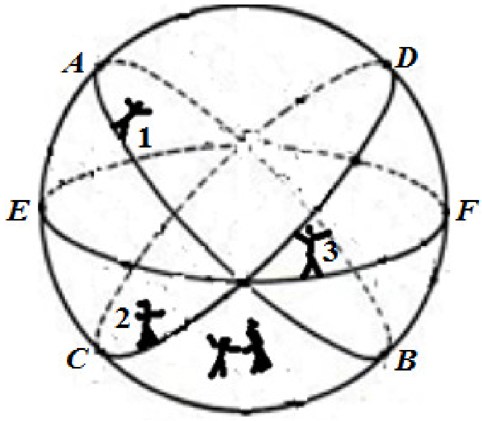
Le possibilità sulla variabilità della velocità di lancio sono riportate nella seguente tabella:

VELOCITA' DI LANCIO v	FORMA DELL'ORBITA
$v = v_1$	*orbita circolare*
$v_1 < v < v_2$	*orbita ellittica*(*)
$v = v_2$	*orbita parabolica*
$v > v_2$	*orbita iperbolica*

(*) per la piccolissima eccentricità consideriamo queste orbite circolari.

►**CURIOSITA'**. **Poincaré Jules Henri** (Nancy 1854 – Parigi 1912) è uno dei più importanti matematici francesi, vissuto a cavallo tra l'ottocento ed il novecento; ha fornito considerevoli apporti alla matematica attuale, interessandosi di analisi infinitesimale, probabilità, geometria, epistemologia e fisica matematica.

A proposito di geometria , in una delle sue opere, rappresenta un curioso mondo abitato da esseri sprovvisti di altezza, ovvero come estesi sulla superficie sferica, assumendone la sua sfericità ed impediti assolutamente di allontanarsene. In queste ipotesi, lo spazio in cui vivono questi strani esseri è certamente bidimensionale. Ma, allora che cosa è una retta per questi strani abitanti? E' certamente un circolo massimo perché solo ivi si può percorrere la strada più corta tra due punti di esso (ovviamente l' arco di circolo massimo deve essere minore di 180°); pertanto la geometria di queste creature è certamente e solamente quella sferica.



La superficie sferica, e solo quella, è il loro unico spazio dove si svolgono tutti gli avvenimenti che li coinvolgono; trattasi comunque di uno spazio "*infinto limitato*", in quanto.

- la superficie sferica è certamente limitata,
- la superficie sferica può essere percorsa indefinitamente, sempre nello stesso senso, ripassando infinite volte dal punto di partenza.

Il mondo perfettamente sferico creato nell'immaginazione di Poincaré mi porta a poter pensare di esseri viventi come l'essere 1 o 2 o 3 della figura, considerati puntiformi, che percorrono rispettivamente i circoli massimi *AB*, *CD*, *EF*; se uno di loro, per esempio l'essere 1si imbarcasse su un satellite anch'esso puntiforme, la cui orbita è il circolo massimo *AB*, egli viaggerebbe alla velocità di circa 7.9 *Km/s*; la cosa sarebbe, nelle ipotesi fatte, pienamente accettabile perché il punto, in geometria, è l'ente adimensionale e quindi un punto (l'essere 1) sovrapposto ad un altro punto (il satellite) non danno alcun spessore e quindi rispettano il mondo di Poincaré.

4.. PERIODO DI RIVOLUZIONE

Come sappiamo, il moto circolare uniforme è un tipico esempio di moto periodico, cioè di un moto che si ripete sempre uguale in intervalli di tempi uguali; è proprio questo intervallo di tempo a cui diamo la denominazione di *periodo* del moto e lo indichiamo con la lettera T. Pertanto il periodo del moto circolare uniforme è l'intervallo di tempo affinché il punto materiale compia un giro completo della traiettoria circolare.

Nel nostro caso un giro completo del satellite (orbita) ha lunghezza $2\pi r = 2\pi(R+q)$, da cui la velocità tangenziale può esprimersi:

$$v_t = \frac{2\pi(R+q)}{T}. \qquad (15)$$

Dal confronto della (6) con la (15), abbiamo:

$$\sqrt{\frac{GM}{(R+q)}}=\frac{2\pi(R+q)}{T}$$

che risolviamo rispetto alla variabile T:

$$T=2\pi(R+q)\sqrt{\frac{R+q}{GM}} \qquad (16)$$

In alcuni testi la (16) è scritta, allo scopo di agevolare l'esecuzione dell'operazione, nel seguente modo:

$$T^2=\frac{4\cdot\pi^2\cdot(R+h)^3}{G\cdot M}\Rightarrow T=\sqrt{T^2} \qquad (17)$$

T è espresso in secondi; verifichiamola, per esempio sulla (16):

$$\textit{unità misura II membro}=m\sqrt{\frac{m}{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}\cdot kg}}=\sqrt{\frac{m^3}{m^3\cdot s^{-2}}}=\sqrt{s^2}=s=\textit{unità misura I membro}$$

Determiniamo il periodo di rivoluzione del satellite *Sputink* I:

$$T\cong 2\cdot 3.14\cdot(6376000+900000)\sqrt{\frac{6376000+900000}{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.98\cdot 10^{24}}}\cong 6171.42s\cong 1h42s$$

Con le stesse modalità usate per determinare la velocità tangenziale del satellite creiamo un programma che porga i periodi di rivoluzione i dipendenza delle quote; il #5 è il programma ed il #6 ne è l'esecuzione:

#5: $\text{VECTOR}\left(\left[q,\ 2\cdot 3.14\cdot(6376000+q)\cdot\sqrt{\left(\frac{6376000+q}{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.98\cdot 10^{24}}\right)}\right],\ q,\ 0,\ 400000,\ 100000\right)$

#6:

q in metri	T in secondi
0	5062.54
10^5	5182.1
$2\cdot 10^5$	5302.6
$3\cdot 10^5$	5424.01
$4\cdot 10^5$	5546.34