PREMESSA ALLO STUDIO DELL'ORTODROMIA

► Il diedro è una delle figure fondamentali della geometria solida. Si definisce ***angolo diedro*** o, semplicemente, ***diedro*** ciascuna delle due parti, in cui lo spazio è diviso da due semipiani π e π', uscenti da una stessa retta *r*. Di entrambi questi diedri (sia quello concavo che quello convesso) la retta *r* si dice *spigolo* o *costola* e i due semipiani π e π', si chiamano ***facce***. Ogni diedro si può immaginare generato da un semipiano, che, coincidendo inizialmente con una delle due facce, ruoti intorno allo spigolo in uno dei due versi possibili, fino a sovrapporsi all'altra faccia (è come dire "*uno dei due semipiani spazza lo spazio sino a sovrapporsi sull'altro*")

Di un diedro si dice *sezione normale* o *retta* l'angolo (interno al diedro) che è formato dalle due semirette, secondo cui le facce sono intersecate da un qualsiasi **piano perpendicolare allo spigolo**. Tutte le sezioni normali di uno stesso diedro sono uguali. Più in generale, diedri uguali (cioè sovrapponibili) hanno sezioni normali uguali; e, viceversa, diedri aventi sezioni normali uguali sono uguali.

In figura il diedro concavo è sezionato dal piano *aOb*, perpendicolare allo spigolo *r*, e quindi l'ampiezza di questa sezione retta è l'ampiezza del diedro.

Un diedro è concavo, acuto, ottuso, retto, piatto se la sua sezione normale è un angolo piano concavo, acuto, ottuso, retto, piatto.

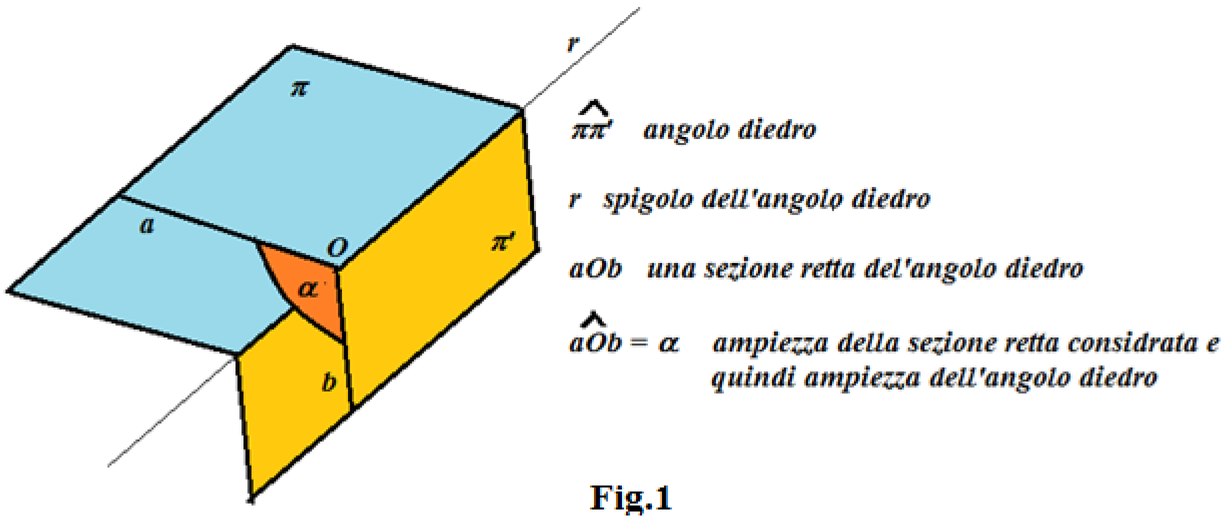


Fig.1

Ora veniamo alla navigazione ortodromica.

► Nella seguente figura sono segnati due punti *A* e *B*, rispettivamente di partenza e di arrivo e:

- la lossodromia *ALB* che è la curva con la concavità rivolta verso l'alto,
- l'ortodromia *AB* che è la curva con la concavità rivolta verso il basso.

Le navi navigano per lossodromia ma il cammino più breve tra due punti è l'arco di circolo massimo, minore di 180°, compreso tra detti punti, cioè dalla curva chiamata ortodromia

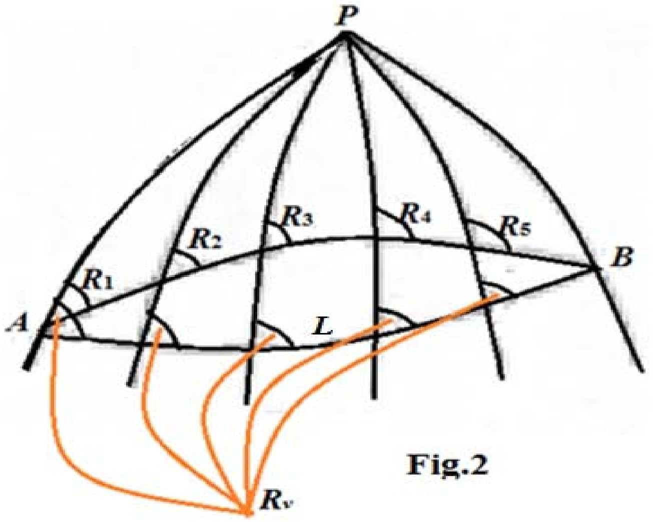


Fig.2

Detta curva, però, non è percorribile perché una nave che volesse seguirlo dovrebbe cambiare continuamente rotta, infatti il circolo massimo che unisce due punti A e B (ad esclusione dell'equatore e dei meridiani che sono nel contempo lossodromie degeneri) viene intersecato dai meridiani sotto angoli diversi tra loro: $R_1 \neq R_2 \neq R_3 \neq R_4 \neq .....$

Ed allora volendo seguire cammini più brevi di quello lossodromico, si segue, al posto del cammino ortodromico, un cammino formato da n archi di lossodromia

$$AL_1; L_1L_2 : L_2L_3; ......; L_nB$$

i cui punti A_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) appartengono all'ortodromia.

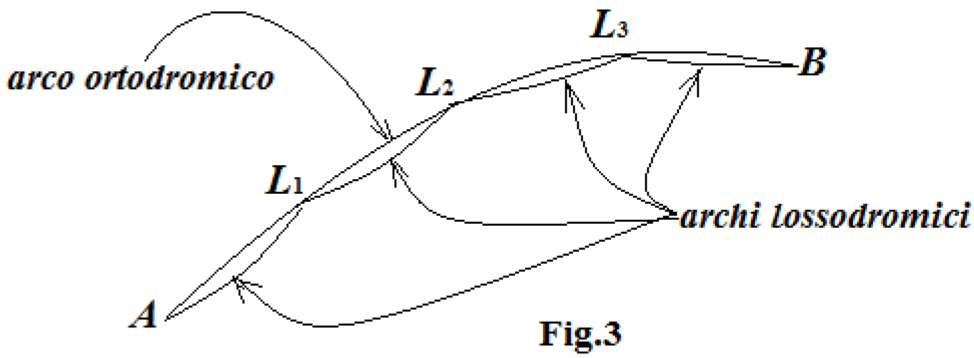


Fig.3

La **navigazione ortodromica** è, praticamente, proprio questo.

Perché ho detto “cammini più brevi” ? Perché più sono i punti che si scelgono sull’arco di circolo massimo, tanto più vi è risparmio di cammino rispetto all’unico arco di lossodromia *ALB* e quindi i cammini sono svariati in virtù della scelta del numero di archi lossodromici.

Infatti, è:

$$\lim_{n\to\infty}(AL_1 + L_1L_2 + L_2L_3;+.....+L_nB) = \overset{\frown}{AB},$$

avendo indicato con $\overset{\frown}{AB}$ l’arco di circolo massimo *AB*.

Si dice **triangolo ortodromico** il triangolo sferico avente per vertici i punti di partenza, il punto di arrivo ed il polo geografico omonimo alla latitudine del punto di partenza.

Pertanto gli elementi del triangolo ortodromico sono:

- la colatitudine c_A del punto di partenza ovvero $c_A = 90° - \varphi_A$
- la colatitudine c_B del punto di arrivo ovvero $c_B = 90° - (\pm\varphi_B)$, nella quale si sceglie: il segno “+” se φ_B è omonima a φ_A, il segno “–“ se φ_B è eteronima a φ_A, (**)
- il cammino ortodromico m_O
- l’angolo al polo $\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A$
- l’angolo nel punto di partenza detto rotta iniziale ed espresso con R_i
- l’angolo nel punto di arrivo; esso è $180° - R_f$, in cui indichiamo con R_f la rotta ortodromica istantanea nel punto *B* che, essendo il punto di arrivo, è detta rotta finale

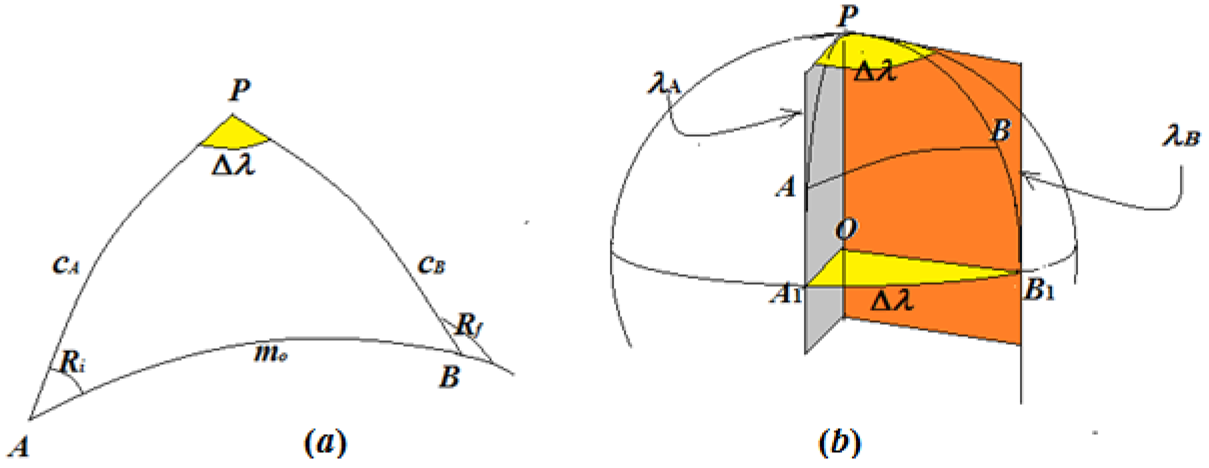


Fig.4

OSSEVAZIONE. La (b) della Fig.4 giustifica l'ampiezza dell'angolo al polo; infatti esso è uguale alla sezione retta $A_1\ O\ B_1$, misurata sull'equatore, dell'angolo diedro formato dai due semipiani meridiani di A e B di spigolo l'asse terrestre. In pratica, nelle figure, gli angoli si segnano con dei piccoli archetti.

I dati del problema sono le coordinate del punto di partenza A e quelle del punto di arrivo B, pertanto gli elementi che si possono determinare sono i lati c_A, c_B e l'angolo $\Delta\lambda$ tra essi compreso.

Con gli elementi noti si possono determinare tutti gli altri elementi utilizzando:

- il teorema di Eulero per il cammino ortodromico

  Il teorema di Eulero, detto anche teorema del coseno, porge una relazione fra i tre lati ed un angolo, in particolare consente di calcolare l'ampiezza di un lato conoscendo gli altri due lati e l'angolo tra questi compreso (angolo che è opposto al lato da calcolare).

- il teorema delle cotangenti per le rotte iniziale e finale

  Il teorema delle cotangenti fornisce una relazione che lega quattro elementi consecutivi, nella forma "*lato-angolo-lato-angolo*" e quindi si ricava:

  --- un lato conoscendo un altro lato e gli angoli ad esso adiacenti,

  --- un angolo conoscendo un altro angolo e i due lati che lo formano.

► Per il calcolo del cammino operiamo come segue:

Per ricordarlo facilmente si scrive la sequenza di funzioni goniometriche

cos cos cos sin sin cos

successivamente si pone il simbolo " =" dopo la prima funzione ed il simbolo "+" dopo la terza funzione:

cos = cos cos + sin sin cos

successivamente si scrivono gli argomenti delle funzioni goniometriche nel seguente ordine

- il lato da determinare,
- per due volte i lati noti
- l'angolo noto

$$\cos m_O = \cos c_A \cdot \cos c_B + \sin c_A \cdot \sin c_B \cdot \cos \Delta\lambda \qquad (1)$$

che può scriversi anche:

$$\cos m_O = \sin\varphi_A \cdot \sin\varphi_B + \cos\varphi_A \cdot \cos\varphi_B \cdot \cos\Delta\lambda \qquad (2)$$

► Per il calcolo della rotta iniziale R_i operiamo come segue:

- scriviamo le seguenti funzioni nell' ordine

cot sin cos cos sin cot

OSSERVAZIONE. E' una scrittura palindroma (derivante dall'accoppiamento delle parole greche "*πάλιν –δρόμο*" che significano "*di nuovo-percorso*", ovvero che può essere percorso in entrambi i sensi"); non cambia la sequenza delle funzioni sia leggendo da sinistra verso destra che da destra verso sinistra

- posizioniamo il simbolo "uguale" dopo la prime due funzioni

- posizioniamo il segno "+" dopo le altre due funzioni

cot sin = cos cos + sin cot

- successivamente tracciamo, internamente al triangolo, una "*spezzata curvilinea*", partendo dal lato opposto all'angolo da determinare, diretta verso l'altro lato noto, indi verso l'angolo noto ed infine verso l'angolo da determinare (Fig.5)

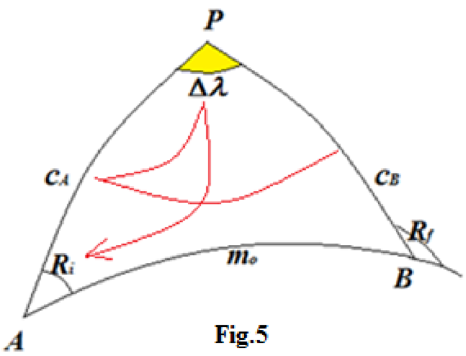


Fig.5

Nell'ordine dato dalla "*spezzata curvilinea*" , riportiamo gli argomenti nell'ultima uguaglianza, con l'avvertenza di scrivere due volte gli elementi in corrispondenza delle cuspidi della suddetta spezzata:

$$\cot c_B \cdot \sin c_A = \cos c_A \cdot \cos\Delta\lambda + \sin\Delta\lambda \cdot \cot R_i$$

successivamente risolviamo rispetto all'elemento R_i.:

ed in particolare:

- in virtù della proprietà simmetrica dell'uguaglianza $(a = b \Rightarrow b = a)$, è:

$$\cos c_A \cdot \cos \Delta\lambda + \sin \Delta\lambda \cdot \cos R_i = \cot c_B \cdot \sin c_A$$

- in virtù del primo principio di equivalenza delle equazioni (sottraiamo ad ambo i membri l'espressione $\cos c_A \cdot \cos \Delta\lambda$, è:

$$\sin \Delta\lambda \cdot \cos R_i = \cot c_B \cdot \sin c_A - \cos c_A \cdot \cos \Delta\lambda$$

- in virtù del secondo principio di equivalenza delle equazioni (dividiamo ambo i membri per $\sin \Delta\lambda$, è:

$$\cot R_i = \frac{\cot c_B \cdot \sin c_A - \cos c_A \cos \Delta\lambda}{\sin \Delta\lambda} \qquad (3)$$

oppure

$$\cot R_i = \frac{\cot c_B \cdot \sin c_A}{\sin \Delta\lambda} - \cos c_A \cdot \cot \Delta\lambda \qquad (4)$$

che può scriversi anche:

$$\tan R_i = \frac{\sin \Delta\lambda}{\tan \varphi_B \cdot \cos \varphi_A - \sin \varphi_A \cos \Delta\lambda} \qquad (5)$$

Personalmente suggerisco l'utilizzo della (1) e (3) o (4) a fronte delle (2) e (5) perché non hanno bisogno di <u>nessuna convenzione dei segni</u>; l'unica convenzione permane la (**), citata negli elementi del triangolo ortodromico.

OSSERVAZIONE. La rotta iniziale non è assolutamente una rotta che segue la nave, ma è un "*elemento di servizio*" atto alla determinazione delle coordinate del vertice *V*.

Che cosa sono i vertici del circolo massimo? Sono i due punti, diametralmente opposti, che hanno la massima latitudine: sono pertanto i punti più vicini ai poli. E' per questo che necessario determinarne le coordinate per stabilire se la latitudine può risultare pericolosa per la navigazione.

Nella Fig.6 sono segnati due paralleli di latitudine opposte (stesso valore numerico ma di segno discorde) e, nella fascia sferica tra loro compresa, sono tracciati due circoli massimi aventi i vertici su quei due paralleli.

Notiamo che, allo stesso modo in cui si sono tracciati i due circoli massimi, se ne possono tracciare tanti altri, quanti ne vogliamo, infatti sono infiniti i circoli massimi aventi i vertici su una coppia di paralleli opposti.

Rileviamo che, stabilita una determinata longitudine, viene ad individuarsi un unico circolo massimo; pertanto le coordinate di un vertice esprimono il numero minimo di elementi per individuare univocamente un circolo massimo. (e quindi per determinarne l'equazione)

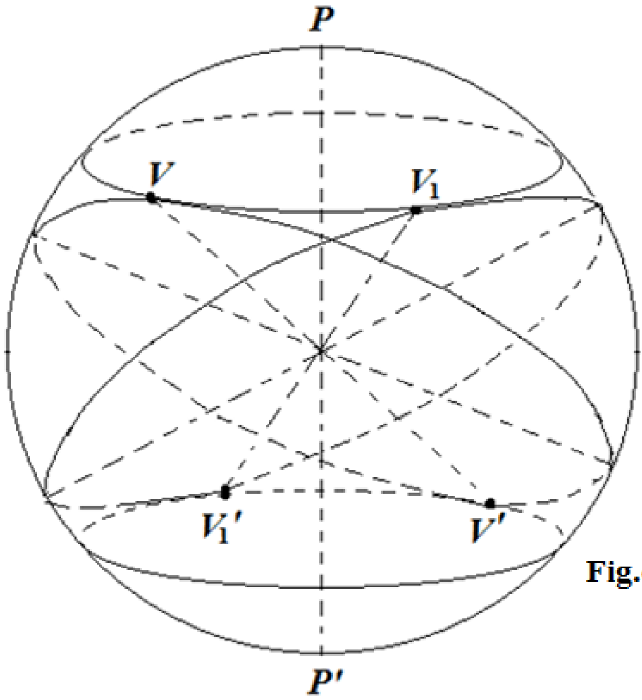


Fig.6

OSSERVAZIONE 1. E’ necessario determinare le coordinate del vertice (non solo quando esso è interno al tratto ortodromico) perché tramite esso si possono determinare le coordinate dei punti intermedi in cui gli archi della spezzata lossodromica, che il comandante vuole seguire, toccano il circolo massimo.

OSSERVAZIONE 2. Il circolo massimo è tangente al parallelo del vertice ed essendo il meridiano del vertice perpendicolare al quel parallelo risulta perpendicolare, in quel punto, anche al circolo massimo (ricordiamo che due curve tangenti in un punto hanno ivi la stessa tangente e quindi la stessa normale). Ed allora si formano due triangoli sferici rettangoli.

Vediamo i due casi:

- vertice interno

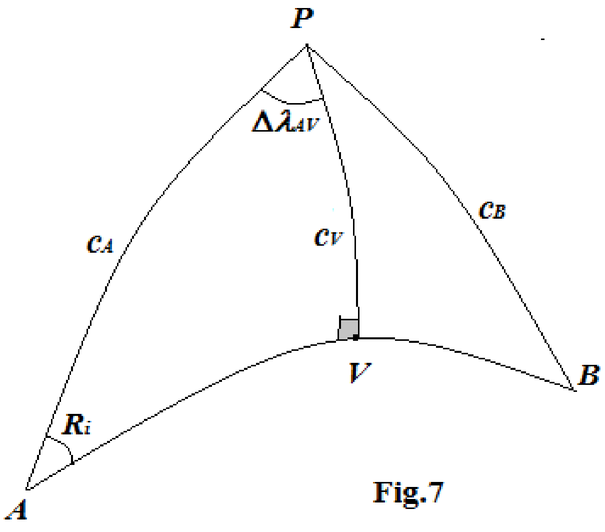


Fig.7

- vertice esterno

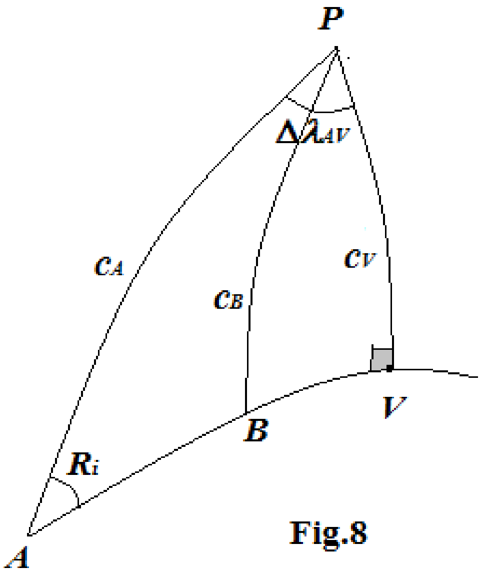


Fig.8

Il triangolo sferico *AVP* è rettangolo in *V* e quindi possiamo adoperare le regole mnemoniche di Nepero per determinare gli elementi che ci interessano cioè φ_V e $\Delta\lambda_{AV}$, mediante la stella a 5 spazi

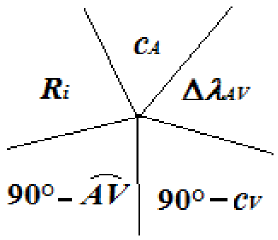


Fig. 9

- Per calcolare la latitudine del vertice, dobbiamo usare la regola che lega un elemento con i due ad esso lontani:

$$\cos(90° - c_V) = \sin R_i \cdot \sin c_A$$

ovvero

$$\cos\varphi_V = \sin R_i \cdot \cos\varphi_A$$

- Per calcolare $\Delta\lambda_{AV}$, dobbiamo usare la regola che lega tre elementi vicini e quindi si parte dall'elemento centrale:

$$\cos c_A = \cot\Delta\lambda_{AV} \cdot \cot R_i$$

che risolviamo rispetto a $\Delta\lambda_{AV}$:

$$\cot\Delta\lambda_{AV} = \frac{\cos c_A}{\cot R_i}$$

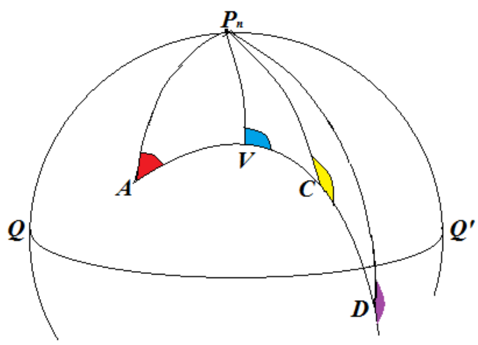
ovvero

$$\cot\Delta\lambda_{AV} = \sin\varphi_A \cdot \tan R_{i.}$$

► Fino ad ora abbiamo trattato il triangolo ortodromico allo stesso modo come ci si comporta per qualunque altro triangolo sferico: ricordiamo che gli elementi di un triangolo sferico sono tutti, nessuno escluso, misurati in gradi, primi, secondi (sessagesimali) e quindi le distanze sferiche di un punto da un altro punto sono solamente "**distanze angolari**". In più, nel triangolo ortodromico (Fig.5), si ha:

- la differenza di longitudine $\Delta\lambda$ ha nome E od W a seconda del risultato che porge l'espressione algebrica $\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A$;
- la rotta iniziale ha due nomi: il prefisso N o S omonimo alla latitudine del punto di partenza e il suffisso E o W, omonimo al nome del $\Delta\lambda$;
- la rotta finale ha gli stessi nomi della rotta iniziale;

ecco una figura esplicativa



A punto di partenza
D punto di arrivo

angolo rosso: rotta ortodromica iniziale

angolo verde: rotta ortodromica istantanea in V (vertice) = 90°

angolo giallo: rotta ortodromica istantanea in C

angolo viola: rotta ortodromica istantanea in D ovvero rotta ortodromica finale

Tutte queste rotte hanno per prefisso nome omonimo alla latitudine del punto di partenza (N)

e per suffisso nome omonimo alla differenza di longitudine (E).

- anche il cammino, calcolato con la (1), è espresso in gradi, primi e secondi, proprio perché come tutti gli altri elementi, è una distanza angolare. Tenuto conto, però, che la

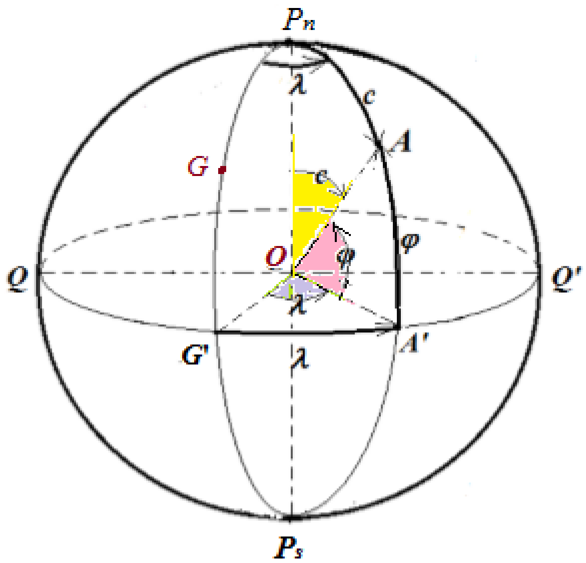
Terra è ben definita, con un altrettanto definito raggio, possiamo trasformare la predetta distanza angolare (sulla superficie terrestre) in distanza lineare. Ciò è possibile dopo che si è introdotto il miglio marino, definito come la lunghezza di un arco di circolo massimo compreso tra due verticali formanti un angolo di 1'. Risulta allora che il cammino ortodromico, espresso in primi d'arco, è il cammino espresso in miglia, percorse dalla nave per andare da A a B.

OSSERVAZIONE. Mediante la seguente figura, con esempi numerici, cerchiamo di far comprendere meglio il concetto di distanza.

Nella figura è riportata (in forma scenografica) la Superficie terrestre (supposta perfettamente sferica), in cui:

- $QG'Q'$ rappresenta l'equatore,
- P_nGP_s rappresenta il meridiano di Greenwich
- P_nAP_s è il meridiano di un punto A della superficie terrestre

In queste condizioni, supposto che sia $A(\varphi = 52°12'36''N; \lambda = 22°25'18''E)$, e detti G' ed A' rispettivamente i piedi, sull'equatore, del meridiano di Greenwich e del meridiano passante per A si ha:



--- la longitudine del punto A è l'arco di equatore $G'A'$ perché $G'OA'$ è una sezione retta dell'angolo diedro formato dal meridiano di Greenwich ed il meridiano del punto considerato A, ed in particolare quella sul piano equatoriale, perpendicolare allo spigolo P_nP_s dell'angolo diedro: angolo od arco misurato in gradi primi e secondi.

Ora, se una nave deve percorrere l'arco $G'A'$, quindi navigare con rotta vera 90° e vuol sapere quante miglia dovrà percorrere, basta esprimere la longitudine in primi d'arco ed il numero trovato è il numero delle miglia richiesto:

$$m_{G'A'} = (22 \cdot 60 + 25 + 18 : 60)mg = 1345.3mg$$

--- analogamente avviene per la latitudine del punto A: è l'arco $A'A$ .di meridiano o l'angolo AOA', misurato in gradi, primi, secondi.

Una nave che deve percorrere l'arco $A'A$ di meridiano dovrà percorrere:

$$m_{A'A} = (52 \cdot 60 + 12 + 36 : 60)mg = 3132.6mg \ .$$

NOTA. Si tenga presente che l'equatore ed i circoli meridiani sono circoli massimi e nel contempo lossodromie (degeneri); pertanto una nave che naviga per ortodromia sui suddetti circoli massimi mantiene rotta costante.