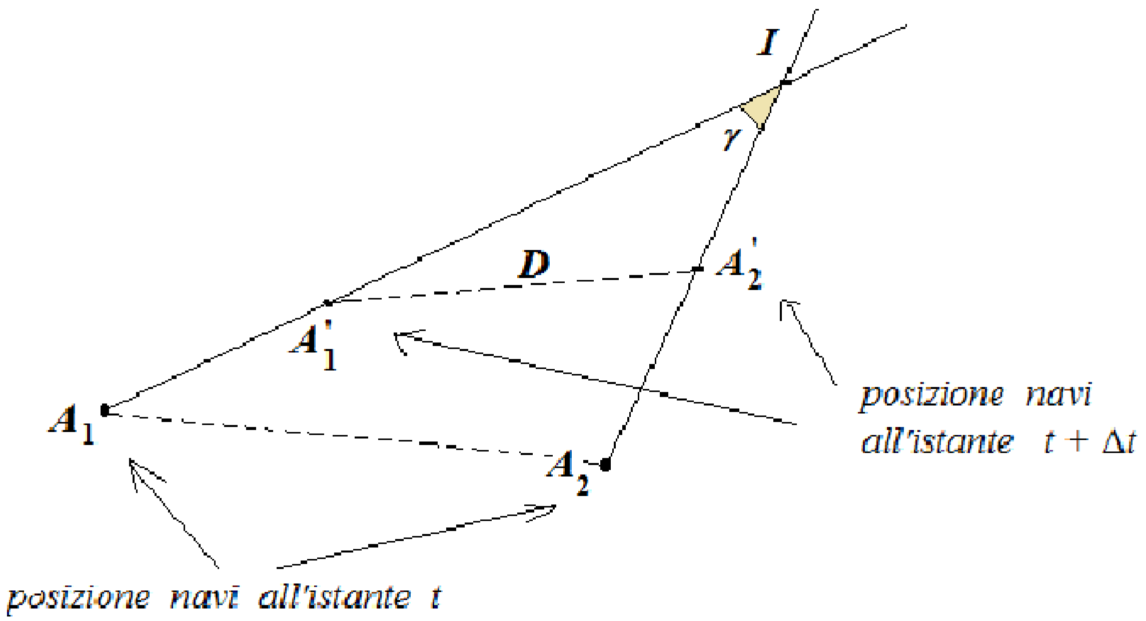
PROBLEMA: DETERMINAZIONE DEL TCPA E CPA (col metodo matematico)

Due navi A_1 e A_2 navigano con velocità costante rispettivamente v_1 e v_2 su rotte che si incontrano nel punto I (per la vicinanza delle navi, che navigano per lossodromia, le traiettorie possono considerarsi rettilinee) **formando ivi un angolo γ.**

Sapendo che in un certo istante t le due navi distano rispettivamente d_1 e d_2 da I, determinare la loro distanza minima D (CPA) e il tempo Δt di tale passaggio (TCPA).

SOLUZIONE

Indicato con $t+\Delta t$ l'istante in cui si ha la minima distanza D, i cammini che devono percorrere le due navi, sono rispettivamente $v_1\,\Delta t$ e $v_2\Delta t$; allora, nell'istante $t+\Delta t$ le due navi distano dal punto I rispettivamente $d_1 - v_1\,\Delta t$ e $d_2 - v_2\Delta t$.



Applichiamo il teorema del coseno (detto anche teorema di Carnot) al triangolo $A'_1\,A'_2\,I$, nel quale è:

- $A'_1 I = d_1 - v_1\Delta t$
- $A'_2 I = d_2 - v_2\Delta t$

$$D^2 = (d_1 - v_1\Delta t)^2 + (d_2 - v_2\Delta t)^2 - 2(d_1 - v_1\Delta t)(d_2 - v_2\Delta t)\cos\gamma \qquad (1)$$

Minimizzare D^2 significa minimizzare D allora deriviamo la (1) rispetto alla variabile Δt :

$$\left(D^2\right)' = -2v_1(d_1 - v_1\Delta t) - 2v_2(d_2 - v_2\Delta t) - 2[-v_1(d_2 - v_2\Delta t) - v_2(d_1 - v_1\Delta t)]\cos\gamma$$

imponiamo $(D^2)' = 0$, e indicato con $\Delta t_{(*)}$ l'intervallo di tempo che annulla la derivata prima, otteniamo.

$$-v_1 d_1 + v_1^2\Delta t_{(*)} - v_2 d_2 + v_2^2\Delta t_{(*)} + v_1 d_2\cos\gamma - v_1 v_2\Delta t_{(*)}\cos\gamma + v_2 d_1\cos\gamma - v_1 v_2\Delta t\cos\gamma = 0$$

$$v_1^2\Delta t_{(*)} + v_2^2\Delta t_{(*)} - 2v_1 v_2\Delta t_{(*)}\cos\gamma = v_1 d_1 + v_2 d_2 - v_1 d_2\cos\gamma - v_2 d_1\cos\gamma$$

$$\Delta t_{(*)} = \frac{d_1 v_1 + d_2 v_2 - d_2 v_1\cos\gamma - d_1 v_2\cos\gamma}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2\cos\gamma} \qquad (2)$$

potendosi verificare che, per $\Delta t = \Delta t_{(*)}$, è $\left(D^2\right)'' > 0$, $\Delta t_{(*)}$ rende minimo D^2 e quindi D.

Determino D:

sostituisco la (2) nella (1) ed ottengo:

$$S^2_{(\text{minimo})} = \frac{(d_1 v_2 - v_1 d_2)^2\sin^2\gamma}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2\cos\gamma},$$

e, estraendo la radice quadrata, ottengo il CPA:

$$S_{(\text{minimo})} = \frac{|d_1 v_2 - v_1 d_2|\sin\gamma}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2\cos\gamma}} \qquad (3)$$

Nella (3) il fattore $\sin\gamma$, che compare a numeratore non è espresso in valore assoluto perché l'angolo γ è minore dell'angolo piatto e quindi, per sua natura, positivo.

Esempio numerico. Se si hanno i seguenti dati.

$v_1 = 17$ nodi, $v_2 = 20$ nodi, $d_1 = 20$ mg, $d_2 = 25.2$ mg, $\gamma = 60°$.

la distanza minima è circa 1.3 mg, pertanto vi è un sufficiente margine di sicurezza, anche se, in generale, è uso assumere 2 mg la minima distanza di sicurezza (vedi problemi di cinematica navale).

OSSERVAZIONE 1. Quasi mai i docenti di materie tecnico-scientifiche parlano di "equazioni dimensionali". Credo, invece, che sia utile verificare, in ogni equazione che lega determinate grandezze, oltre all'uguaglianza numerica dei due membri, anche l'uguaglianza dimensionale.

Nel nostro caso, trattandosi di cinematica, le grandezze fisiche fondamentali che concorrono sono:

lunghezza [L] e tempo [T];

di conseguenza la grandezza della velocità è una grandezza derivata, e precisamente

velocità $[LT^{-1}]$.

- Verifichiamo la dimensionalità della (2)

$$\textit{dimensione primo membro} = [T]$$

$$\textit{dimensione secondo membro} = \frac{[L]\cdot[LT^{-1}]}{[LT^{-1}]^2} = \frac{[L]}{[LT^{-1}]} = \frac{1}{[T^{-1}]} = [T]$$

- Verifichiamo la dimensionalità della (3)

$$\textit{dimensione primo membro} = [L]$$

$$\textit{dimensione secondo membro} = \frac{[L]\cdot[LT^{-1}]}{\sqrt{[LT^{-1}]^2}} = \frac{[L]\cdot[LT^{-1}]}{[LT^{-1}]} = [L]$$

OSSERVAZIONE 2. Questo procedimento risolutivo comprova che con la matematica nulla è impossibile (o quasi), ma, soprattutto, evidenzia quanto possiamo essere grati alla cinematica navale che consente di risolvere il problema con una grande facilità e sveltezza (PLOTTING o PPI).