((1)) PREMESSA AL PROBLEMA

In figura è:

- O l'occhio di un osservatore la cui elevazione è $e = O_1O$ sul livello del mare,
- t la semiretta, di origine O, tangente alla superficie terrestre,
- T il punto di tangenza,
- $O_1O_2 = 2 \cdot R$ il diametro della Terra.

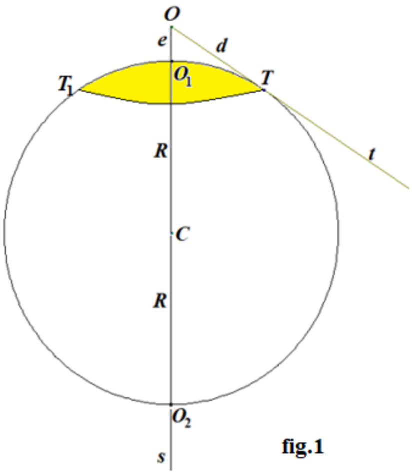


fig.1

Con queste premesse, prescindendo dalla rifrazione geodetica, il segmento $OT = d$ è la massima distanza di visibilità sulla superficie acquea cioè l'osservatore può vedere, se circondato dal mare, tutto ciò che è situato nella calotta di centro O_1 e raggio sferico O_1T; la linea T_1T, base della calotta, è detta linea dell'**orizzonte geometrico**.

E' manifesto quindi che la distanza d dipenda dall'elevazione e, ovvero d è funzione di e:

$$d = f(e). \tag{1}$$

Per determinare d possiamo operare in due modi:

1. Mediante l'uso del **teorema della tangente e della secante** che recita (fig.2):

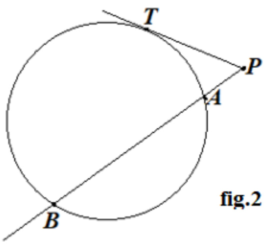


fig.2

se da un punto P, esterno ad una circonferenza, si tracciano una tangente PT ed una secante PAB alla circonferenza, il segmento di tangente PT risulta medio proporzionale tra l'intera secante PB e la sua parte esterna alla circonferenza PA, ovvero

$$PB : PT = PT : PA \tag{2}$$

Applicato alla fig.1, è:

$$(2 \cdot R + e) : d = d : e \quad \Rightarrow \quad d^2 = (2 \cdot R + e) \cdot e\,;$$

quindi la (1) diventa:

$$d = \sqrt{(2 \cdot R + e) \cdot e} \qquad (3)$$

2. Mediante il **teorema di Pitagora** applicato al triangolo rettangolo *CTO* (fig.3), infatti il raggio *CT* riesce perpendicolare alla retta tangente *t* nel punto di tangenza *T*:

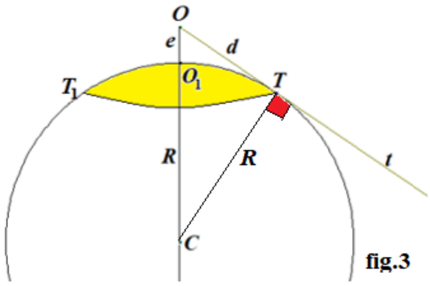


fig.3

$$d^2 + R^2 = (R+e)^2 \quad \Rightarrow \quad d^2 + R^2 = R^2 + 2 \cdot R \cdot e + e^2$$, da cui la (3).

OSSERVAZIONE. E' interessante rilevare che, a volte, un problema può essere risolto con strategie diverse, ottenendo ovviamente lo stesso risultato.

La (3) può essere sostituita con la seguente *equazione approssimata*:

$$d = \sqrt{2 \cdot R \cdot e} \; ; \qquad (4)$$

tale approssimazione è legittima per il fatto che il valore di e è dell'ordine di poche decine di metri a fronte di $2 \cdot R$ che è dell'ordine di milioni di metri e quindi e è insignificante, additivamente, rispetto a $2 \cdot R$.

► Assumendo $R = 6371 Km$ trasformiamo la (4) in espressione immediatamente utilizzabile, ovvero espressione atta a determinare immediatamente *d* sapendo il valore di *e*, espresso in *Km*:

$$d \cong \left(\sqrt{2 \cdot 6371 \cdot e}\right) Km = \left(\sqrt{12742 \cdot e}\right) Km \cong \left(112.9 \cdot \sqrt{e}\right) Km \qquad (5)$$

OSSERVAZIONE. E' importante che i due membri di una equazione siano uguali, ma è altrettanto importante che entrambi i membri siano espressi nella stessa unità di misura (in un recente libro di testo compaiono alcuni errori ed uno di questi è quello di aver dimensionato il dislocamento unitario in *t* e non in $\frac{t}{cm}$, pertanto nelle equazioni successive non è rispettata l'uguaglianza dimensionale).

► Assumendo $R = 6371000 m$ trasformiamo la (4) in espressione immediatamente utilizzabile, ovvero espressione atta a determinare immediatamente *d* sapendo il valore di *e*, espresso in *m*:

$$d \cong \left(\sqrt{2 \cdot 6371000 \cdot e}\right) m = \left(\sqrt{12742000 \cdot e}\right) m \cong \left(3570 \cdot \sqrt{e}\right) m \qquad (6)$$

La (5) e la (6) sono espressioni approssimate, ma equivalenti; vogliamo provare a determinare il coefficiente "3570" della (6), supposto incognito e quindi indicato con la lettera *x*, partendo dalla (5); basta operare mediante una proporzione. Per comodità sostituiamo il carattere minuscolo *e* col carattere maiuscolo *E* nella (5):

$$\frac{112.9 \cdot \sqrt{E}}{1} = \frac{x \cdot \sqrt{e}}{1000} \quad \Rightarrow \quad \frac{112.9 \cdot \sqrt{1000 \cdot e}}{1} = \frac{x \cdot \sqrt{e}}{1000} \quad \Rightarrow \quad \frac{112.9 \cdot \sqrt{1000} \cdot \sqrt{e}}{1} = \frac{x \cdot \sqrt{e}}{1000},$$

dividiamo ambo i membri per $\sqrt{e}$ ed estraiamo la radice quadrata di 1000, approssimata alla seconda cifra decimale:

$$1000 \cdot 112.9 \cdot 31.62 \cong x \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow x \cong 3569.89 \cong 3570$$

c.v.d.

A causa della *rifrazione geodetica* il valore d è un po' maggiore, circa dell'8%, e quindi la (5) diventa

$$d \cong \left(121.9 \cdot \sqrt{e}\right) Km\,, \tag{7}$$

infatti, è: $112.9 \cdot 1.08 \cong 121.9$;
mentre la (6) diventa:

$$d \cong \left(3856 \cdot \sqrt{e}\right) m\,, \tag{8}$$

infatti, è: $3570 \cdot 1.08 \cong 3856$.

ESEMPI.

- Un osservatore su una barca, con l'occhio posto a 2*m* distante dal livello del mare, vede la linea dell'orizzonte ad una distanza di circa 5.45 *Km* ovvero circa 2,9 *mg.*
- Un osservatore su una nave, con l'occhio posto a 20 *m* distante dal livello del mare, vede la linea dell'orizzonte ad una distanza di circa 17 *Km* ovvero circa 9 *mg.*

((2)) PROBLEMA

Allora vediamo a quale altezza l'occhio dell'osservatore deve essere posto sapendo che l'orizzonte si vede alla distanza di 7.5 *mg* = 13,89 *Km* = 13890 *m*.

Dalla (8), si risolve l'equazione:

$$3856\sqrt{e} = 13890 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{e} \cong 3{,}60 \quad \Rightarrow e \cong 13m^{(*)}$$

Supponiamo che due navi A e B navighino in contro corsa e vedano (ammettendo che siano entrambe a 7,5 *mg* dalla stessa linea di orizzonte ed abbiano uguale altezza della parte emersa) la stessa immagine.

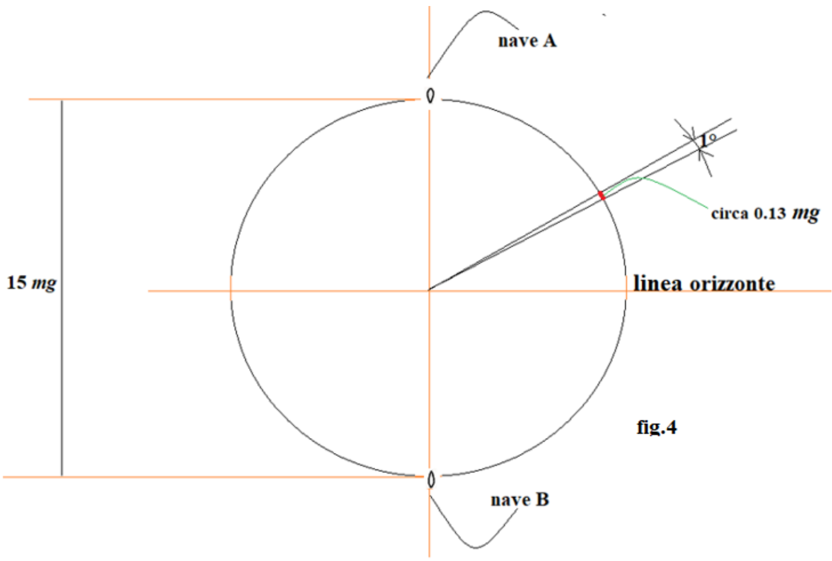


fig.4

Indichiamo con C (fig.4) la lunghezza della circonferenza che ha centro nell'intersezione tra la rotta comune delle due navi e la linea istantanea dell'orizzonte; essa è circa:

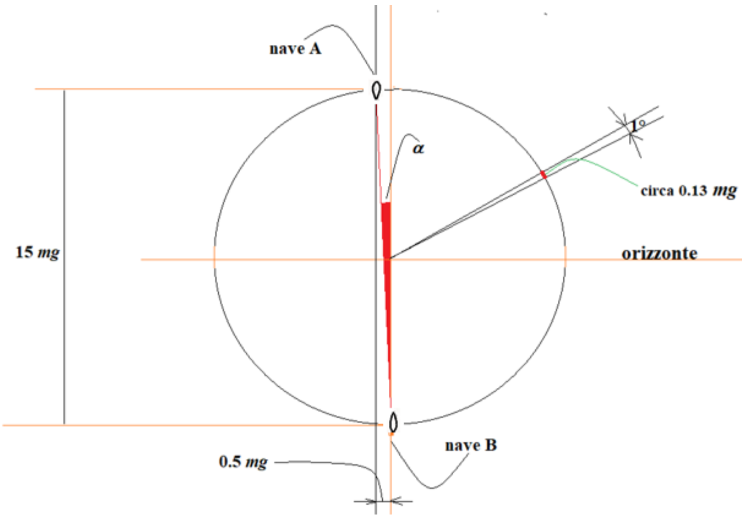
$$C \cong \pi \cdot 15 \cong 47mg\,.$$

L'arco l di circonferenza di ampiezza 1° è:

$$l \cong \frac{47}{360} \cong 0.13mg\,; \qquad (9)$$

Ovviamente in queste condizioni, in virtù delle rispettive velocità, ad un opportuno momento, le due navi dovranno manovrare (se nessuna delle due è in condizioni particolari) accostando entrambe a dritta per passare ad una distanza di sicurezza.

Se le due navi non sono in contro corsa ma percorrono rotte parallele, quale deve essere il rilevamento polare, supponiamo a sinistra (la nostra nave sia la nave B), per passare alla distanza di mezzo miglio?



Si deve risolvere un triangolo rettangolo e precisamente determinare l'angolo α opposto al cateto di lunghezza 0.5 mg, sapendo che l'altro cateto è circa 15 *mg*:

$$0.5 = 15 \cdot \tan\alpha$$

$$\alpha = \arctan\frac{0.5}{15} \cong \arctan 0.033333333 \cong 1°54'33''$$

Quindi il rilevamento polare (**) dovrebbe essere di circa 2°.

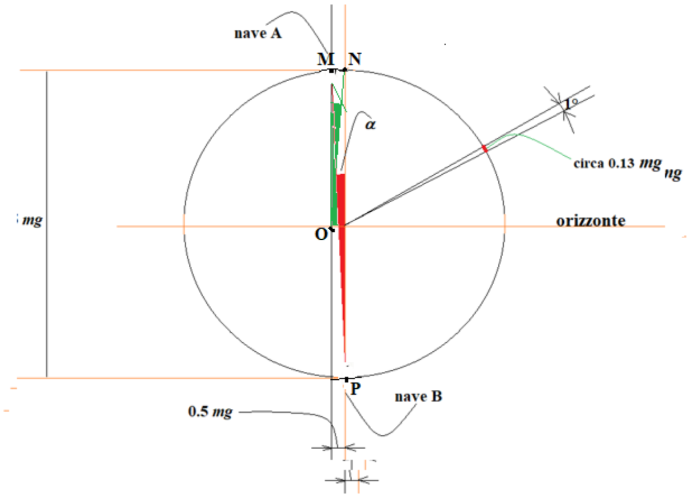
Ovviamente per la ristretta zona acquea abbiamo considerato il triangolo euclideo e quindi piano.

OSSERVAZIONE. E' interessante ricordare che in una circonferenza si ha che:

“ *un angolo alla circonferenza è la metà del suo angolo al centro corrispondente*”**.**

Ed allora in virtù della (9), verifichiamo il risultato ottenuto del mezzo miglio:

- l'angolo alla circonferenza (di colore rosso) è $M\hat{P}N = \alpha$,
- l'angolo al centro (di colore verde) è $M\hat{O}N$;



e, deve essere:

$$M\hat{O}N = 2 \cdot M\hat{P}N = 2 \cdot \alpha$$

Allora è:

$$M\hat{O}N = 2 \cdot 1°54'33'' \cong 2 \cdot 1{,}9° = 3{,}8°\,,$$

cioè:

$$arcoMN \cong (3.8 \cdot 0.13)mg = 0.494mg \cong 0.5mg$$

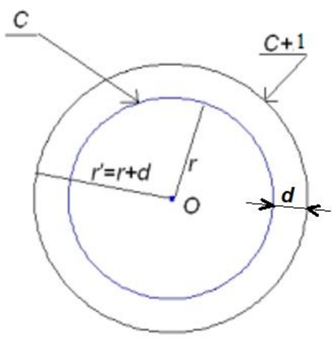
c.v.d.

((3)) **SPIGOLATURA**. Non sempre una misura molto piccola risulta insignificante rispetto ad una misura molto grande. Ricordo un quesito che mi fu posto ad un colloquio di lavoro:

"immagini di poter circoscrivere l'equatore con un filo che misura 1 metro di più della lunghezza dell'equatore stesso, così da formare una corona circolare. La domanda è "*tra le due circonferenze ci passa un gatto?*"

Credetemi che l'istinto fu quello di rispondere un bel NO. Ma, poi ho pensato: se la risposta, a caldo, è quella che ho presunto, è forse proprio quella sbagliata e quindi il gatto ci passa?.
L'esaminatore, volontariamente, mi volle fuorviare perché dopo avermi posto la domanda continuò a dirmi: supponga che l'equatore abbia lunghezza pari a 40.000.000*m* e che lei abbia a disposizione un filo di lunghezza 40.000.001 *m*, ovvero ripartisca un metro su quaranta milioni di metri…..

Ebbene, io avevo a disposizione carta e matita ma nessuna calcolatrice tascabile ed allora ho fatto il seguente disegno



in cui ho indicato rispettivamente con C la lunghezza della circonferenza equatoriale e con $C+1$ la lunghezza del filo disposto a circonferenza concentrica, con d la differenza dei raggi (ovvero la distanza tra le due circonferenze concentriche) ed allora ho potuto scrivere

$$C + 1 = 2\pi(r + d)$$

$$\cancel{C} + 1 = \cancel{2\pi r} + 2\pi d$$

$$d = \frac{1}{2\pi} \cong 0.16m = 16cm \qquad (10)$$

ovvero la distanza tra le due circonferenze (parallele) è di circa 16 *cm* e quindi un gatto normale passerebbe tra le due circonferenze.

Ma, appare dalla (10) molto di più! Si constata che *d* è indipendente dalla lunghezza delle due circonferenze concentriche, e che dipende **solo** dalla differenza tra i due perimetri; quindi se, per esempio, *C* = 3*m* e C' = C+1 = 4*m*, la differenza dei due raggi è circa $d = 16cm$, e se C' = C+2 = 5*m* allora la differenza dei raggi è circa $d = 32cm$, così di seguito.

(*) Nel precedente lavoro abbiamo approssimato i valori numerici ad una certa cifra decimale, opportunamente scelta. Infatti, in molte circostanze non viene richiesta la precisione di un numero, ma viene accettata una approssimazione dello stesso. Ovviamente i numeri arrotondati sono meno precisi di quelli da cui provengono, ma spesso, in certe situazioni, sono preferiti, o comunque accettati per l'uso che se ne deve fare.
Purtroppo, capita che alcuni docenti di materie scientifiche non approssimino, a dovere, i numeri decimali. Per l'approssimazione di numeri decimali, essi sono abituati a dire:

scelta la cifra *a* rispetto cui effettuare l'approssimazione, si opera l'approssimazione guardando la cifra *b*, subito successiva di *a*;

1. se *b* = 1, 2, 3 , 4 si elimina *b* e tutte le successive e si lascia invariata *a*; *si dice approssimazione per difetto*
2. se *b* = 6, 7, 8 ,9 si elimina *b* e si e si aumenta *a* di una unità, eliminando tutte le successive cifre ; *si dice approssimazione per eccesso*
3. se *b* = 5, si può operare, a piacere, come nel caso 1. o 2.

Ciò significa non avere le idee chiare sul sistema di numerazione decimale; si dice sistema di numerazione decimale proprio perché i simboli che lo costituiscono sono 10 e precisamente

0, 1, 2, 3 ,4, 5, 6, 7, 8 ,9;

per cui la cifra 5 non occupa per niente la posizione centrale della sequenza dei suddetti semi.
Pertanto la 1. e la 2. vanno corrette come segue:

1. se *b* = 0, 1, 2, 3 , 4 si elimina *b* e si lascia invariata *a* , eliminando tutte le successive cifre; *si dice approssimazione per difetto*
2. se *b* = 5, 6, 7, 8 ,9 si elimina *b* e si e si aumenta *a* di una unità, eliminando tutte le successive cifre; *si dice approssimazione per eccesso.*

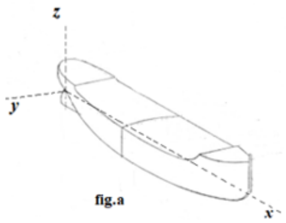
Nota. In un formulario che taluni docenti hanno consegnato ai maturandi non viene rispettata la precedente teoria per quanto concerne la tabella delle conversioni delle distanze, delle velocità e dei tempi……poveri studenti!

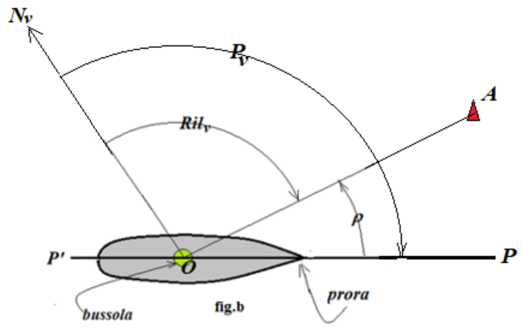
Ovviamente si possono arrotondare anche i numeri interi con regola analoga.
Esempio.
Approssimare il numero 3446:

- alle decine,
- alle centinaia.

1. L'approssimazione alle decine è 3450, infatti la cifra delle unità è 6 > 5: approssimazione per eccesso;
2. L'approssimazione alle centinaia è 3400, infatti la cifra delle decine è 4 < 5: approssimazione per difetto.

(**) Una delle direzioni che sovente è necessario indicare è quella secondo cui è orientata la prora della nave (*P'P* fig. b); questa direzione si definisce come la retta di intersezione tra un piano orizzontale (di colore grigio in fig. b), parallelo al piano *xy* di fig. a) col piano longitudinale di simmetria (o piano diametrale *xz* di fig. a) della nave.





Indicati con:

- N_v la direzione e verso del *polo nord geografico*,
- O il centro della *rosa dei venti*, ovvero il centro della *bussola* (di colore verde),
- $P'P$ la traccia del *piano diametrale* su quella linea d'acqua (colore grigio)
- A l'oggetto osservato (punto cospicuo della costa, nave, stella, … in particolare se il punto rilevato è una stella il rilevamento vero assume il nome di *azimut*).

► Si definisce **prora vera** l'angolo $P_v = N_vOP$, misurato circolarmente;

► Si definisce **rilevamento vero** l'angolo $Ril_v = N_vOA$, misurato circolarmente;

► Si definisce **rilevamento polare** l'angolo $\rho = POA < 180°$; quindi, tale angolo si misura da prua verso destra o verso sinistra a seconda che l'oggetto osservato sia alla destra o alla sinistra del piano longitudinale.

La relazione tra i tre suddetti angoli è:

1. $\rho = P_v - Ril_v$ quando l'oggetto rilevato è posto alla sinistra della nave (come in fig. b),
2. $\rho = Ril_v - P_v$ quando l'oggetto rilevato è posto alla destra della nave.