

## IL LOGARITMO: GRANDE OPERATORE

L'operatore logaritmo è stato per circa due secoli il mezzo per facilitare i calcoli indicati in espressioni numeriche monomie (numeri legati da operazioni di moltiplicazione, divisione, potenza, estrazione di radice).

Lo strumento tramite cui era possibile operare erano le "tavole logaritmiche dei numeri naturali da 1 a 9999" e le "tavole dei logaritmi delle funzioni goniometriche", entrambe a base 10.

### ESEMPIO

Calcolo di **log 12.2342**

La parte intera dell'argomento è formata da due cifre, allora: **caratteristica** = 2 - 1 = 1; per determinare la **mantissa**, consideriamo le prime 4 cifre significative dell'argomento: 1223.42; esso è compreso tra 1223 e 1224 a cui corrispondono rispettivamente le mantisse 08743 e 08778; la mantissa cercata è quindi compresa tra queste ultime due che differiscono della quantità D=35 (vedi stralcio tabella).

N	0	D	1	D	2	D	3	D	4	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
121	08279	35	08314	36	08350	36	08386	36	08422	...
122	08636	36	08672	35	08707	36	08743	35	08778	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

NOTA. I logaritmi di numeri con più di 4 cifre significative si ricavano dalle tavole mediante l'interpolazione lineare, avendo ammesso che, per piccoli intervalli, le differenze dei logaritmi siano proporzionali alle differenze dei corrispondenti argomenti, e precisamente:

$$\text{se è } \log(N + 1) - \log N = D \text{ e } h < 1 \text{ allora si ammette } \log(N + h) = \log N + h D .$$

Per agevolare lo studente, in fondo di ciascuna pagina delle tavole, si trovano le parti proporzionali (P.P.) corrispondenti alle differenze D. (vedi seguente tabella)

D.	P.P.	1	2	3	4	5	...
		...	...	...	...	...	...
35		3.5	7.0	10.5	14.0	17.5	...
...		...	...	...	...	...	...

$$\begin{aligned} \log 12.2300 &= 1.08743 \\ \text{P.P. } 4 &= 14.0 \\ \text{P.P. } 2 &= 0.70 \end{aligned}$$

$$\log 12.2342 = 1.087577$$

Con procedimento inverso si opera per ottenere il numero dato il logaritmo: **antilogaritmo**.

NOTA. La seguente strategia si utilizzava, al fine di agevolare i calcoli, a trasformare una sottrazioni di mantisse in addizioni di mantisse:

$$\log \frac{m}{n} = \log m - \log n = \log m + \text{colog } n;$$

dove, il **cologaritmo** di un numero è il logaritmo del reciproco del numero stesso, quindi definito come segue

$$\text{colog } n = \log \frac{1}{n}$$

### ESEMPIO

$$\log \frac{473.5}{2054} = \log 473.5 - \log 2054 =$$

$$= 2.67532 - 3.31260; \quad (1)$$

qui dovremmo eseguire una sottrazione; ma, essendo più facile eseguire una addizione, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} - 3.31260 &= - 3 - 0.31260 + 1 - 1 = - 4 + 1 - 0.31260 = - 4 + 0.68730 = \\ &= \bar{4}.68730 \end{aligned}$$

Allora la (1) diventa, messa in colonna:

$$\begin{array}{r} 2.67532 + \\ \bar{4}.68730 = \\ \hline \bar{1}.36262 \end{array}$$

Questa ultima operazione è agevolata perché le mantisse sono positive e quindi per esse facilmente si esegue l'addizione; la somma algebrica delle caratteristiche, tenuto conto dell'eventuale riporto sulla somma delle mantisse, è anch'essa facilitata perché i termini sono numeri interi.

L'unica obiezione è: “*ma si deve fare sempre una differenza per trovare la mantissa del cologaritmo*”; osservazione giusta, ma, anche qui, vi la seguente agevole strategia:

la mantissa del cologaritmo si determina facendo:

- il complemento a 10 dell'ultima cifra significativa (cioè diversa da 0);
- il complemento a 9 di tutte le altre.

Nella pratica l'operatore doveva usare le tavole per calcolare molteplici logaritmi.

Ad esempio, a bordo di navi, per determinare il punto nave astronomico in navigazione (il così detto “*problema di rette d'altezza*”), con 4 rette, l'ufficiale di coperta doveva calcolare 20 logaritmi e 8 antilogaritmi (su equazioni semilogaritmiche perché somme di prodotti). E, oltre a questi calcoli puramente matematici, doveva fare anche osservazioni astronomiche di astri, calcoli con le *effemeridi nautiche* ed altri, nonché un grafico e, il tutto in circa 15-20 minuti. Da ciò emergeva la necessità di saper usare le tavole logaritmiche con grande velocità.

Ricordiamo che la forma più semplice di navigazione è la **navigazione stimata**, basata su alcuni strumenti fondamentali ( bussola, cronometro, anemometro ). Conoscendo rotta, velocità e tempo trascorso si può in ogni momento, con semplici calcoli, riportare sulla carta la propria posizione (Punto Stimato P.S.) rispetto al un punto di partenza o ad un punto precedentemente noto.

Perché questo punto si dice stimato? Perché nel calcolarlo non si possono debitamente valutare venti, correnti ed altri fattori che modificano la rotta (ricordo di un comandante che diceva : *la rotta è quel luogo di posizione della nave dove la nave non c'è mai*).

Allora, in navigazione, necessita determinare il punto nave vero P.N.

Il metodo astronomico è quello delle rette d'altezza di astri visibili.

La scoperta della retta d'altezza si deve al capitano Thomas Sumner che, con la sua nave proveniente da Charleston (Sud Carolina) e diretta a Greenock (Scozia), dopo che per 700 miglia non aveva potuto determinare la sua posizione a causa del maltempo, verso le ore 10 antimeridiane del 17 dicembre 1837, grazie ad una improvvisa apertura della nebbia, riuscì a rilevare l'altezza del Sole.

Con quella unica altezza di Sole Sumner calcolò la longitudine, però, non fidandosi della latitudine stimata, rifece il calcolo aumentandola prima di 10' poi di 20'. Ottenne così tre punti che riportati sulla carta nautica formavano una linea retta e che erano equidistanti tra loro.

Questa retta puntava al fanale galleggiante di Small.

Sumner intuì che questa retta era un luogo di posizione della nave, cambiò rotta e seguì questa linea e dopo un'ora avvistò, di prora, il fanale galleggiante di Small .

Dopo sei anni, Sumner descrisse la sua scoperta in un opuscolo intitolato "*A New and Accurate Method of Finding a Ship's Position at Sea, by Projection on Mercator's Chart*" pubblicato a Boston.

Questo metodo ebbe una grande divulgazione, tanto che dal 1844 fu adottato da tutte le navi USA.

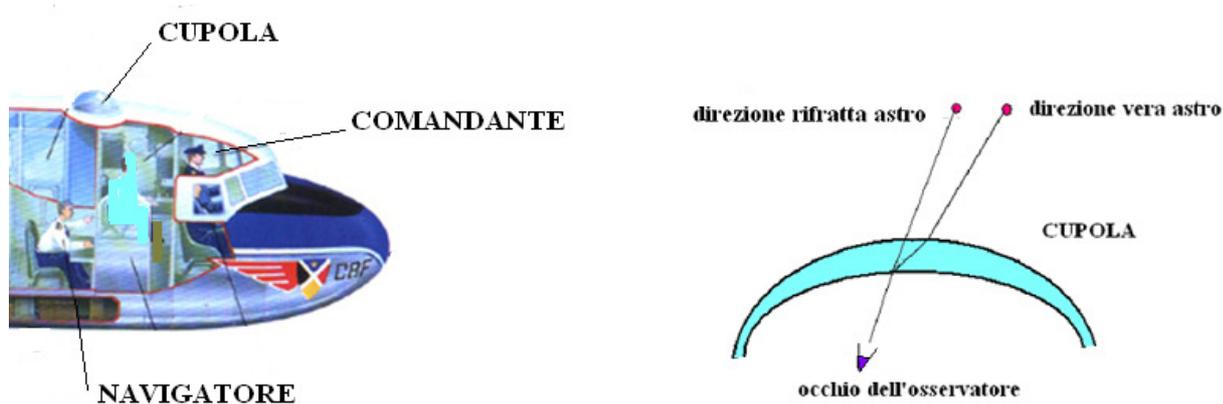
Si tratta quindi della *navigazione astronomica*, che però richiede:

- un cielo visibile (o comunque non completamente coperto dalle nubi)
- la visibilità dell'orizzonte
- la conoscenza degli astri (così detti navigabili).

La posizione dei corpi celesti rispetto allo spazio ed alla Terra è riportata nelle "Effemeridi Nautiche", pubblicate da enti responsabili (Istituto Idrografico della Marina Militare, ad esempio, in Italia). Rilevando col sestante le altezze e col cerchio azimutale della bussola gli azimut di almeno due astri, tramite opportuni calcoli, si può ricavare la distanza del punto nave (reale) *PN* da quello stimato *PS* precedentemente calcolato. Questo procedimento presuppone quindi la conoscenza delle *coordinate stimate*; pertanto la conoscenza del punto stimato diviene assolutamente necessaria.

Uno degli elementi fondamentali per la determinazione del punto nave astronomico è la misura dell'**altezza vera** di un astro, cioè riferita all'orizzonte vero; essa si ottiene dall'altezza letta (**altezza strumentale**) col sestante alla quale, dopo aver apportato le correzioni strumentali (**altezza osservata**), se ne apportano ulteriori (correzione d'indice, di rifrazione astronomica, per i pianeti di parallasse in altezza, semidiametro per il Sole e la Luna)

La stessa operazione viene fatta sull'aereo; però, mentre a bordo delle navi l'operatore va fuori dal ponte di comando, sull'aletta, ed è da qui che osserva gli astri senza nessun ostacolo tra il suo occhio e l'astro stesso, a bordo di un aereo deve rimanere dentro alla carlinga e misurare le altezze delle stelle osservandole attraverso una cupola trasparente; nasce pertanto una ulteriore correzione chiamata *correzione rifrazione cupola*



Vi è da considerare un altro fatto importante: occorre, per la misura dell'altezza, vedere l'astro e contemporaneamente l'orizzonte; a bordo di un aereo l'orizzonte non è visibile e quindi è necessario creare un espediente per ovviare a questo inconveniente: basta dotare il sestante di una bolla d'aria come hanno le livelle ed il gioco è fatto; questi sestanti si chiamano *sestanti con orizzonte artificiale*.

Ricordo, nel 1964, durante una esercitazione di Navigazione Aerea, una trasvolata tra l'aeroporto di Capodichino e quello di Ciampino e ritorno, su un Argo 24 (pare che fosse l'aereo dove aveva viaggiato il Papa Buono Giovanni 23°), dove, noi studenti avemmo l'occasione di usare il sestante Plath, con orizzonte artificiale, che aveva portato con se il docente Prof. Esposito.

Egli ci parlò anche dell'esistenza di opportune tavole che consentivano di sveltire il procedimento della determinazione del punto nave, se non ricordo male si parlava di alcuni minuti.

Questo procedimento veniva usato dagli aerei nella seconda guerra mondiale in alternativa all'uso dell'assistenza di radio-navigazione (navigazione moderna che nacque proprio durante la guerra con

l'istituzione di sistemi di navigazione iperbolici come il LORAN e il DECCA) per non essere intercettati dal nemico, e quindi con possibilità di essere abbattuti.

Era un procedimento che portava risultati accettabili per le modeste velocità degli aerei di quel tempo.

Facciamo alcuni calcoli.

Supponiamo che l'aereo abbia una velocità di 200 nodi e che il calcolo della determinazione del punto nave sia di

- a. 15 minuti con le usuali tavole logaritmiche
- b. 4 minuti con le speciali tavole aeree

Nel caso a. bisognerà tener conto delle 50 miglia percorse durante i 15 minuti di calcolo e quindi bisognerà apportare un trasporto di ben 50mg

Nel caso b. il trasporto sarà di sole 13 mg circa.